ЧАСТНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА, КОНФОРМНО СВЯЗАННОГО С ПРОСТРАНСТВОМ МИНКОВСКОГО

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия

gri9z@mail.ru

Пространство, конформно связанное с пространством Минковского, обладает единственным скалярным полем, для которого записывается уравнение поля и находится частное специальное решение: стационарное пространственно сферически симметричное с "силой" притяжения к центру. Решение определено только вне области радиуса r_0. На границе этой области материальные частицы, двигающиеся из бесконечности с нулевой начальной скоростью и нулевым моментом количества движения, достигают $\frac{1}{\sqrt{3}}$ скорости света, то есть эту область можно назвать "аналогом черной дыры". Для полученного самосогласованного поля сформулирована квантово-механическая задача на собственные значения. При некоторых предположениях несколько собственных значений найдены численно квазиклассическим методом.

1 Введение

Пространство x^0, x^1, x^2, x^3, конформно связанное с пространством Минковского, будучи псевдоримановым пространством, является также частным случаем финслерового пространства [1] и по определению имеет метрическую функцию следующего вида:

$$L(dx;x) = \kappa(x^0,x^1,x^2,x^3)\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2} \equiv \kappa(x)\sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\, dx^i dx^j}\,, \tag{1}$$

где $\kappa(x) > 0$ – единственное действительное скалярное поле в этом пространстве. Длина отрезка кривой $x^i = x^i(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ – параметр вдоль кривой, вычисляется в таком пространстве с помощью интеграла вдоль кривой

$$l_{1,2} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa(x)\sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\, \dot{x}^i\dot{x}^j}\; d\tau\,, \tag{2}$$

где $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$. Компоненты обобщенного импульса находятся по формулам:

$$p_i = \kappa(x)\frac{\overset{o}{g}_{ij}\, dx^j}{\sqrt{\overset{o}{g}_{km}\, dx^k dx^m}} \equiv \kappa(x)\frac{\overset{o}{g}_{ij}\, \dot{x}^j}{\sqrt{\overset{o}{g}_{km}\, \dot{x}^k\dot{x}^m}}\,. \tag{3}$$

Они связаны между собой соотношением

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\; p_i p_j = \kappa^2(x)\,, \tag{4}$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы [1] и записывать следующим образом:

$$\Phi(p;x) = 0\,. \tag{5}$$

Функцию $\Phi(p; x)$ будем называть *функцией Финслера.* Функция Финслера определяется неоднозначно – с точностью до перехода от одного тангенциального уравнения индикатрисы к любому другому эквивалентному уравнению, записанному в виде (5).

Если функция $\kappa(x)$ известна, то определены метрическая функция $L(dx; x)$ и функция Финслера $\Phi(p; x)$, а действие как функция координат $S(x)$ может быть найдено как решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x}; x\right) = 0\,. \tag{6}$$

Тогда уравнения для нахождения экстремалей ("геодезических") записываются или как уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L(\dot{x}; x)}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L(\dot{x}; x)}{\partial x^i} = 0\,, \tag{7}$$

или в каноническом виде

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\cdot\lambda'(p; x)\,, \qquad p_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\cdot\lambda'(p; x)\,, \tag{8}$$

где $\lambda'(p; x) > 0$ – произвольная функция, или в виде

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right|_{p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}} \cdot\lambda(x)\,, \tag{9}$$

где $\lambda(x) > 0$ – некоторая функция.

Формулы (6) – (9) справедливы для любого финслерова пространства. В нашем конкретном случае пространства x^0, x^1, x^2, x^3, конформно связанного с пространством Минковского, уравнение Гамильтона-Якоби (6) есть

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2 = \kappa^2(x)\,, \tag{10}$$

а уравнения (9) для нахождения экстремалей ("геодезических") запишутся как

$$\dot{x}^i = \overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial S}{\partial x^j}\cdot\lambda(x)\,. \tag{11}$$

Можно считать, что экстремали ("геодезические") являются траекториями движения некоторых материальных частиц. Таким образом, в любом финслеровом пространстве (в частности, нашем пространстве x^0, x^1, x^2, x^3) определена классическая механика неких материальных объектов вместе с лагранжевым формализмом (7), аналогом гамильтонового формализма (8) с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера и методом Гамильтона-Якоби (6), (9).

Если следовать гипотезе *самодостаточности геометрии* [2]: все поля, входящие в метрическую функцию, должны удовлетворять принципу стационарности любого объема – то поле $\kappa(x)$ не может быть произвольным.

Скалярное действительное поле $\kappa(x)$ всегда можно выразить через другое действительное скалярное поле $S_W(x)$, которое связано с полем $\kappa(x)$ соотношением

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2 = \kappa^2(x)\,, \tag{12}$$

поэтому лагранжиан для получения уравнения поля [2] будет иметь вид

$$\mathcal{L} = \kappa^4(x) \equiv \left(\overset{o}{g}{}^{ij} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^i} \frac{\partial S_W}{\partial x^j} \right)^2 , \tag{13}$$

а само уравнение поля запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left[\overset{o}{g}{}^{ij} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^j} \left(\overset{o}{g}{}^{km} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^k} \frac{\partial S_W}{\partial x^m} \right) \right] = 0 \, . \tag{14}$$

Решение уравнения (14) $S_W(x)$ будем называть *Мировой функцией.* Если Мировая функция известна, воспользуемся соотношением (12) для получения поля коэффициента расширения-сжатия $\kappa(x)$:

$$\kappa(x) = \sqrt{ \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3} \right)^2 } \, . \tag{15}$$

В работах [3], [4] и [2] не было сформулировано различие между действием как функцией координат $S(x)$ и Мировой функцией $S_W(x)$. Сделаем это для нашей конкретной задачи: действие как функция координат $S(x)$ – это решение уравнения Гамильтона-Якоби (10) при заданной функции $\kappa(x)$, а Мировая функция $S_W(x)$ – это решение полевого уравнения (14), причем скалярное поле $\kappa(x)$ теперь определяется с помощью полученного решения $S_W(x)$ полевого уравнения по формуле (15).

Мировая функция $S_W(x)$ определяет в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 нормальную конгруенцию экстремалей ("геодезических"), которые находятся из уравнений

$$\dot{x}^i = \overset{o}{g}{}^{ij} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^j} \cdot \lambda(x) \, , \tag{16}$$

где $\lambda(x) > 0$ – произвольная функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, τ – параметр вдоль кривой, параметр эволюции. В каком-то смысле можно считать, что именно по этим экстремалям движутся частицы самого поля $S_W(x)$, или поля $\kappa(x)$. Таким образом, поле $\kappa(x)$ и конгруэнция геодезических (16) являются самосогласованными.

В любом финслеровом пространстве не только определена классическая механика неких частиц, но и начальные квантово-механические представления.

Обычным образом с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера в финслеровом пространстве можно ввести скобки Пуассона, а затем перейти к представлению координат и импульсов в пространстве функций состояния $\Psi(x)$ (волновых функций) как эрмитовых операторов (наблюдаемых), заменив скобки Пуассона коммутаторами, но при этом надо учитывать зависимость элемента объема от точки пространства, если таковая имеется. В нашем конкретном случае в координатном представлении

$$p_i \to \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial x^i} \kappa^2 \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{p}_i, x^j] = i\hbar \delta^i_j \, , \tag{17}$$

так как элемент объема в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 имеет вид

$$dV = \kappa^4 \, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \, . \tag{18}$$

При таком подходе возникает ряд проблем, связанных с интерпретацией самой волновой функции $\Psi(x)$ и величины $\overline{\Psi}(x)\Psi(x)$, а также с тем, что энергия и время становятся наблюдаемыми. Эти проблемы в данной работе обсуждаться не будут, так как нас будет интересовать только задача на собственные значения.

При переходе от классической механики к квантовой механике тангенциальное уравнение индикатрисы для нерелятивистских частиц переходит в уравнение Шредингера, а для релятивистских частиц – в аналог уравнения Клейна-Гордона

$$\Phi(\hat{p}; x)\Psi(x) = 0\,, \tag{19}$$

где $\Psi(x)$ – функция состояния физической системы. Это уравнение является линейным уравнением в частных производных в том смысле, что любая линейная комбинация решений опять же является решением уравнения (19). В нашем конкретном случае пространства, конформно связанного с пространством Минковского, уравнение (19) принимает вид

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\kappa^2\,\Psi = -\frac{\kappa^4}{\hbar^2}\,\Psi\,. \tag{20}$$

2 Частное решение

Стационарное пространственно сферически симметричное поле $\kappa(x)$ можно получить, если искать решение уравнения (14) в виде

$$S_W = p_0 x^0 - \psi(r)\,, \tag{21}$$

где $p_0 > 0$, а

$$r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\,; \tag{22}$$

тогда для неизвестной функции ψ получим уравнение

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{d\psi}{dr}\left[p_0^2 - \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2\right]\right\} = 0\,. \tag{23}$$

Интегрирование по r приводит к соотношению

$$\xi^2\frac{d\psi}{d\xi}\left[1 - \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right] = \pm\,\alpha^2\,, \tag{24}$$

$\xi \equiv p_0 r$, $\alpha > 0$ – постоянная, а знак выберем из неких дополнительных требований.

Отметим, что из условия

$$\kappa^2 = p_0^2 - \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{d\psi}{d\xi}\right| < 1\,. \tag{25}$$

Уравнения, которые определяют нормальную конгруэнцию экстремалей, соответствующую функции $S_W(x)$, имеют следующий вид:

$$\dot{x}^0 = p_0\cdot\lambda\,, \qquad \dot{x}^\mu = \frac{d\psi}{dr}\frac{x^\mu}{r}\cdot\lambda\,, \tag{26}$$

$\mu = 1, 2, 3$; а для радиуса –

$$\frac{dr}{dx^0} = \frac{1}{p_0}\frac{d\psi}{dr}\,. \tag{27}$$

Кривые, определяемые этими уравнениями, можно рассматривать как траектории движения неких частиц, "формирующих" (определяющих) поле $\kappa(x)$ и движущихся по лучам, исходящих из начала координат. Условие (25) дает ограничение на скорость таких частиц: их скорость всегда меньше скорости света. Продифференцируем последнюю формулу по x^0, получим

$$\frac{d^2\, r}{(dx^0)^2} = \frac{1}{p_0^2}\,\frac{d\psi}{dr}\,\frac{d^2\psi}{dr^2}\,. \tag{28}$$

Таким образом, для того, чтобы поле $\kappa(x)$ носило характер притяжения к началу координат с увеличением модуля скорости при приближении к центру, необходимо, начиная хотя бы с r_* $(r > r_*)$, выполнение условий:

$$-1 < \frac{d\psi}{dr} < 0\,, \qquad\qquad \frac{d^2\psi}{dr^2} > 0\,. \tag{29}$$

Из анализа уравнения (24), следует, что реализовать условия (29) возможно только при выборе нижнего знака в формуле (24). Решая кубическое уравнение, получим

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\right]\,. \tag{30}$$

Области определения и значений функции (14) задаются следующими неравенствами:

$$0\ <\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\ \le\ 1\,, \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \le\ \frac{d\psi}{d\xi}\ <\ 0\,, \tag{31}$$

причем при изменении ξ от $\xi_0 \equiv \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\cdot\alpha$ до $+\infty$ функция $\dfrac{d\psi}{d\xi}$ монотонно возрастает от $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ до -0. Таким образом, максимально большая скорость, которой достигают частицы, "формирующие" поле $\kappa(x)$, равна $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot c = 0.57735027\cdot c$, а значит и другие (пробные) частицы в нашей геометрии могут достигать, вообще говоря, таких скоростей, то есть механика частиц в нашем пространстве является релятивистской. Эта максимально большая скорость частиц, "формирующих" поле, достигается именно на границе "дыры", радиус которой равен

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha}{p_0}}$$

и внутри которой поля $\kappa(x)$, $S_W(x)$ отсутствуют.

Если $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\dfrac{\alpha^2}{\xi^2} \ll 1}$, то функцию (30) можно заменить простым выражением

$$\frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{\alpha^2}{\xi^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^4}{\xi^4}\right)\,. \tag{32}$$

Это выражение качественно работает и в остальной области определения функции (30), причем самое большое отклонение имеет место в точке $\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2} = 1$: точное значение равно $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, а приближенная формула (32) дает $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Правда, производная от правой части (30) на границе "дыры" обращается в $+\infty$, а производная от правой части (32) на границе "дыры" имеет конечное значение.

Если $\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2} \simeq 1}$, то функцию (30) можно заменить простым выражением

$$\frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}} + \mathcal{O}\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right). \tag{33}$$

Итак, найдено стационарное сферически симметричное поле $\kappa(x)$,

$$\kappa(r) = p_0\sqrt{1 - \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2}, \tag{34}$$

где производная $\frac{d\psi}{d\xi}$ определяется формулой (30). Это поле является полем притяжения. Оно определено во всем пространстве, кроме области $r < r_0$.

В выше приведенных формулах явно выделяется удобная переменная ϱ,

$$\varrho \equiv \frac{r}{r_0}, \qquad \text{где} \qquad r_0 \equiv \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha}{p_0}}, \qquad 1 \le \varrho < +\infty. \tag{35}$$

Используя эту переменную, перепишем ряд последних формул:

$$1 \le \varrho < +\infty, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right], \tag{36}$$

$$1 \ll \varrho, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{1}{\varrho^2}, \tag{37}$$

$$\varrho \simeq 1, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{\varrho^2}}. \tag{38}$$

3 Постановка задачи на собственные значения

Запишем уравнение (20) в сферических координатах r, ϑ, φ, приняв, что поле $\kappa(x)$ задается выражением (34), а волновую функцию будем искать в виде [5]:

$$\Psi = \frac{1}{\kappa^2}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{E}{c}x^0\right) R(r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \tag{39}$$

$l = 0, 1, 2...,\quad m = -l, ..., l$ – квантовые числа момента количества движения. Подставим (39) в уравнение (20), получим

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\frac{E^2}{\hbar^2c^2} - \frac{p_0^2}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{p_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right] R = 0. \tag{40}$$

Перейдем к безразмерному радиусу ϱ (35), тогда уравнение для радиальной части функции состояния запишется следующим образом:

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \left[\frac{E^2r_0^2}{\hbar^2c^2} - \frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} + \frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right] R = 0. \tag{41}$$

Введем обозначения для двух безразмерных величин:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{E^2 r_0^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{p_0^2 r_0^2}{\hbar^2} \equiv \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \right) \cdot \left(\frac{E^2}{c^2 p_0^2} - 1 \right) , \qquad \mu \equiv \frac{4}{3} \frac{p_0^2 r_0^2}{\hbar^2} \equiv \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \right) . \tag{42}$$

Тогда

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} + \left\{ \mathcal{E} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} + \mu \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1}{\varrho^2} \right) \right] \right\} R = 0 . \tag{43}$$

Это уравнение, по форме совпадающее с уравнением Шредингера [5] для радиальной части волновой функции нерелятивистской частицы, находящейся в центрально-симметричном поле притяжения с потенциалом, который (с точностью до постоянного множителя) на бесконечности ведет себя как

$$U \simeq -\frac{\mu}{9} \frac{1}{\varrho^4} \tag{44}$$

и монотонно убывает до значения

$$U_{min} = -\frac{\mu}{4} \qquad \text{при} \qquad \varrho = 1 , \tag{45}$$

то есть на границе "дыры". Так как при $\varrho < 1$ никакого поля нет, что в каком-то смысле соответствует бесконечно глубокой потенциальной яме, то для всех волновых функций необходимо выполнение граничного условия

$$R(1) = 0 . \tag{46}$$

Таким образом, можно ожидать (это следует из общей теории [5]) конечного числа (или ни одного) локализованных (связанных) состояний, которые обязательно должны иметь дискретный спектр отрицательных значений параметра $\mathcal{E}$.

Так как все неквантовые частицы, которые в каком-то смысле порождают поле $\kappa(x)$, двигаются по траекториям с нулевым моментом количества движения, то волновые функции с $l = 0$, на наш взгляд, будут отвечать квантово-механической задаче в самосогласованном поле. Решения с $l \neq 0$ и $\mathcal{E} < 0$ можно рассматривать как захват самосогласованным полем некой "внешней" пробной частицы или как локализованное возмущение самосогласованного поля.

Если искать решение уравнения (43) в виде

$$R(\varrho) = \frac{y(\varrho)}{\varrho} , \tag{47}$$

то получим для неизвестной функции $y(\varrho)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{d\varrho^2} + \left\{ \mathcal{E} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} + \mu \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1}{\varrho^2} \right) \right] \right\} y = 0 . \tag{48}$$

Из этого уравнения для $\mathcal{E} < 0$ с учетом формулы (44) следует, что при $\varrho \to \infty$ функция $y(\varrho)$ связанного состояния ведет себя следующим образом:

$$y = const' \cdot \rho^{const} \exp \left(-\sqrt{-\mathcal{E}}\, \varrho \right) , \tag{49}$$

то есть стремится экспоненциально к нулю при $\varrho \to \infty$. Граничное же условие (46) заменяется условием

$$y(1) = 0 . \tag{50}$$

Предположим, что задача на собственные значения (48) – (50) решена и найден спектр собственных значений:

$$\mathcal{E} = -\sigma_0^2,\ -\sigma_1^2,\ ...\ -\sigma_{k-1}^2\,, \qquad \sigma_i \in \{\sigma_0,\ \sigma_1,\ ...\ \sigma_{k-1}\}\,. \tag{51}$$

Тогда из формул (42) получим значения величины

$$\frac{E_i}{cp_0} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma_i^2}{3\mu}}\,. \tag{52}$$

Воспользовавшись формулой (37), можно заменить точный потенциал на качественно похожий, тогда уравнение (48) несколько упростится:

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \left\{\mathcal{E} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} + \frac{\mu_{eff}}{\varrho^4}\right\} y = 0\,, \tag{53}$$

где

$$\mu_{eff} = \frac{1}{4}\mu\,, \tag{54}$$

если мы хотим получить точную глубину потенциала на границе "дыры" $\varrho = 1$, и

$$\mu_{eff} = \frac{1}{9}\mu\,, \tag{55}$$

если мы хотим получить точное поведение потенциала на бесконечности. В общем случае аналитическое решение уравнения (53) не известно, при $\mathcal{E} = 0$ и $l = 0$ такое решение есть

$$y = C\,\rho\,\sin\left(\frac{\sqrt{\mu_{eff}}}{\varrho} + \varphi_0\right)\,, \tag{56}$$

где C, φ_0 – постоянные интегрирования. Это решение не является локальным ни при каких значениях параметров, но если все же формально потребовать выполнение граничных условий

$$R(1) = 0\,, \qquad R(+\infty) = 0\,, \tag{57}$$

то получим

$$\varphi_0 = 0\,, \qquad \mu_{eff} = \pi^2 m^2\,; \qquad m = 1, 2, 3, ... \tag{58}$$

Даже при $l = 0$ не удалось точно решить задачу (48) – (50) на собственные значения σ_i, и поэтому пришлось применять приближенный и численный методы.

4 Квазиклассика

Так как формально уравнение (43) совпадает с уравнением Шредингера [5] для радиальной части волновой функции нерелятивистской частицы, находящейся в центрально-симметричном поле притяжения, то для решения задачи (48) – (50) на собственные значения σ_i могут быть применены те же методы, в частности, квазиклассический подход, хотя бы для качественного описания ожидаемых точных собственных значений.

С учетом того, что точка $\varrho = 1$ не является точкой поворота и нас интересуют собственные значения самосогласованной задачи, правило квантования Бора для

$$\frac{E^2}{c^2} - p_0^2 < 0 \qquad \text{и} \qquad l = 0 \tag{59}$$

записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\hbar}\int\limits_{r_0}^{r_*}\sqrt{\frac{E^2}{c^2}-p_0^2+p_0^2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2}dr=\pi\left(n+\frac{3}{4}\right)\,,\qquad n=0,1,2,3,... \tag{60}$$

Здесь r_0 (35) – границы "дыры", а r_* – корень уравнения

$$\frac{E^2}{c^2}-p_0^2+p_0^2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2=0\,. \tag{61}$$

Перейдем в формуле (60) от интегрирования по переменной r к интегрированию по переменной ϱ (35), получим

$$\int\limits_{1}^{\varrho_*}\sqrt{\mathcal{E}+\mu\cos^2\left[\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]}\,d\varrho=\pi\left(n+\frac{3}{4}\right)\,,\qquad n=0,1,2,3,... \tag{62}$$

Разделим левую и правую части на $\sqrt{\mu}$, введем обозначение

$$-\frac{\mathcal{E}}{\mu}\equiv\lambda^2 \tag{63}$$

и перепишем формулу (62)

$$\int\limits_{1}^{\varrho_*}\sqrt{-\lambda^2+\cos^2\left[\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]}\,d\varrho=\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\left(n+\frac{3}{4}\right)\,,\qquad n=0,1,2,3,...\,, \tag{64}$$

где

$$\varrho_*=\frac{1}{\sqrt{\cos(3\arccos\lambda-\pi)}}\,,\qquad 1<\ \varrho_*<+\infty\,. \tag{65}$$

Безразмерные энергии связанных состояний будут выражаться через собственные значения $\lambda_i\in\{\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_{k-1}\}$ следующим образом:

$$\frac{E_i}{cp_0}=\sqrt{1-\frac{4}{3}\lambda_i^2}\,. \tag{66}$$

Так как $1<\varrho_*<\infty$ находится как корень уравнения

$$-\lambda^2+\cos^2\left[\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]=0\,,$$

из этого следует, что

$$0<\lambda_i<\frac{1}{2}\qquad\Rightarrow\qquad 1>\frac{E_i}{cp_0}>\sqrt{\frac{2}{3}}\simeq 0.81649658\,. \tag{67}$$

Обозначим интеграл в левой части формулы (64) как $F(\lambda)$, тогда формула (64) перепишется следующим образом:

$$F(\lambda)=\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\left(n+\frac{3}{4}\right)\,,\qquad n=0,1,2,3,...\,.$$

Заметим, что при $\lambda \neq 0$, $F(\lambda) < F(0)$, причем интеграл $F(0)$ сходится и равен $F(0) \simeq 0,34843550$, поэтому, если параметр μ задан (фиксирован), то для связанных состояний

$$F(0) > \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(n + \frac{3}{4} \right) , \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

и число связанных состояний k определяется неравенством

$$k < b \equiv \frac{F(0)\sqrt{\mu}}{\pi} + \frac{1}{4} , \tag{68}$$

то есть, если b – целое, тогда $k = b - 1$, если b – не целое, то k – целая часть числа b. Если же

$$\frac{3}{4} \geq \frac{F(0)\sqrt{\mu}}{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \leq \left[\frac{3\pi}{4F(0)} \right]^2 \simeq 45,7275 ,$$

локализованные состояния отсутствуют. Можно сказать, что чем больше μ, тем более плотно располагаются значения $\dfrac{E_i}{cp_0}$, относящиеся к локализованным состояниям, на отрезке $\left[1; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

Так как задача самосогласованная, то должен существовать способ каким-то образам определить параметр μ в рамках задачи на собственные значения. Можно предложить минимум две гипотезы:

1) возникновение нового связанного (локализованного) состояния;

2) состояние $\lambda = 0$ является квазисвязанным и квазиклассическим без точек поворота.

4.1 Возникновение нового локализованного состояния

Будем предполагать, что параметр μ имеет дискретный спектр значений, причем каждое значение соответствует возникновению нового локализованного состояния, тогда из формулы (64) получим этот спектр значений:

$$\mu_k = \left[\frac{\pi \left(k + \frac{3}{4} \right)}{F(0)} \right]^2 , \qquad k = 1, 2, 3, \dots . \tag{69}$$

Уравнение (64) для определения λ_i в этом случае принимает вид

$$\frac{F(\lambda)}{F(0)} = \frac{n + \frac{3}{4}}{k + \frac{3}{4}} < 1 , \qquad n = 0, 1, 2, 3, ..., (k-1) ; \quad k = 1, 2, 3\dots . \tag{70}$$

Число связанных (локализованных) состояний равно k.

В случае $k = 1$ существует только одно локализованное состояние $n = 0$, при этом $\dfrac{n + \frac{3}{4}}{k + \frac{3}{4}} = \dfrac{3}{7}$, численный расчет дает

$$\lambda_0 \simeq 0,0871 , \qquad \frac{E_0}{cp_0} \simeq 0,9949 . \tag{71}$$

При $k = 2$ существует два локализованных состояния $n = 0$ с $\dfrac{n + \frac{3}{4}}{k + \frac{3}{4}} = \dfrac{3}{11}$ и $n = 1$ с $\dfrac{n + \frac{3}{4}}{k + \frac{3}{4}} = \dfrac{7}{11}$, при этом численный расчет дает

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 \simeq 0,1499\,, & \dfrac{E_0}{cp_0} \simeq 0,9849\,, \\ \lambda_1 \simeq 0,003397\,, & \dfrac{E_1}{cp_0} \simeq 0,9992\,, \end{array}\right\} \quad \frac{E_0}{E_1} \simeq 0.9857\,. \tag{72}$$

4.2 Квазисвязанное квазиклассическое состояние $\lambda = 0$ без точек поворота

Выше было показано, что для упрощенного потенциала, который качественно описывает точный потенциал, имеет место уравнение (53). Требуя существования квазилокального состояние $\mathcal{E} = 0$, $l = 0$ с граничными условиями (57), был получен спектр значений (58) для параметра μ_{eff}. Для того, чтобы получить такой спектр значений с помощью квантования Бора, отметим отсутствие точек поворота для такого состояния, поэтому

$$\sqrt{\mu_{eff}} \int\limits_1^\infty \frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho = \pi m\,, \qquad m = 1, 2, 3, ... \tag{73}$$

А так как

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho = 1,$$

квантование по правилу Бора без точек поворота совпадает с точным квантованием (58). Поэтому в случае точного потенциала, имеем

$$\sqrt{\mu_k} = \frac{\pi k}{F(0)}\,, \qquad k = 1, 2, 3, ... \tag{74}$$

и

$$\frac{F(\lambda)}{F(0)} = \frac{n + \frac{3}{4}}{k} < 1\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ..., (k-1)\,; \quad k = 1, 2, 3.... \tag{75}$$

При этом k – число связанных состояний.

В случае $k = 1$ существует только одно локализованное состояние $n = 0$, при этом $\dfrac{n + \frac{3}{4}}{k} = \dfrac{3}{4}$, численный расчет дает

$$\lambda_0 \simeq 0,015923\,, \qquad \frac{E_0}{cp_0} \simeq 0,99987\,. \tag{76}$$

При $k = 2$ существует два локализованных состояния $n = 0$ с $\dfrac{n + \frac{3}{4}}{k} = \dfrac{3}{8}$ и $n = 1$ с $\dfrac{n + \frac{3}{4}}{k} = \dfrac{7}{8}$, при этом численный расчет дает

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 \simeq 0,10592\,, & \dfrac{E_0}{cp_0} \simeq 0,99249\,, \\ \lambda_1 \simeq 0,003966\,, & \dfrac{E_1}{cp_0} \simeq 0,9999895\,, \end{array}\right\} \quad \frac{E_0}{E_1} \simeq 0,992503\,. \tag{77}$$

5 Заключение

Результаты данной работы показывают насколько богатой является теория поля, предложенная в статье [2] даже для таких "простых" римановых пространств, как пространства, конформно связанные с пространством Минковского. Из условий: стационарности поля коэффициента растяжения-сжатия, его пространственной сферической симметрии и наличия при достаточно больших r "сил" притяжения – однозначно получается решение с вырезанной "дырой" ($r < r_0$), в которой поле отсутствует и которая является аналогом понятия черной дыры в ОТО. Для такого поля возможна постановка квантово-механической задачи на собственные значения.

Интересно применить теорию поля [2] не только к различным римановым пространствам, но и к финслеровым неквадратичным, например, пространствам, конформно связанным с пространством H_4, которое обладает метрикой Бервальда-Моора.

Литература

[1] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

[2] Гарасько Г. И., Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), т. 3 (2006), стр. 6 – 20.

[3] Гарасько Г. И., О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 3 – 18.

[4] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г., Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 19 – 27.

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Часть I (Нерелятивистская теория), М.-Л., ОГИЗ, 1948.