ГЕОМЕТРИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия
gri9z@mail.ru

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Показано, что пространства невырожденных поличисел являются метрическими финслеровыми пространствами. Получены выражения для нормы и метрической финслеровой функции. Приводится удобный алгоритм для вычисления скалярных полипроизведений в таких пространствах. Построен базис, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисла, и описано все множество таких базисов. Множество унимодулярных поличисел изоморфно непрерывной группе Ли, группе симметрии поличислового пространства.

1 Введение

Известно, что комплексные числа только тогда получили свое полное признание у математического сообщества, когда была открыта их естественная геометрическая интерпретация как точек и векторов евклидовой плоскости. Это соответствие алгебраических и геометрических объектов оказалось настолько глубоким и продуктивным, что многие математики с большим энтузиазмом приступили к решению похожей задачи, а именно – к поиску алгебры, которой соответствовала бы геометрия уже трехмерного пространства. Проблему блестяще решил Уильям Роуан Гамильтон, который открыл алгебру кватернионов [1]. И хотя умножение кватернионов оказалось некоммутативным, а сами они лучше приспособленными к четырехмерному, чем к трехмерному евклидовому пространству, успех был настолько впечатляющим, что иные варианты алгебраизации реального пространства с тех пор практически перестали рассматриваться.

Одним из серьезных недостатков алгебры кватернионов является то, что множество аналитических функций кватернионной переменной ограничено дробно-линейными функциями. У данного печального обстоятельства есть геометрическая подоплека. Это связано с тем, что группы конформных преобразований евклидовых (да и псевдоевклидовых) пространств с размерностью три и выше в соответствии с теоремой Лиувилля [2] оказываются конечномерными. Исключением из этого правила является двухмерная плоскость, у которой группа конформных отображений имеет мощность большую мощности континуума. Как следствие, аналитические функции комплексной переменной образуют весьма богатое множество, что отчасти и составляет математическую основу теории функций комплексной переменной. Так или иначе, но физики и математики совершенно уверены в евклидовости нашего реального трехмерного пространства, причем эта уверенность настолько велика (римановы обобщения здесь ничего принципиально не меняют), что многие просто перестали замечать несообразность с математической точки зрения данного факта и стали исходить именно из него, разыскивая не новые богатые на аналитические функции структуры, а ограничиваясь различными вариантами обходных путей и мирясь с относительной бедностью, в этом смысле, кватернионов.

Однако, пусть и достаточно формально, остается открытой и прямая дорога, а именно исследование таких трехмерных и четырехмерных алгебр, которые являются метрическим пространствами и которые обладают бесконечно-параметрической группой конформных преобразований. И пусть такие алгебры и соответствующие им пространства, на первый взгляд, совершенно экзотичны – всегда остается шанс на неожиданный оборот. Учитывая же недавно открывшееся обстоятельство, согласно которому у некоторых таких пространств действительно просматриваются почти евклидовы свойства [3], актуальность исследования соответствующих алгебр многократно возрастает.

Среди пространств, обладающих бесконечно-параметрическими группами конформных преобразований, в первую очередь следует выделить те, которым можно поставить в соответствие алгебры с коммутативно-ассоциативным умножением. Интересно отметить, что свойства таких структур (условимся называть их *алгебрами поличисел*) наиболее близки свойствам обычных действительных и комплексных чисел, за исключением наличия в них делителей нуля, то есть объектов, деление на которые не определено в принципе, как и деление на нуль. Поскольку у остальных чисел обратные им существуют, алгебры поличисел следует считать обладающими частичным делением, что хоть и отличает их от числовых полей, все же оставляет вполне интересными. С операцией деления, которая не всегда выполнима, математики давно научились и привыкли работать, так если функция $f(x)$ действительной переменной x обращается в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ в нуль, это не запрещает рассматривать функцию $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Как правило, поличисла оказывались вне зоны внимания как математиков, так и физиков, а "виновата" в том во многом теорема Фробениуса, согласно которой числовые структуры с делением ограничены полями действительных и комплексных чисел. Однако, учитывая нашу готовность иметь дело с частичным делением и с делителями нуля (которым с геометрической, а главное с физической точки зрения естественным образом ставятся в соответствие точки и вектора световых конусов), – мы выходим за рамки вышеназванной теоремы и имеем перед собой существенно большее разнообразие алгебраических структур. Их перечисление и полную классификацию, равно как и доказательство многих положений помогает осуществить теорема Вейерштрасса [4].

Теорема Вейерштрасса: Любая ассоциативно-коммутативная конечномерная алгебра без нильпотентных элементов над R изоморфна прямой сумме алгебр R и C.

Будем понимать под системами *невырожденных поличисел* P_n такие системы, в которых нет нильпотентных элементов. Тогда теорема Вейерштрасса позволяет доказать многие положения для невырожденных поличисел более просто, а так же провести классификацию всех таких систем.

В настоящей работе будут изучаться только невырожденные поличисла $P_n \ni A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$, где n – размерность пространства P_n, над полем действительных чисел R.

Любая гиперкомплексная система над полем действительных чисел при задании базиса e_1, e_2, $...e_n$ полностью определяется законом умножения базисных элементов:

$$e_i \cdot e_j = p^l_{ij} \cdot e_l \,, \tag{1}$$

то есть числовым тензором p^l_{ij}.

Если представить, что начало всех переменных векторов $X \in P_n$ находится в одной фиксированной точке, то компоненты таких векторов определяют нам n-мерное координатное пространство:

$$X = x^1e_1 + x^2e_2 + ... + x^ne_n \qquad \leftrightarrow \qquad (x^1, x^2, ...x^n)\,, \tag{2}$$

и тогда в этом координатном пространстве определена бинарная операция:

$$X \cdot Y = Z \qquad \leftrightarrow \qquad x^ix^jp^l_{ij} = z^l\,. \tag{3}$$

Коммутативность поличисел означает, что

$$XY = YX \qquad \Rightarrow \qquad p^l_{ij} = p^l_{ji}\,, \tag{4}$$

а ассоциативность –

$$(XY)Z = X(YZ) \qquad \Rightarrow \qquad p^l_{ij}p^s_{lr} = p^l_{rj}p^s_{li}\,. \tag{5}$$

Пусть ϵ^i – коэффициенты разложения единицы в базисе e_1, e_2, $...e_n$, тогда справедлива следующая формула:

$$\epsilon^ip^l_{ij} = \delta^l_j\,. \tag{6}$$

2 Норма и группа симметрии

Теорема Фробениуса [5]: Любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трех: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов.

Так как алгебра кватернионов не коммутативна, то из теоремы Фробениуса следует, что невырожденные поличисла P_n размерности $n > 2$ всегда содержат делители нуля, то есть найдутся такие числа X, $Y \neq 0$, что

$$XY = YX = 0\,. \tag{7}$$

Поэтому на множестве поличисел размерности больше двух нельзя определить классическое понятие нормы числа, но можно определить близкое понятие, которое следовало бы назвать квазинормой, но мы для краткости будем использовать старый термин.

Если на некотором подмножестве D_n поличисел P_n для любого числа X из этого подмножества задано действительное число $|X|$, причем для любых X, $Y \in D_n$ выполняются следующие три требования:

1. $|X| \geq 0$;
2. если $a > 0$ – действительное число, то $|aX| = a|X|$;
3. $XY \in D_n$ и $|XY| = |X||Y|$

– то будем говорить, что на множестве поличисел P_n задана норма, а D_n – область ее определения.

Непосредственно из теоремы Вейерштрасса следует, что любая система поличисел P_n изоморфна алгебре квадратных диагональных матриц $(k+m) \times (k+m)$, у которых первые k элементов – произвольные действительные числа, а остальные m элементов – комплексные числа, причем

$$k + 2m = n\,. \tag{8}$$

В силу этого неизоморфные системы невырожденных поличисел однозначно определяются (классифицируются) парой действительных чисел, например, k и m, в этом случае размерность пространства определяется формулой (8). Чтобы не изобретать новое обозначение для невырожденных поличисел предлагается использовать старое обозначение для поличисел, но записывать размерность пространства в виде формулы P_{k+2m}, например, $P_{3+2\cdot 4}$, где $k=3$, $m=4$, а размерность пространства $n=11$.

Таким образом, для любой системы невырожденных поличисел существует базис e_1, e_2, $...e_n$, в котором:

$$p^l_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } \ i=j=l=1,2,...,k,k+1,k+3,...,n-1\,, \\ 1, \text{ если } \ j=l=i+1=k+2,k+4,...,n\,, \\ 1, \text{ если } \ i=l=j+1=k+2,k+4,...,n\,, \\ -1, \text{ если } \ i=j=l+1=k+2,k+4,...,n\,, \\ 0, \text{ во всех остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{9}$$

Такой базис будем называть *изотропным.* При алгебраических вычислениях (преобразованиях) удобнее пользоваться именно этим базисом.

Используя числовой тензор p^l_{ij} (1), можно построить много других числовых тензоров, например,

$$q_{ij} = p^l_{is} \cdot p^s_{lj}\,. \tag{10}$$

Для поличисел тензор q_{ij} является симметрическим, так как

$$q_{ij} = q_{ji}\,. \tag{11}$$

Построим этот тензор в базисе (9):

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & -2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 2 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

то есть в базисе (9) компоненты тензора q_{ij} образуют диагональную матрицу, у которой первые k элементов равны 1, а остальные $2m$ элементов заполняют главную диагональ парами $\{2,-2\}$. Отсюда следует, что в любой системе координат в алгебре невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$

$$det(q_{ij}) \neq 0\,, \tag{13}$$

а значит можно построить дважды контравариантный тензор q^{ij} такой, что

$$q^{il}q_{lj} = q_{jl}q^{li} = \delta^i_j\,. \tag{14}$$

Ранее [6] именно условие (13) мы использовали в качестве определения невырожденности поличисел.

Итак, справедливо следующее утверждение: если алгебра поличисел P_n не имеет нильпотентных элементов, то $det(q_{ij}) \neq 0$.

Введем обозначение

$$H_r \equiv P_{r+2\cdot 0}\,. \tag{15}$$

Алгебра поличисел H_r изоморфна алгебре действительных квадратных диагональных матриц $r \times r$. Если мы рассмотрим H_r над полем комплексных чисел, то получим алгебру H_r^C, которая изоморфна алгебре комплексных квадратных диагональных матриц $r \times r$, поэтому

$$P_{k+2m} = H_k \oplus H_m^C\,. \tag{16}$$

Очевидно, что норма на множестве P_{k+2m} определяется формулой

$$|X| = \sqrt[n]{x^1...x^k\,[(x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2]\,...\,[(x^{n-1})^2 + (x^n)^2]}\,, \tag{17}$$

а область, где норма определена, задается неравенством

$$x^1x^2...x^k \geq 0\,. \tag{18}$$

В ковариантной форме записи норма приобретает вид

$$|X| = \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 ... i_n} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_n}}\,, \tag{19}$$

где метрический тензор $g_{i_1 i_2 ... i_n}$ не меняется при любой перестановке индексов, то есть является симметрическим.

Учитывая, что в изотропном базисе тензор p^l_{ij} определяется формулой (9), получим в этом базисе

$$|X|^n = det(x^i p^l_{ij})\,, \tag{20}$$

но справа в этой формуле стоит величина, которая не изменяется при переходе от одного базиса к другому, поэтому формула (20) верна в любом базисе.

Группой симметрии $G_1(P_{k+2m})$ пространства P_{k+2m} будем называть непрерывную группу линейных преобразований этого пространства, которые не меняют норму любого числа, для которого норма существует. Индекс "1" имеет важный смысл, ниже будет показано, что группа симметрии изоморфна множеству унимодулярных поличисел.

Непосредственно из формулы (17) следует, что группа $G_1(P_{k+2m})$ состоит из двух видов преобразований: эллиптических поворотов и гиперболических поворотов, под последними мы понимаем одновременное растяжение по одним координатам и обязательно сжатие по другим, при выполнении некоторого специального условия.

Эллиптические повороты осуществляются матрицами вида:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Здесь матрица поворота

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix} \tag{22}$$

осуществляет правый эллиптический поворот в плоскости (x^i, x^{i+1}), где $i = k+1, k+3, ..., n-1$, на действительный угол φ_i. Всего таких коммутирующих между собой поворотов равно m.

Гиперболические повороты осуществляются матрицами вида

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} e^{\varepsilon_1} & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & e^{\varepsilon_i} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & e^{\varepsilon_{i+1}} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & e^{\varepsilon_{n-1}} & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & e^{\varepsilon_n} \end{pmatrix} . \tag{23}$$

где ε_j – действительные числа, при $i = k+1, k+3, ..., n-1 \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$, причем

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2} + ... + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = 0 \,. \tag{24}$$

Последнее условие как раз и превращает совокупность растяжений и сжатий в гиперболические повороты. Итак, число независимых гиперболических поворотов (23) равно $k+m-1$, все они коммутируют между собой и с эллиптическими поворотами (21).

Таким образом, группа симметрии $G_1(P_{k+2m})$ является абелевой непрерывной $(n-1)$ параметрической группой Ли, поскольку

$$m + (k+m-1) = k + 2m - 1 = n - 1 \,.$$

3 Скалярное полипроизведение

Определим в пространстве P_{k+2m} скалярное полипроизведение от $n \equiv k+2m$ аргументов следующим образом:

$$(A, B, ..., C) = g_{ij...l} a^i b^j ... c^l \,. \tag{25}$$

Здесь $g_{ij...l}$ – метрический тензор, который фигурирует в формуле (19), $A, B, ..., C$ – произвольные поличисла. Такое скалярное полипроизведение не изменяется при любой перестановке аргументов; по каждому из аргументов оно линейно, то есть, например для первого аргумента справедлива формула

$$(\alpha A + \delta D, B, ..., C) = \alpha(A, B, ..., C) + \delta(D, B, ..., C) \,, \tag{26}$$

где α, δ – произвольные действительные числа. Если

$$(X, X, ..., X) \geq 0 \,, \tag{27}$$

то для поличисла X определена норма $|X|^n$, причем

$$|X|^n = (X, X, ..., X) \,. \tag{28}$$

Для того, чтобы поличисло $A \neq 0$ являлось делителем нуля, то есть существовало такое поличисло $B \neq 0$, что $A \cdot B = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(A, A, ..., A) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |A|^n = 0 \,. \tag{29}$$

Последнее утверждение очевидно выполняется в базисе (9), а так как значение скалярного полипроизведения не зависит от выбора базиса, то оно справедливо всегда.

Рассмотрим в координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ прямую, которая проходит через некоторую точку A, не проходит через начало координат и имеет направляющий вектор B, тогда вектор $X = A + B\tau$, где τ – некий действительный параметр, соединяет начало координат с переменной точкой X на прямой. Потребуем, чтобы

$$\frac{d}{d\tau}|X|^n = 0\,, \tag{30}$$

и найдем вектор X_*, для которого выполняется это необходимое условие экстремума. Из (30) получим

$$(X_*, X_*, ..., X_*, B) = 0\,. \tag{31}$$

В евклидовой геометрии вектор X_*, для которого выполняется условие (30), является ортогональным направляющему вектору B, то есть прямой.

Будем говорить, что поличисло (вектор) B *трансверсально* поличислу (вектору) A, если

$$(A, A, ..., A, B) = 0\,. \tag{32}$$

Если поличисло B трансверсально поличислу A, то, вообще говоря, из этого не следует, что поличисло A трансверсально поличислу B. Взаимность трансверсальности автоматически следует только для невырожденных поличисел размерности два, то есть только для комплексных и гиперболических (двойных) чисел.

Если в пространстве P_{k+2m} существует базис, каждый элемент которого трасверсален всем остальным и имеет норму равную 1, то такой базис будем называть "ортонормированным".

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – "ортонормированный" базис, а A – произвольное поличисло, то есть

$$A = a^1 e_1 + a^2 e_2 + ... a^n e_n\,. \tag{33}$$

Рассмотрим скалярное произведение $(e_i, e_{i_-}, ..., e_{i_-}, A)$ ($i_- \equiv i$, но по этим индексам не ведется суммирование), используя свойство (26) и определение "ортонормированного" базиса, получим

$$a^i = (e_i, e_{i_-}, ..., e_{i_-}, A)\,. \tag{34}$$

Как видим, эта формула аналогична формуле для получения координат вектора через скалярное произведение в ортонормированном базисе евклидовых пространств.

4 Перманенты

Число аргументов в скалярном полипроизведении равно размерности пространства n, поэтому при $n > 3$ вычисление таких величин представляет определенные трудности. В данном разделе мы опишем удобный алгоритм вычисления скалярных полипроизведений.

Пусть

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & ... & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & ... & x^2_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & ... & x^n_{(n)} \end{pmatrix} \tag{35}$$

– некоторая числовая матрица, элементами которой являются действительные или комплексные числа. Такая индексация элементов матрицы введена специально, чтобы легче было в дальнейшем строить такие матрицы из координат поличисел.

Под перманентом [7] $per(\hat{A})$ матрицы A будем понимать число, полученное следующим образом:

$$per(x^i_{(j)}) \equiv \begin{vmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & ... & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & ... & x^2_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & ... & x^n_{(n)} \end{vmatrix}_+ = \sum_{(1,2,...,n)} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} ... x^{i_n}_{(n)} \,, \tag{36}$$

где суммирование идёт по всевозможным подстановкам $(1, 2, ..., n)$ вместо индексов $(i_1, i_2, ..., i_n)$.

Свойства перманентов и алгоритм их вычисления сформулируем аналогично свойствам и алгоритму вычисления определителей.

1. Перманент квадратной $n \times n$ матрицы $\hat{X} = (x_{ij})$ есть сумма $n!$ произведений элементов матрицы $\hat{X}$, причём в каждом таком произведении присутствует один и только один элемент из каждой строки и каждого столбца.

Из этого свойства непосредственно следуют ряд других свойств перманентов.

2. Перманент от транспонированной матрицы равен перманенту от исходной матрицы,

$$per(\hat{X}^T) = per(\hat{X}) \,. \tag{37}$$

То же самое можно переформулировать по-другому.

3. Если какое-то утверждение или свойство справедливо для столбцов перманента, то оно справедливо и для его строк, и наоборот.

Это позволяет формулировать многие утверждения или свойства только в одном экземпляре – только для столбцов, что мы и сделаем.

4. Если у матрицы имеется столбец, состоящий из одних нулей, то перманент этой матрицы равен нулю.

5. Если какой-нибудь столбец матрицы имеет общий множитель, то его можно вынести за знак перманента.

6. Если какой-нибудь столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ можно представить как сумму двух столбцов, то перманент матрицы есть сумма двух перманентов:

$$per(\hat{X}) = per(\hat{X}_1) + per(\hat{X}_2) \,, \tag{38}$$

где матрица $\hat{X}_1$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на первый столбец, а матрица $\hat{X}_2$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на второй столбец.

Из последних двух свойств следует более общее утверждение.

7. Пусть столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ есть линейная комбинация любого количества столбцов:

$$x_i = \alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i + ... + \gamma \cdot c_i + ... \,, \tag{39}$$

где α, β, ..., γ, ... – действительные числа. Тогда

$$per(\hat{X}) = \alpha \cdot per(\hat{X}_a) + \beta \cdot per(\hat{X}_b) + ... + \gamma \cdot per(\hat{X}_c) + ... \,. \tag{40}$$

Матрицы $\hat{X}_a$, $\hat{X}_b$, ... , $\hat{X}_c$, ... получаются из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на столбцы a, b, ... , c, ... соответственно.

Обратимся опять к определению перманента:

$$per(\hat{X}) \equiv \sum_{(1,2,...,n)} x_{i_1 1} x_{i_2 2} ... x_{i_n n}\,. \tag{41}$$

Выделим в сумме, стоящей справа, все слагаемые, содержащие некоторый элемент x_{ij} матрицы $\hat{X}$, и вынесем его за скобки. В скобках останется сумма из $(n-1)!$ слагаемых, каждое из которых будет содержать по одному элементу из каждой строки, кроме строки i, и каждого столбца, кроме столбца j, матрицы $\hat{X}$, то есть это будет перманент, обозначим его X_{ij}, матрицы $(n-1)\times(n-1)$, которая получается из матрицы $\hat{X}$ вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца. Будем называть X_{ij} алгебраическим дополнением элемента x_{ij}. Проделаем описанную выше процедуру для каждого элемента некоторого выделенного столбца и получим алгоритм вычисления перманента n-го порядка через перманенты $(n-1)$-го порядка.

8. Формула разложения перманента по фиксированному столбцу:

$$per(\hat{X}) = x_{1j} X_{1j_-} + x_{2j} X_{2j_-} + ... + x_{nj} X_{nj_-}\,. \tag{42}$$

Здесь индекс $j_- \equiv j$, но по этим индексам нет суммирования.

9. С помощью процедуры разложения перманента по столбцу вычисление любого перманента n-го порядка всегда можно свести к вычислению перманентов второго или третьего порядка, которые вычисляются аналогично тому, как вычисляются обыкновенные определители, но без знаков минус:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_+ = ad + cb\,, \tag{43}$$

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & d \\ \beta & b & \gamma \\ e & \delta & c \end{vmatrix}_+ = abc + \alpha\gamma e + \beta\delta d + ebd + \beta\alpha c + \delta\gamma a\,. \tag{44}$$

Формула разложения перманента по столбцу является частным случаем более общей формулы разложения перманента по нескольким столбцам. Обозначим через $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ перманент матрицы, элементами которой являются элементы матрицы $\hat{X}$, стоящие на пересечении строк $i_1 < i_2 < ... < i_k$ и столбцов $j_1 < j_2 < ... < j_k$, причём $1 \le k \le (n-1)$. Будем называть $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ минором, а дополнительным минором $\bar{M}_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ к $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ будем называть перманент от матрицы, полученной из матрицы $\hat{X}$ вычеркиванием тех же самых строк $i_1 < i_2 < ... < i_k$ и столбцов $j_1 < j_2 < ... < j_k$.

10. Справедлива следующая формула разложения перманента по k столбцам, $1 \le k \le (n-1)$:

$$per(\hat{X}) = \sum_{i_1<i_2<...<i_k} M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k} \bar{M}_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}\,, \tag{45}$$

где суммирование идёт по всевозможным выборкам k строк из n при обязательном выполнении неравенств $i_1 < i_2 < ... < i_k$, номера столбцов $j_1, j_2, ..., j_k$ фиксированы и по ним суммирование не ведётся.

Приведём пример такого разложения перманента четвертого порядка по двум первым столбцам:

$$
\begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 & u^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^3 & u^3 \\ z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^2 & u^2 \\ z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ +
$$
$$
+ \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^2 & u^2 \\ z^3 & u^3 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^1 & u^1 \\ z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ + \tag{46}
$$
$$
+ \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^1 & u^1 \\ z^3 & u^3 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} x^3 & y^3 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^1 & u^1 \\ z^2 & u^2 \end{vmatrix}_+ .
$$

Следующие три свойства 11 – 13 являются следствиями свойства 8, формулы разложения перманента по столбцу или строке.

11. Перманент от диагональной матрицы равен произведению её элементов на главной диагонали.

12. Перманент от матрицы, у которой отличные от нуля элементы стоят на побочной диагонали, равен произведению этих элементов.

13. Перманент от треугольной матрицы, то есть матрицы, у которой выше или ниже главной диагонали (или побочной диагонали) все элементы нули, равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали (или побочной диагонали).

14. Если у перманента поменять местами два столбца, то перманент не изменит своё значение.

Из этого свойства следует более общее правило.

15. При любой перестановке столбцов перманента его значение не меняется.

16. Перманент от матрицы $n \times n$, у которой все элементы единицы, равен $n!$.

17. Перманент от матрицы $n \times n$, у которой все столбцы одинаковые, равен произведению $n!$ на произведение всех элементов одного столбца.

18. Перманент от матрицы $\hat{X}$ $(n \times n)$, которая состоит из $(n-1)$ одинаковых столбцов с элементами $x_1, x_2, ..., x_n$ и одного, вообще говоря, другого столбца с элементами $x'_1, x'_2, ..., x'_n$, вычисляется по формуле

$$
per(\hat{X}) = (n-1)! \cdot (x'_1 x_2 ... x_n + x_1 x'_2 ... x_n + ... + x_1 ... x_{n-1} x'_n) \, , \tag{47}
$$

или, если все $x_i \neq 0$, эту формулу можно переписать следующим образом:

$$
per(\hat{X}) = (n-1)! \cdot x_1 x_2 ... x_n \left(\frac{x'_1}{x_1} + \frac{x'_2}{x_2} + ... + \frac{x'_n}{x_n} \right) . \tag{48}
$$

19. Если n – нечётно, то перманент от антисимметрической матрицы равен нулю.

20. Пусть числа $X_1, X_2, ..., X_n \in H_n \equiv P_{n+2\cdot 0}$, тогда скалярное полипроизведение векторов, соответствующих этим поличислам, вычисляется по формуле

$$
(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}) = \frac{1}{n!} \cdot per(\hat{A}) \, , \tag{49}
$$

где матрица $\hat{A}$ строится из координат $x^i_{(j)}$, указанных векторов в изотропном базисе по формуле (35), так как справа стоит симметрическая полилинейная форма от координат n векторов, причем, если все эти векторы равны между собой, то

$$
\frac{1}{n!} \cdot per(\hat{A}) = x^1 x^2 ... x^n \, . \tag{50}
$$

Если числа $X_1, X_2, ..., X_n \in P_{n+2\cdot m}$, $m \neq 0$, то формула (49) также имеет место, но матрицу $\hat{A}$ следует строить следующим образом:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & ... & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & ... & x^2_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^k_{(1)} & x^k_{(2)} & ... & x^k_{(n)} \\ x^{k+1}_{(1)} + ix^{k+2}_{(1)} & x^{k+1}_{(2)} + ix^{k+2}_{(2)} & ... & x^{k+1}_{(n)} + ix^{k+2}_{(n)} \\ x^{k+1}_{(1)} - ix^{k+2}_{(1)} & x^{k+1}_{(2)} - ix^{k+2}_{(2)} & ... & x^{k+1}_{(n)} - ix^{k+2}_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^{n-1}_{(1)} + ix^{n}_{(1)} & x^{n-1}_{(2)} + ix^{n}_{(2)} & ... & x^{n-1}_{(n)} + ix^{n}_{(n)} \\ x^{n-1}_{(1)} - ix^{n}_{(1)} & x^{n-1}_{(2)} - ix^{n}_{(2)} & ... & x^{n-1}_{(n)} - ix^{n}_{(n)} \end{pmatrix}, \tag{51}$$

где $i \cdot i = -1$. Перманент от такой матрицы $\hat{A}$ является действительным числом, так как при комплексном сопряжении у матрицы $\hat{A}$ (51) меняются местами m пар строк, а как мы знаем, перманент при этом не изменяет своего значения. Таким образом, $R \ni per(\hat{A})$ – это полилинейная форма от действительных координат n векторов $X_1, X_2, ..., X_n \in P_{n+2\cdot m}$, $m \neq 0$, причем, если все векторы одинаковы и равны X, то

$$per(\hat{A}) = n! \cdot x^1 x^2 ... x^k \cdot \left[(x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2\right] ... \left[(x^{n-1})^2 + (x^n)^2\right], \tag{52}$$

поэтому скалярное полипроизведение произвольных векторов $X_1, X_2, ..., X_n \in P_{n+2\cdot m}$ можно вычислить по формуле

$$(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{1}{n!} \cdot per(\hat{A}), \tag{53}$$

где матрица $\hat{A}$ составляется по формуле (51).

Подчеркнем, что все приведенные выше соотношения между скалярными полипроизведениями и перманентами имеют место только в изотропном базисе (9).

5 Длина отрезка кривой в пространстве $P_{k+2\cdot m}$

Зададим в координатном пространстве $P_{k+2\cdot m}$ в базисе (9) некоторую кривую

$$x^i = x^i(\tau), \qquad \tau \in [\tau_1, \tau_2], \tag{54}$$

при $\tau = \tau_1$ кривая проходит через точку A, а при $\tau = \tau_2$ – через точку B, причем все бесконечно малые векторы смещения вдоль кривой с координатами

$$dx^i = \dot{x}^i(\tau) d\tau \tag{55}$$

измеримы, то есть для них определена норма. Тогда естественно определить длину отрезка кривой между двумя точками A и B как интеграл

$$l_{AB} = \int\limits_A^B \sqrt[n]{dx^1 ... dx^k \left[(dx^{k+1})^2 + (dx^{k+2})^2\right] ... \left[(dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2\right]}, \tag{56}$$

или

$$l_{AB} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt[n]{\dot{x}^1 ... \dot{x}^k \, [(\dot{x}^{k+1})^2 + (\dot{x}^{k+2})^2] ... [(\dot{x}^{n-1})^2 + (\dot{x}^n)^2]} \cdot d\tau \,. \tag{57}$$

Таким образом, если $n = k + 2 \cdot m > 2$, то пространство $P_{k+2\cdot m}$ не является ни евклидовым, ни псевдоевклидовым. Это метрическое плоское финслерово пространство [8] с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt[n]{dx^1 ... dx^k \, [(dx^{k+1})^2 + (dx^{k+2})^2] ... [(dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2]} \,, \tag{58}$$

где $L(dx) \equiv L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$, инвариантной относительно группы $G_1(P_{k+2\cdot m})$.

Определим величины p_i (обобщенные импульсы) следующим образом:

$$p_i = \frac{\partial L(dx)}{\partial (dx^i)} \equiv \frac{\partial L(\dot{x})}{\partial (\dot{x}^i)} \,. \tag{59}$$

Эти величины связаны функциональным соотношением

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n) = 0 \,, \qquad \text{или} \qquad \Phi(p) = 0 \,, \tag{60}$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы. Для метрической функции (58) тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид:

$$p_1 p_2 ... p_k (p_{k+1}^2 + p_{k+2}^2)(p_{k+3}^2 + p_{k+4}^2) ... (p_{n-1}^2 + p_n^2) - \frac{4^m}{n^n} = 0 \,. \tag{61}$$

Пусть в координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ заданы две финслеровы геометрии, причём между метрическими функциями $L(dx; x)$ и $L'(dx; x)$ этих геометрий имеет место соотношение

$$L'(dx; x) = \kappa(x) \cdot L(dx; x) \,, \tag{62}$$

где $\kappa(x) > 0$ – некоторая функция, коэффициент растяжения-сжатия, зависящий от точки пространства. Тогда такие геометрии называются конформно связанными [9].

Финслерова геометрия, конформно связанная с геометрией (58), в каждой точке имеет касательное пространство изоморфное поличисловому пространству $P_{k+2\cdot m}$, а тангенциальное уравнение индикатрисы в таком пространстве имеет вид:

$$p_1 p_2 ... p_k (p_{k+1}^2 + p_{k+2}^2)(p_{k+3}^2 + p_{k+4}^2) ... (p_{n-1}^2 + p_n^2) - \frac{4^m}{n^n} \kappa^n(x) = 0 \,. \tag{63}$$

Напомним [8], что если известно тангенциальное уравнение индикатрисы

$$\Phi(p; x) = 0 \,, \tag{64}$$

то каноническая система дифференциальных уравнений для определения экстремалей (геодезических) записывается следующим образом:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda(p; x) \,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \cdot \lambda(p; x) \,, \tag{65}$$

где $\lambda(p; x) > 0$ – произвольная скалярная функция.

Для финслерова пространства, конформно связанного с пространством $P_{k+2\cdot m}$ с тангенциальным уравнением индикатрисы (63), частные производные от функции $\Phi(p;x)$ определяются формулами:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_i} = \begin{cases} \dfrac{4^m}{n^n}\cdot\dfrac{\kappa^n}{p_i}\,, & i=1,2,...,k\,, \\[2ex] \dfrac{4^m}{n^n}\cdot\kappa^n\dfrac{2p_i}{p_i^2+p_{i+1}^2}\,, & i=k+1,k+3,...,n-1\,, \\[2ex] \dfrac{4^m}{n^n}\cdot\kappa^n\dfrac{2p_i}{p_{i-1}^2+p_i^2}\,, & i=k+2,k+2,...,n\,; \end{cases} \tag{66}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} = -\frac{4^m}{n^{n-1}}\cdot\kappa^{n-1}\frac{\partial\kappa}{\partial x^i}\,. \tag{67}$$

Подставив эти производные в уравнения (65), получим систему дифференциальных уравнений для определения экстремалей в пространстве $P_{k+2\cdot m}$.

6 Экспоненциальное представление чисел $P_{k+2\cdot m}$

Под экспоненциальной функцией $\exp(X)$ от поличисла $X\in P_{k+2\cdot m}$ будем понимать ряд

$$\exp(X) = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + ... + \frac{1}{s!}X^s + ...\,, \tag{68}$$

а под экспоненциальным представлением числа $X\in P_{k+2\cdot m}$, если у этого числа имеется норма $|X|$ – запись этого числа в виде

$$X = |X|\cdot\exp(\varphi_2E_2+\varphi_3E_3+...+\varphi_nE_n)\,, \tag{69}$$

где $\varphi_2,\varphi_3,...\varphi_n$ – действительные числа, а $E_1\equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ – некий специальный базис, в котором такая запись возможна.

Только в единственной алгебре поличисел, алгебре комплексных чисел любое неравное нулю число имеет экспоненциальное представление. В общем случае для алгебры $P_{k+2\cdot m}$ экспоненциальное представление возможно только при выполнении некоторых условий, одним из которых является условие

$$(X,X,...,X) > 0\,. \tag{70}$$

Докажем это утверждение, предположив, что мы уже построили такой базис, а затем явно его построим. Рассмотрим множество унимодулярных чисел, то есть чисел $A\in P_{k+2\cdot m}$, у которых $|A|=1$. Такие числа имеют вид

$$A = \exp(\alpha_2E_2+\alpha_3E_3+...+\alpha_nE_n)\,. \tag{71}$$

Тогда множество преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$ вида

$$X\to X'\,,\qquad X' = A\cdot X \tag{72}$$

образуют группу линейных преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$, сохраняющих модули всех чисел, у которых модуль определен, так как

$$|X'| = |A|\cdot|X| \qquad\Rightarrow\qquad |X'| = |X|\,. \tag{73}$$

Кроме того, эта группа $n-1$ параметрическая. Выше мы построили преобразования этой группы в координатном пространстве и обозначили ее символом $G_1(P_{k+2\cdot m})$. Таким образом, эта группа есть группа унимодулярных поличисел.

Все эти рассуждения дают нам алгоритм построения базисных элементов E_2, E_3, ... , E_n: они должны быть генераторами данной абелевой группы Ли. Это позволяет нам построить базис $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ из изотропного базиса (9), если $k \neq 0$, например, так:

$$\left.\begin{aligned} &E_1 = e_1 + e_2 + ... + e_k + e_{k+1} + e_{k+3} + ... + e_{n-1}\,, \\ &E_2 = e_1 - e_2\,, \\ &E_3 = e_1 - e_3\,, \\ &\qquad . \quad . \quad . \\ &E_k = e_1 - e_k\,, \\ &E_{k+1} = 2e_1 - e_{k+1}\,, \\ &E_{k+2} = e_{k+2}\,, \\ &E_{k+3} = 2e_1 - e_{k+3}\,, \\ &E_{k+4} = e_{k+4}\,, \\ &\qquad . \quad . \quad . \\ &E_{n-1} = 2e_1 - e_{n-1}\,, \\ &E_{k+2} = e_n\,. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Используя числа E_2, E_3, ... , E_n в качестве генераторов группы, получим все преобразования (21), (23).

Базис $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ (74) не единственный, в котором имеет место экспоненциальное представление (69). Любой другой такой базис получается из базиса (74) произвольным линейным невырожденным преобразование элементов $E_2, E_3, ..., E_n$.

Таким образом, при выборе базиса, который допускает экспоненциальное представление числа, имеется $(n-1)^2$ параметрический произвол, который можно использовать, например, чтобы сделать базис "ортонормированным" или чтобы добиться выполнения какого либо другого необходимого свойства.

Выясним, в каком случае поличисло X (2) может быть представлено в экспоненциальном виде (69). Для этого внесём $|X|$ под экспоненту, тогда под экспонентой окажется некоторое поличисло Y. Запишем число Y в изотропном базисе, координаты этого числа в изотропном базисе обозначим y^i. Тогда, используя свойства изотропного базиса, получим

$$\begin{aligned} X = \exp(Y) = &\ \exp(y_1)e_1 + \exp(y_2)e_2 + ... + \exp(y_k)e_k + \\ + &\ \exp(y_{k+1})\cos(y_{k+2})e_{k+1} + \exp(y_{k+1})\sin(y_{k+2})e_{k+2} + ... \\ + &\ \exp(y_{n-1})\cos(y_n)e_{n-1} + \exp(y_{n-1})\sin(y_n)e_n\,. \end{aligned} \tag{75}$$

Таким образом, для того чтобы поличисло $X \in P_{k+2\cdot m}$, имело экспоненциальное представление, необходимо и достаточно, чтобы его координаты x^i в изотропном базисе удовлетворяли следующим условиям:

$$\left.\begin{gathered} x^1 > 0,\ x^2 > 0,\ ...,\ x^k > 0, \\ (x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2 \neq 0,\ (x^{k+3})^2 + (x^{k+4})^2 \neq 0,\ ...,\ (x^{n-1})^2 + (x^n)^2 \neq 0\,. \end{gathered}\right\} \tag{76}$$

7 Функции переменной $P_{k+2\cdot m}$

Пусть пока $e_1, e_2, ..., e_n$ – произвольный базис в пространстве $P_{k+2\cdot m}$. Функцией переменной $X = x^1 e_1 + ... + x^n e_n \in P_{k+2\cdot m}$ называется функция $F(X) \in P_{k+2\cdot m}$, такая, что

$$F(X) = f^1(x^1, ..., x^n)e_1 + f^2(x^1, ..., x^n)e_2 + ... + f^n(x^1, ..., x^n)e_n\,, \tag{77}$$

где $f^i(x) \in R - n$ произвольных функций (в дальнейшем мы будем считать их гладкими) от n действительных аргументов.

Рассмотрим дифференциал $dF(X) \equiv F(X + dX) - F(X)$, где $dX \in P_{k+2\cdot m}$ – произвольное бесконечно малое поличисло. Тогда

$$dF(X) = \frac{\partial f^l}{\partial x^i} \cdot dx^i \cdot e_l\,. \tag{78}$$

Если дифференциал $dF(X)$ функции $F(X)$ можно представить в виде

$$dF(X) = F'(X) \cdot dX\,, \tag{79}$$

где $F'(X)$ – некоторая функция переменной $P_{k+2\cdot m}$, то функцию $F(X)$ принято называть аналитической функций [10] поличисловой $P_{k+2\cdot m}$ переменной, а $F'(X)$ – производной этой аналитической функции по той же переменной.

Подставив в эту формулу выражение (78), получим

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^i} = p^l_{ji} f'^j\,. \tag{80}$$

Воспользуемся соотношением (6), тогда из предыдущей формулы следует

$$f'^l = \epsilon^i \frac{\partial f^l}{\partial x^i}\,. \tag{81}$$

Подставив полученное выражение в (80), имеем n^2 соотношений

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^i} = \epsilon^s p^l_{ji} \frac{\partial f^j}{\partial x^s}\,, \tag{82}$$

из которых независимых не более $n^2 - n$, так как свертка левой и правой части с ϵ^i (компоненты единичного элемента в данном базисе) приводит к n тождествам. Соотношения (82) для функций комплексной переменной принято называть соотношениями Коши-Римана. Сохраним этот термин для функций поличисловой переменной. Если эти соотношения выполняются, то, определив функцию $F'(X)$ с помощью формул (81), приходим к выполнению формулы (79).

Таким образом, мы пришли к следующему результату: для того, чтобы функция $F(X)$ поличисловой переменной была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения Коши-Римана (82).

Непосредственно из определения аналитической функции поличисловой переменной следует:

1) линейная комбинация аналитических функций поличисловой переменной с действительными коэффициентами α и β есть аналитическая функция той же переменной, причем

$$\left[\alpha F_{(1)}(X) + \beta F_{(2)}(X)\right]' = \alpha F'_{(1)}(X) + \beta F'_{(2)}(X)\,;$$

2) поличисловое произведение двух аналитических функций поличисловой переменной есть аналитическая функция той же переменной, причем

$$\left[F_{(1)}(X)\cdot F_{(2)}(X)\right]' = F'_{(1)}(X)F_{(2)}(X) + F_{(1)}(X)F'_{(2)}(X)\,;$$

3) аналитическая функция поличисловой переменной от аналитической функции той же поличисловой переменной есть аналитическая функция все той же поличисловой переменной, причем

$$\left[F_{(1)}(X)\left(F_{(2)}(X)\right)\right]' = F'_{(1)}(Y)\big|_{Y=F_{(2)}(X)}\,F'_{(2)}(X)\,.$$

Общий вид аналитических функций переменной $P_{k+2\cdot m}$ можно найти, работая в изотропном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ с тензором p^l_{ij} (9), но выполнить эту задачу еще проще, если вспомнить, что невырожденные поличисла $P_{k+2\cdot m}$ изоморфны прямой сумме (16) алгебр H_k и H^C_m, то есть алгебре квадратных диагональных комплексных матриц. В этой алгебре любой элемент $\hat{X}$ может быть представлен в виде

$$\hat{X} = x^1\hat{\Psi}_1 + x^2\hat{\Psi}_2 + ... + x^m\hat{\Psi}_{k+m}\,, \tag{83}$$

где $\hat{\Psi}_i$ – действительная квадратная диагональная матрица, у которой единственным отличным от нуля элементом, является i-й, равный единице; x^i $(i = 1, 2, ..., k)$ – k действительных чисел, а x^j $(j = k+1, k+2, ..., k+m)$ – m комплексных чисел. Можно рассматривать матрицы $\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, ..., \hat{\Psi}_{k+m}$ как базис. Тогда

$$\hat{\Psi}_i\hat{\Psi}_j = \tilde{p}^l_{ij}\hat{\Psi}_l\,, \qquad \tilde{p}^l_{ij} = \begin{cases} 1\,, \text{ если } i=j=l\,, \\ 0\,, \text{ во всех остальных случаях}\,, \end{cases} \tag{84}$$

а функции поличисловой переменной в таком представлении имеют вид

$$F(\hat{X}) = f^1(x^1, ..., x^{k+m})\hat{\Psi}_1 + ... + f^{k+m}(x^1, ..., x^{k+m})\hat{\Psi}_{k+m}\,, \tag{85}$$

$f^i \in R$, если $i = 1, 2, ..., k$, и $f^j \in C$, если $j = k+1, k+2, ..., k+m$. Подставим $\tilde{p}^l_{ij}$ в соотношения (80), получим

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^{i-}} = f'^i\,, \tag{86}$$

а все остальные частные производные $\dfrac{\partial f^l}{\partial x^i}$ при $i \neq j$ равны нулю.

Перейдем опять изотропному базису $e_1, e_2, ..., e_n$ (9), в котором поличисловая переменная X имеет n действительных координат $x^1, x^2, ..., x^n$. Тогда произвольная аналитическая функция переменной $P_{k+2\cdot m}$ в изотропном базисе (9) имеет вид

$$\begin{aligned} F(X) = {} & f^1(x^1)e_1 + ... + f^k(x^k)e_k + f^{k+1}(x^{k+1}, x^{k+2})e_{k+1} + \\ & + f^{k+2}(x^{k+1}, x^{k+2})e_{k+2} + ... + f^{n-1}(x^{n-1}, x^n)e_{n-1} + f^n(x^{n-1}, x^n)e_n\,, \end{aligned} \tag{87}$$

где $f^1(x^1), ..., f^k(x^k)$ – произвольные гладкие функции одной действительной переменной, а пары функций

$$\{f^{j_-}(x^{j_-}, x^{j+1}), f^{(j_-+1)}(x^{j_-}, x^{j+1})\}\,, \qquad j \equiv j_- = k+1, k+3, ..., n-1 \tag{88}$$

являются компонентами аналитических функций комплексных переменных $z^j = x^j + i\cdot x^{j+1}$.

Так как аналитические функции комплексной переменной бесконечное число раз дифференцируемы, то аналитическая функция $F(X)$ переменной $P_{k+2\cdot m}$ столько раз дифференцируема, сколько раз дифференцируемы все компоненты $f^1(x^1), ..., f^k(x^k)$.

Итак, в общем случае аналитическая функция $P_{k+2\cdot m}$ переменной однозначно определяется, если заданы k гладких функций одной действительной переменной и m аналитических функций комплексной переменной. В то же время идея сопоставления каждой точке физического координатного пространства взаимно однозначно единственного гиперкомплексного числа входит в противоречие с тем, что при этом физическим процессам будут сопоставляться k гладких функций одной действительной переменной и m аналитических функций комплексной переменной. Как известно [12], аналитическая функция комплексной переменной однозначно определяется заданием на некотором множестве точек в области ее определения, например, на отрезке некоторой кривой, но никак не двумя функциями одной действительной переменной. Для всех элементарных функций одной действительной переменной можно с помощью аналитического продолжения построить однозначно аналитическую функцию комплексной переменной. Последнее свойство выполняется и для аналитических функций $P_{k+2\cdot m}$ переменной. Множество аналитических функций поличисловой переменной, которые получены аналитическим продолжением элементарных функций одной действительной переменной, образуют особый класс, функции из которого можно было бы назвать физическими, так как существуют серьезные основания считать, что именно такие аналитические функции поличисловой переменной будут играть особую роль в физических приложениях.

Используем компоненты аналитической функции $F(X)$ для перехода от системы координат $x^{i'}$, в которой элемент длины в пространстве $P_{k+2\cdot m}$ не зависит от точки пространства, к некоторой криволинейной системе координат x^i, в которой элемент длины финслерова пространства будет зависеть не только от дифференциалов координат, но и от самих координат. Пусть

$$x^{i'} = f^i(x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{89}$$

где f^i – компоненты аналитической функции $F(X)$, штрих у индекса указывает на принадлежность к другой системе координат. Необходимо, чтобы якобиан такого преобразования был конечен и отличен от нуля. Достаточно это проверить в каком-то одном базисе, например, в изотропном. Тогда согласно формулам (80) и (20), получим:

$$\frac{D(f^1, f^2, ..., f^n)}{D(x^1, x^2, ..., x^n)} = (F', F', ..., F') \neq 0\,, \tag{90}$$

где $F'(X)$ – производная аналитической функции $F(X)$ переменной $X \in P_{k+2\cdot m}$. Здесь мы не написали $|F'|^n$ вместо $(F', F', ..., F')$, так как функция $F'(X)$ при этом может не иметь нормы.

Таким образом, преобразование координат (89) или отображение одной области пространства $P_{k+2\cdot m}$ на другую область того же пространства, осуществляемое с помощью компонент аналитической функции $F(X)$, взаимно однозначно в некоторой области, если в этой области скалярное полипроизведение с одним и тем же аргументом, производной $F'(X)$, имеет конечное значение и не равно нулю.

Последнее утверждение и формула (90) показывают, что понятие скалярного полипроизведения, впервые введенного в работе [11], естественным образом возникает при рассмотрении преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$ с помощью аналитических функций $P_{k+2\cdot m}$ переменной и не сводится к понятию нормы и метрики.

Посмотрим как изменится метрическая функция $L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ (58) при таком преобразовании координат или преобразовании самого пространства. Для этого вначале потребуем выполнения условия

$$(F', F', ..., F') > 0\,, \tag{91}$$

тогда у функции F' существует норма

$$|F'| = \sqrt[n]{(F', F', ..., F')}\,.$$

Подставим (89) в (58) и получим ту же метрическую функцию в координатах x^i:

$$L(dx^{1'}, dx^{2'}, ..., dx^{n'}) = |F'(X)| \cdot L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)\,, \tag{92}$$

где слева и справа стоит одна и та же метрическая функция L.

Таким образом, аналитическая функция невырожденной поличисловой переменной осуществляет в финслеровом поличисловом пространстве конформное преобразование координат или конформное преобразование самого пространства, если ее производная имеет отличную от нуля норму. То же самое можно сказать о некоторой области поличислового пространства.

Это же утверждение можно сформулировать несколько иначе.

Пусть финслерова геометрия $L(dx; x)$ конформно связана с финслеровой геометрией $L(dx)$ плоского поличислового пространства $P_{k+2\cdot m}$, то есть

$$L(dx; x) = \kappa(x) L(dx)\,, \tag{93}$$

причем

$$\kappa(x) = |F'(X)| \neq 0\,, \tag{94}$$

где $F'(X)$ – производная, имеющая конечную норму, аналитической функции $F(X)$ поличисловой переменной $P_{k+2\cdot m}$. Тогда геометрия $L(dx; x)$ получается из плоской геометрии $L(dx)$ пространства $P_{k+2\cdot m}$ введением криволинейных координат с помощью компонент аналитической функции $F(X)$, а значит, геометрия $L(dx; x)$ также является плоской.

Итак, в любом поличисловом пространстве P_n размерности $n \geq 3$ имеется бесконечно-параметрическая непрерывная группа конформных преобразований, в то время как в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах размерности $n \geq 3$ непрерывная конформная группа всегда конечно-параметрическая.

8 Пространство гиперкомплексных чисел H_4

Числа $H_4 \equiv P_{4+2\cdot 0}$ изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4. На их примере конкретизируем формулы и результаты, полученные выше. Координаты в изотропном базисе (9) пространства H_4 будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, а сам базис – $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, то есть любое число можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4\,, \tag{95}$$

или четверки действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Бинарная операция поличислового умножения на множестве базисных векторов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ определяется Таб. 1.

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 > 0$, то для числа $X \in H_4$ определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4} > 0\,. \tag{96}$$

Таблица 1:

$\psi_i \cdot \psi_j$	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
ψ_1	ψ_1	0	0	0
ψ_2	0	ψ_2	0	0
ψ_3	0	0	ψ_3	0
ψ_4	0	0	0	ψ_4

Таблица 2:

$\times$	1	j	k	jk
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	k
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

Пространство H_4 является метрическим финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{97}$$

Никакими преобразованиями координат подкоренное выражение в правой части нельзя привести к квадратичному виду, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, определяемую метрической функцией (97), называют иногда метрикой Бервальда-Моора.

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

закон умножения базисных элементов которого определен Таб. 2. Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3\,, \\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3\,, \\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3\,, \\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Базис $1, j, k, jk$ является "ортонормированным" и в нем имеет место экспоненциальное представление чисел.

Для того, чтобы проверить первое утверждение, достаточно вычислить всевозможные скалярные полипроизведения вида (A, B, B, B), где A, B – любые базисные элементы 1, j, k, jk. Покажем, как происходит вычисление таких скалярных полипроизведений на одном примере, а затем приведем результаты вычислений.

Вычислим скалярное полипроизведение (j,k,k,k). Для этого воспользуемся формулой (49) и формулами (98), получим

$$(j,k,k,k) = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{+} . \tag{100}$$

Так как из любой строки можно вынести общий числовой множитель, за знак перманента, вынесем (-1) из второй и третьей строки

$$(j,k,k,k) = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{+} \tag{101}$$

и воспользуемся формулой (48):

$$(j,k,k,k) = 0\,. \tag{102}$$

Действуя аналогичным образом, вычислим скалярные полипроизведения $(A,B,$ $B,B)$, где A,B любые базисные элементы $1,j,k,jk$. Приведем результаты вычислений:

$$\left.\begin{aligned} &(1,1,1,1) = (j,j,j,j) = (k,k,k,k) = (jk,jk,jk,jk) = 1\,,\\ &(1,j,j,j) = (1,k,k,k) = (1,jk,jk,jk) = 0\,,\\ &(j,1,1,1) = (k,1,1,1) = (jk,1,1,1) = 0\,,\\ &(j,k,k,k) = (k,j,j,j) = (j,jk,jk,jk) = 0\,,\\ &(jk,j,j,j) = (k,jk,jk,jk) = (jk,k,k,k) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Таким образом, базис $1,j,k,jk$ является "ортонормированным", а значит коэффициенты разложения числа X в этом базисе могут быть выражены через скалярные полипроизведения следующим образом:

$$X = (X,1,1,1)\cdot 1 + (X,j,j,j)\cdot j + (X,k,k,k)\cdot k + (X,jk,jk,jk)\cdot jk\,. \tag{104}$$

Базисные элементы j,k,jk получаются из базисных элементов E_2,E_3,E_4 (74) с помощью невырожденного линейного преобразования:

$$j = -E_2 + E_3 + E_4\,,\quad k = E_2 - E_3 + E_4\,,\quad jk = E_2 + E_3 - E_4\,. \tag{105}$$

Матрица этого преобразования имеет определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,, \tag{106}$$

поэтому в базисе $1,j,k,jk$ для чисел $X \in H_4$, имеющих отличную от нуля норму $|X| \neq$ 0, возможно экспоненциальное представление:

$$X = |X|\cdot\exp(\alpha j + \beta k + \gamma jk)\,, \tag{107}$$

где α, β, γ – действительные числа, угловые переменные.

Если функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x, то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ в изотропном базисе также определена

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4 \tag{108}$$

и является аналитической функцией H_4 переменной. Применяя эту формулу к экспоненциальному представлению (107), имеем

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4 = e^{\alpha+\beta+\gamma}\psi_1 + e^{\alpha-\beta-\gamma}\psi_2 + e^{-\alpha+\beta-\gamma}\psi_3 + e^{-\alpha-\beta+\gamma}\psi_4\,, \tag{109}$$

откуда находим выражения угловых переменных через координаты числа X в изотропном базисе:

$$\alpha = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^2}{\xi^3\xi^4}\right)\,, \quad \beta = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^3}{\xi^2\xi^4}\right)\,, \quad \gamma = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^4}{\xi^2\xi^3}\right)\,. \tag{110}$$

Формула (109) дает и условия, при выполнении которых число X может быть представлено в экспоненциальном виде:

$$\xi^1 > 0, \quad \xi^2 > 0, \quad \xi^3 > 0, \quad \xi^4 > 0\,.$$

Область, выделяемая в пространстве H_4 этими неравенствами, отождествляется с конусом будущего, если интерпретировать пространство H_4 как четырехмерное пространство-время.

Из формулы (108) следует, что произвольная элементарная функция одной действительной переменной однозначно определяет аналитическую функцию H_4 переменной. Как было отмечено выше, по-видимому, именно такие аналитические функции H_4 переменной будут важны для физических приложений.

Любая аналитическая функция переменной H_4 в изотропном базисе $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ имеет вид

$$F(X) = f^1(\xi^1)\psi_1 + f^2(\xi^2)\psi_2 + f^3(\xi^3)\psi_3 + f^4(\xi^4)\psi_4\,, \tag{111}$$

где f^i – произвольные дифференцируемые функции одной действительной переменной. Если все функции f^i дифференцируемы $r+1$ раз, то все производные функции $F(X)$ переменной H_4 вплоть до r-ой также являются аналитическими функциями. Запись произвольной аналитической функции (111) в "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ (98) имеет более громоздкий вид:

$$\begin{aligned} F(X) = \; & \frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3) + f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)+ \\ & +f^3(x^0-x^1+x^2-x^3) + f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot 1+ \\ & + \frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3) + f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)- \\ & -f^3(x^0-x^1+x^2-x^3) - f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot j+ \\ & + \frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3) - f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)+ \\ & +f^3(x^0-x^1+x^2-x^3) - f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot k+ \\ & + \frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3) - f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)- \\ & -f^3(x^0-x^1+x^2-x^3) + f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot jk\,. \end{aligned} \tag{112}$$

В "ортонормированных" координатах x^0, x^1, x^2, x^3 метрическая функция (97) финслерова пространства H_4 принимает вид

$$L(dx) = [(dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3)\times \\ \times(dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3)]^{1/4}\,. \tag{113}$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням dx^0:

$$L^4(dx) = (dx^0)^4 - 2\,(dx^0)^2\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + 8\,dx^0dx^1dx^2dx^3 + \\ + \ (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - 2\left[(dx^1)^2\,(dx^2)^2 + (dx^1)^2\,(dx^3)^2 + (dx^2)^2\,(dx^3)^2\right]\,. \tag{114}$$

Предположим, что

$$dx^\alpha = \varepsilon dx^0\,, \quad \varepsilon \ll 1\,, \tag{115}$$

тогда, если пренебречь членами ε^3 по сравнению с 1, что соответствует в механике пренебрежению членами $\left(\dfrac{v}{c}\right)^3$, где v – скорость частицы, а c – скорость света (нерелятивистское приближение), по сравнению с единицей, для элемента длины $L(dx)$ (113) в пространстве H_4 получим приближенную формулу:

$$L_{H_4}(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{116}$$

Справа в этой формуле стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение.

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского.

9 Заключение

В предлагаемой работе авторы сознательно пошли на существенное сокращение излагаемого материала по сравнению с имеющимся у них, ограничиваясь только теми моментами, смысл, строгость и приложения которых стали для них достаточно прозрачными. Поэтому вне рамок статьи оказались многие интересные, но, к сожалению, не до конца прочувствованные результаты, среди которых обобщение аналитических функций и тесно с ними связанных преобразований. Подобные обобщения, по-видимому, совершенно необходимы, так как претензии при помощи поличисел научиться решать вполне конкретные и достаточно сложные физические задачи смогут реализоваться в полной мере лишь тогда, когда, кроме изометрических и конформных преобразований, будут задействованы преобразования, которые должны быть следующими в цепочке: изометрические, конформные, ...

Авторы искренне благодарят В. М. Чернова за то, что он обратил их внимание на важное значение теоремы Вейерштрасса при классификации и изучении поличисел [13].

Литература

[1] Hamilton W. R. "Lectures on Quaternions", Dublin, 1853

[2] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. Наука. М., 1966.

[3] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Понятия расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (3), 2005, 3 – 15.

[4] Allenby, R. B. J. T., Rings, Fields and Groups: An Introduction to Abstract Algebra, 2nd edition, 1991.

[5] Кантор И. Л., Солодовников А. С., Гиперкомплексные числа, М., "Наука", 1973.

[6] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г., Нормальное сопряжение на множестве поличисел, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (2), 2004, 6 – 14.

[7] Минк Х. Перманенты. Пер. с англ., М., 1982.

[8] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

[9] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука", 1967.

[10] Лаврентьев М. А., Шабат Б. О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., "Наука", 1977.

[11] Павлов Д. Г., Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), 2004, 5 – 19.

[12] Свешников А. Г., Тихонов А. Н., Теория функций комплексной переменной. М., "Наука", 1967.

[13] Чернов В. М., Об определяющих уравнениях для элементов ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр и ассоциированных метрических формах, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (4), 2005, 57 – 74.