

Об аналоге решения Фридмана в финслеровом пространстве-времени с анизотропной метрикой Бервальда - Моора*

Д.Г.Павлов[†], Г.И. Гарасько[‡]

17 апреля 2007 г.

Аннотация

Гиперболические (двойные) числа H_2 во многом напоминают, а в чем-то двойственны обычным комплексным числам C , однако в отличие от последних, естественным обобщением которых до четырехкомпонентной алгебры исторически принято считать некоммутативную алгебру кватернионов Q , H_2 имеют естественное расширение уже на коммутативную алгебру H_4 . Пространство, соответствующее числам H_4 , четырехмерно, и ему может быть сопоставлено пространство событий, только вместо изотропной по пространственным координатам геометрии Минковского оно обладает анизотропной финслеровой геометрией Бервальда - Моора. Оказывается, что для пространств H_2 и H_4 справедливы построения, аналогичные методу комплексного потенциала, когда каждой аналитической функции $F(z)$ ставится в соответствие та или иная физическая интерпретация. На конкретном примере элементарной функции натурального логарифма показывается, что для аналитических функций $F(h_n)$ также удастся ввести естественную физическую интерпретацию как конформно выделенных нелинейных полей в пространстве-времени с финслеровой геометрией. Для четырех измерений поле, которое сопоставляется логарифмической функции $\ln(h_4)$, можно считать аналогом фридмановской модели Вселенной, однако в отличие от той, получающийся в данном случае аналог закона Хаббла оказывается существенно анизотропным и имеет тесную связь с симметрией ромбододекаэдра.

1 Введение

Линейные финслеровы пространства с метрической функцией Бервальда - Моора [1] обладают бесконечномерной группой конформных преобразований [2]. В этом плане они весьма схожи с евклидовой плоскостью. Причем аналогично тому, как конформным преобразованиям евклидовой плоскости сопоставляются алгебра и аналитические функции комплексной переменной z [3], точно также конформным преобразованиям n -мерного пространства с метрикой Бервальда - Моора можно сопоставить алгебру и аналитические функции гиперкомплексной переменной h_n [4]. Поскольку у всех аналитических функций комплексной переменной имеются физические интерпретации (такой метод получил название *метода комплексного потенциала*), возникает закономерный вопрос: нет ли возможности дать физическую интерпретацию и h -аналитическим функциям? В случае положительного ответа на данный

*Основной файл - PavGar8.tex

[†]Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана, geom2004@mail.ru

[‡]ГУП ВЭИ, Россия, 111250, Москва, ул. Красноказарменная 12, 0400, gri9z@mail.ru

вопрос, соответствующий подход обобщился бы до *метода гиперкомплексного потенциала*, и его можно было бы применять не только к многомерным, но, что еще более заманчиво, к нестационарным задачам.

Так как физическое пространство четырехмерно, в качестве основного объекта настоящего исследования взяты гиперкомплексные числа H_4 [5], а в качестве аналитической функции - нелинейная аналитическая функция натуральный логарифм от переменной h_4 . Выбор именно такой h_4 -аналитической функции обусловлен центральной ролью аналогичной функции в теории комплексного потенциала, которой, как известно, ставится в соответствие стационарное поле точечного источника на евклидовой плоскости [6].

В физико-математической литературе существует довольно распространенное заблуждение, что максимальная размерность пространства, которому можно естественным образом сопоставить алгебру невырожденных коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел (поличисел) P_n и теорию аналитических функций P_n переменной, равняется двум. В связи с этим обычно обращаются к теореме Фробениуса, утверждающей, что единственными представителями числовых множеств, обладающими коммутативно-ассоциативными алгебрами с делением - являются поля действительных и комплексных чисел. Одним из следствий данной теоремы является то, что множества чисел H_n , начиная с $n = 2$, обладают алгебрами не с полным, а с частичным делением, то есть содержат в себе, так называемые, *делители нуля* - объекты, не равные нулю, деление на которые не определено, как и на сам нуль. Однако из факта наличия в коммутативно-ассоциативных алгебрах H_n делителей нуля вовсе не следует отсутствие у них аналитических функций, а у тех - естественных физических интерпретаций. Более того, делители нуля не мешают, а способствуют таким интерпретациям, так как этим достаточно необычным числам можно сопоставить точки и направления вдоль светового конуса, являющегося, как известно, одним из важнейших понятий релятивистской физики.

Как ни странно это звучит, но теорема Фробениуса в весьма значительной степени способствовала сегодняшней ситуации, когда у физиков даже и мысли не возникает искать геометрические и физические интерпретации h_4 -аналитических функций. Так в [6] утверждается: "Возможности обобщения алгебры векторов на размерность выше двух чрезвычайно ограничены. В алгебре есть теорема Фробениуса, согласно которой система эллиптических комплексных чисел является единственным (с точностью до изоморфизма) расширением поля действительных чисел с сохранением всех законов сложения и умножения. Если отказаться от переместительного закона, то появляется еще одна возможность - четырехмерные векторы (система кватернионов), а если пожертвовать и сочетательным, то еще одна возможность - восьмимерные векторы (октавы Кели). Других возможностей построить умножение векторов, хорошо сочетающееся со сложением, нет. В частности, нельзя построить и хорошей алгебраической системы для трехмерных векторов." Ясно, что авторы имели ввиду исключительно пространства с квадратичными метриками и совсем не принимали в расчет существование линейных финслеровых пространств с n -арными метрическими формами. Однако, какими бы неявными ограничениями они не руководствовались, существование векторных пространств коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, обладающих финслеровой метрикой, - факт. А значит и вопросы геометрической и физической интерпретации таких чисел и аналитических функций такой числовой переменной становятся первостепенными для развития теоретической физики.

2 Некоторые математические элементы теории гиперкомплексного потенциала

Пусть x^1, x^2, \dots, x^n - финслерово пространство [7] с метрической функцией

$$L(\xi; x) \equiv L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n; x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (1)$$

где $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ - касательное пространство в точке $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ основного пространства. Тогда элемент длины определяется формулой

$$ds = L(dx^1, dx^2, \dots, dx^n; x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (2)$$

а обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L(dx; x)}{\partial(dx^i)} \quad (3)$$

связаны соотношением

$$\Phi(p; x) = 0, \quad (4)$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы. Функцию $\Phi(p; x)$ будем называть функцией Финслера, она, как известно, определяется неоднозначно: с точностью до перехода от тангенциального уравнения (4) к эквивалентному уравнению в той же форме записи. В классических финслеровых пространствах [7] тангенциальному уравнению индикатрисы всегда можно придать некоторую специальную форму

$$\Phi_m(p; x) - 1 = 0, \quad (5)$$

где $\Phi_m(p; x)$ - однородная функция m -го порядка ($m > 0$) по первым n аргументам. Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию геодезических, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x^n}; x \right) = 0. \quad (6)$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение, соответствующее уравнению (6), - уравнением Гамильтона - Якови. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad (7)$$

а траектории движения (мировые линии, линии тока) находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi(p; x)}{\partial p_i} \Big|_{p_k = \frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x), \quad (8)$$

где $\lambda(x) \neq 0$ - некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$, а τ - параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi; x) = \kappa(x)L(\xi; x), \quad (9)$$

где $\kappa(x) > 0$ - некая скалярная функция. Элемент длины в таком пространстве определяется формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x)L(dx; x). \quad (10)$$

Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x) \frac{\partial L(dx; x)}{\partial(dx^i)} \quad (11)$$

связаны соотношением

$$\Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m = 0, \quad (12)$$

то есть функция Финслера конформно связанного пространства определяется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p}; x) = \Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m. \quad (13)$$

Пусть $S_W(x)$ - произвольная скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x \right) > 0, \quad (14)$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной, и полем коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = \sqrt[m]{\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x \right)}, \quad (15)$$

причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических

$$\dot{x}^i = \left. \frac{\partial \Phi_m(\tilde{p}; x)}{\partial \tilde{p}_i} \right|_{\tilde{p}_k = \frac{\partial S_W}{\partial x^k}} \cdot \tilde{\lambda}(x), \quad (16)$$

где $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$ - некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$, а τ - параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ является действием как функцией координат в конформно связанном пространстве.

Если функция $S_W(x)$ удовлетворяет уравнению поля [8], однозначно определенному для такой функции в любом финслеровом пространстве, то функцию $S_W(x)$ будем называть Мировой функцией [9]. Во всяком финслеровом пространстве Мировой функции соответствует лагранжиан, а значит могут быть получены и тензор энергии-импульса, и законы сохранения.

Любое невырожденное поличисловое пространство $P_n \ni X$ является финслеровым, причем любая компонента произвольной аналитической функции $F(X)$ в нем удовлетворяет уравнению поля для Мировой функции $S_W(x)$. Аналитические функции можно перемножать, брать их линейные комбинации, строить функцию от функции, при этом опять будут получаться аналитическая функция. Если не оговорено другое, в качестве Мировой функции в поличисловом пространстве будем брать компоненту $U(x^1, \dots, x^2)$ при единице

$$F(X) = U(x) \cdot 1 + V^1(x) \cdot j_1 + \dots + V^{n-1}(x) \cdot j_{n-1} \quad (17)$$

в базисе $1, j_1, \dots, j_{n-1}$, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел, то есть

$$X = |X| \exp(\alpha^1 \cdot j_1 + \dots + \alpha^{n-1} \cdot j_{n-1}), \quad (18)$$

тогда в этом базисе

$$\ln(X/b) = \ln(|X|/b) \cdot 1 + \dots, \quad (19)$$

где b - действительное число, а $|X|$ - модуль поличисла [4].

3 Пространство двойных чисел H_2

Двойные, или гиперболические числа H_2 , определяются как двумерная линейная алгебра, в которой существует базис $1, j$ со следующими свойствами:

$$H_2 \ni X = x^0 + x^1 \cdot j, \quad 1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad j^2 = 1, \quad (20)$$

где x^0, x^1 - действительные числа.

В качестве потенциала выберем действительную компоненту аналитической функции

$$F(X) \equiv U + j \cdot V = a \cdot \ln(X/b) \equiv \frac{a}{2} \ln \left[\frac{(x^0)^2 - (x^1)^2}{b} \right] + j \cdot \frac{a}{2} \ln \left[\frac{x^0 + x^1}{x^0 - x^1} \right], \quad (21)$$

a, b - действительные числа, то есть

$$U(x^0, x^1) = \frac{a}{2} \ln \left[\frac{(x^0)^2 - (x^1)^2}{b} \right]. \quad (22)$$

Аналитическая функция (21), а значит и потенциал (22), определены в конусе будущего:

$$x^0 > |x^1|. \quad (23)$$

Для того, чтобы записать уравнения (16), которым подчиняются мировые линии материальных объектов, надо определиться с выбором функции Финслера и функции $\lambda(x)$. И хотя наблюдаемые величины не зависят от этого выбора, от него зависит конкретный вид уравнений (16).

Если мы хотим, чтобы формулы (16) напоминали формулы теории комплексного потенциала, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p; x) = p_0^2 - p_1^2 - \kappa^2(x^0, x^1), \quad \lambda(x^0, x^1) = \frac{1}{2} \quad (24)$$

тогда

$$\dot{x}^0 = \frac{\partial U}{\partial x^0}, \quad \dot{x}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x^1}, \quad (25)$$

где $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$, а τ - некий параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции. В этом случае

$$\sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1} \right)^2} \equiv \kappa(x^0, x^1), \quad (26)$$

где $\kappa(x^0, x^1)$ - коэффициент растяжения-сжатия конформного преобразования в пространстве H_2 , которое (преобразование) определяется аналитической функцией (21). Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} = \kappa(x^0, x^1) d\tau.$$

Если мы хотим, чтобы уравнения (16) по форме и физической интерпретации соответствовали формулам СТО, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p; x) = \sqrt{p_0^2 - p_1^2 - \kappa(x^0, x^1)}, \quad \lambda(x^0, x^1) = 1, \quad (27)$$

тогда

$$\dot{x}^0 = \frac{\frac{\partial U}{\partial x^0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}, \quad \dot{x}^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x^1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}, \quad (28)$$

где $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$, а τ - некий параметр вдоль мировой линии. В этом случае

$$\sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2} = 1, \quad (29)$$

то есть в этом случае параметр эволюции суть собственное время, соответствующее мировой линии в пространстве H_2 , умноженное на скорость света. Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} = d\tau.$$

Выбирая формулы (27), для потенциала (22) получим дифференциальные уравнения для определения мировых линий, по которым двигаются материальные объекты:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{x^0}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2}}, \quad \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{x^1}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{x^1}{x^0}. \quad (30)$$

Решениями этой системы уравнений являются мировые линии:

$$(x^0, x^1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \cdot \tau, \quad x^1 = \frac{v}{c} \cdot x^0, \quad (31)$$

где c - скорость света, а v - скорость материального объекта, соответствующего данной мировой линии, конечно, $|v| < c$. Все такие мировые линии являются лучами, исходят из начала отсчета, особой точки потенциала, и расположены в конусе будущего.

Совместим себя с наблюдателем (мировой линией) $v = 0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого значения t_0 . Тогда мы будем наблюдать *удаление* материальных объектов от нас с различными скоростями, зависящими от расстояния до этих объектов. Модуль координаты x^1 будет характеризовать нам истинное пространственное расстояние [10] r до других объектов. Тогда из формул (30) и (31) получим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r}{t_0 + t} = |v|, \quad t \ll t_0 \quad \Rightarrow \quad |v| \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r. \quad (32)$$

Таким образом, мы получили закон Хаббла с коэффициентом Хаббла $H = \frac{1}{t_0}$, что вполне согласуется с формулой, которая получается для этого закона в космологической модели Эйнштейна - де Ситтера [11], где $H = \frac{2}{3t_0}$.

4 Поличисловое пространство H_4

Гиперкомплексные числа H_4 [4] изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4 . Координаты в изотропном базисе пространства H_4 будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, а сам базис - $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, то есть любое число можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4, \quad (33)$$

или четверки действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Бинарная операция поличислового умножения определяется заданием правила умножения для базисных векторов:

$$\psi_i\psi_j = \begin{cases} \psi_i, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (34)$$

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 > 0$, то для числа $X \in H_4$ определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4} > 0. \quad (35)$$

Пространство H_4 является метрическим финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}, \quad (36)$$

которую никакими преобразованиями координат нельзя привести к квадратному корню из дифференциальной квадратичной формы, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, которая определяется метрической функцией (36), называют иногда метрикой Бервальда - Моора [1].

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

закон умножения базисных элементов которого определен Таб. 1. Координаты x^0, x^1 ,

Таблица 1:

\times	1	j	k	jk
1	1	j	k	jk
j	j	1	0	0
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

x^2, x^3 числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3, \\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3, \\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3, \\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Базис $1, j, k, jk$ будем называть "ортонормированным", именно в нем в конусе $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4 > 0$ определено экспоненциальное представление чисел $X \in H_4$.

Если гладкая функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x , то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ также определена и является аналитической, в изотропном базисе она запишется следующим образом:

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4. \quad (39)$$

В "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ та же функция имеет вид:

$$\begin{aligned} F(X) &= \\ &= \frac{1}{4}[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) + F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) + \\ &\quad + F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) + F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot 1 + \\ &\quad + \frac{1}{4}[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) + F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) - \\ &\quad - F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) - F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot j + \\ &\quad + \frac{1}{4}[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) - F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) + \\ &\quad + F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) - F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot k + \\ &\quad + \frac{1}{4}[F(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) - F(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) - \\ &\quad - F(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) + F(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot jk. \end{aligned} \quad (40)$$

В "ортонормированных" координатах x^0, x^1, x^2, x^3 метрическая функция (36) финслерова пространства H_4 принимает вид

$$\begin{aligned} L(dx) &= [(dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3) \times \\ &\quad \times (dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3)]^{1/4}. \end{aligned} \quad (41)$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням dx^0 :

$$L^4(dx) = (dx^0)^4 - 2(dx^0)^2 \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right] + 8 dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 + \\ + (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - 2 \left[(dx^1)^2 (dx^2)^2 + (dx^1)^2 (dx^3)^2 + (dx^2)^2 (dx^3)^2 \right]. \quad (42)$$

Предположим, что

$$dx^\alpha = \varepsilon dx^0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (43)$$

тогда с точностью до членов ε^2 включительно по сравнению с 1 для элемента длины $L_{H_4}(dx)$ в пространстве H_4 получим следующую формулу:

$$L_{H_4}(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}. \quad (44)$$

Справа здесь стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение: координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского.

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством H_4 , в изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \sqrt{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}. \quad (45)$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4} \kappa(\xi) \frac{\sqrt{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}, \quad (46)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0. \quad (47)$$

Выберем в качестве функции $F(x)$ в формуле (39) функцию

$$F(x) = a \ln(x/b), \quad (48)$$

где $a, b > 0$ - действительные параметры. Потенциал - это действительная часть аналитической функции $F(X)$ (40), поэтому

$$U(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) = \frac{a}{4} \ln \left(\frac{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}{b^4} \right). \quad (49)$$

Для нахождения мировых линий [8], которые порождает потенциал (49), необходимо решить систему уравнений (16), которая в нашем конкретном случае принимает вид

$$\dot{\xi}^i = \frac{\frac{\partial U}{\partial \xi^1} \frac{\partial U}{\partial \xi^2} \frac{\partial U}{\partial \xi^3} \frac{\partial U}{\partial \xi^4}}{\frac{\partial U}{\partial \xi^i}} \lambda(\xi), \quad (50)$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$ - некоторая скалярная функция. При соответствующем выборе $\lambda(\xi)$, уравнения принимают более простой вид

$$\dot{\xi}^i = \xi^i. \quad (51)$$

Введем переменную

$$x^0 = \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4), \quad (52)$$

которая в четырехмерном пространстве Бервальда - Моора играет ту же роль, что и координата x^0 в пространстве Минковского, тогда

$$\dot{x}^0 = x^0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi^i}{dx^0} = \frac{\xi^i}{x^0} \quad \Rightarrow \quad \xi^i = \xi_0^i \cdot x^0, \quad (53)$$

где ξ_0^i - постоянные. Таким образом, все мировые линии - лучи, исходящие из начала координат (особой точки потенциала), причем движение материальных тел является равномерным и прямолинейным, поэтому для координат в "ортонормированном" базисе имеют место следующие формулы:

$$x^\mu = v^\mu x^0, \quad \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{x^\mu}{x^0}, \quad (54)$$

где $\mu = 1, 2, 3$, а v^μ - действительные постоянные.

Совместим себя с наблюдателем (мировой линией) $v^\mu = 0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого момента t_0 . Далее можно повторить те же рассуждения, что и в предыдущем разделе, считая, что скорость удаления материальных объектов $|v| = \frac{dr}{dt}$, где r - истинное пространственное расстояние. Тогда мы будем наблюдать *удаление* от нас материальных объектов с различными скоростями, зависящими от истинного пространственного расстояния до объекта. При достаточно малых расстояниях по сравнению с радиусом Вселенной можно предположить, что

$$r \simeq r_{ev} \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \quad (55)$$

и тогда из формул (53) следует обычный закон Хаббла

$$\frac{dr}{dt} \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r, \quad (56)$$

и этот закон не зависит от пространственных направлений.

Если истинное пространственное расстояние в H_4 искать тем же способом, как это обычно делается в СТО и ОТО [10], то в результате получим [12]:

$$r \simeq r_d = |x^\alpha| + |x^\beta|; \quad \text{причем} \quad |x^\gamma| \leq |x^\alpha|, |x^\beta|. \quad (57)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$. В евклидовом пространстве гиперповерхность, определяемая уравнением

$$r_d = const, \quad (58)$$

является ромбододекаэдром [13]. Есть некоторые основания считать, что, по-видимому, истинное пространственное расстояние при приближении к границам Вселенной, может иметь вид (57). В этом случае закон Хаббла принимает вид

$$|v| \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r_d. \quad (59)$$

Если наши представления о пространстве остались евклидовыми, теоретически полученную формулу для закона Хаббла следует переписать следующим образом:

$$|v| \simeq \frac{r_d}{t_0 r_{ev}} \cdot r_{ev}. \quad (60)$$

Тогда коэффициент Хаббла определяется формулой

$$H = \frac{r_d}{t_0 r_{ev}}, \quad (61)$$

и он зависит от пространственных направлений, имея 12 максимумов, 6 минимумов и 8 локальных минимумов, причём

$$\frac{H_{max}}{H_{min}} = \sqrt{2}, \quad \frac{H_{max}^{loc}}{H_{min}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}. \quad (62)$$

Каждый минимум окружен четырьмя максимумами, а каждый локальный минимум - тремя максимумами.

Таким образом, при изменении расстояния до галактик от самых малых до самых больших можно ожидать изменения коэффициента Хаббла в пределах

$$\frac{1}{t_0} \xrightarrow{H} \frac{r_d}{t_0 r_{ev}}, \quad (63)$$

и появление зависимости этого коэффициента от пространственных направлений.

5 Заключение

Самым существенным результатом данной работы авторы считают позитивное решение проблемы распространения на случай многих пространственно-временных измерений методов комплексного потенциала. У физиков и математиков до сих пор бытует устоявшееся мнение, которое сформулировано Лаврентьевым и Шабатом [6]: "Основным математическим аппаратом решения плоских задач и задач с осевой симметрией является теория конформных и квазиконформных отображений. К великому сожалению, в пространстве конформные отображения составляют очень узкий класс (согласно классической теореме Лиувилля они сводятся к сдвигу, растяжению с поворотом и инверсиям относительно сферы), а квазиконформные, хотя их запас и довольно велик - еще сравнительно мало изучены." - и которое (мнение) переносится на все пространства размерности больше двух. Оказывается, переход от классических квадратичных геометрий к финслеровым и к связанным с ними n -арным формам позволяет не только обойти запреты, накладываемые теоремой Лиувилля, но и обобщить сам метод комплексного потенциала, сделав его действительно многомерным, то есть гиперкомплексным.

С другой стороны, тот факт, что многообразия с метрической функцией Бервальда - Моора наравне с чисто пространственными измерениями включают еще и время, позволяет надеяться на решение не только задач статики, но и существенно нестационарных. Рассмотренные примеры с логарифмическим гиперкомплексным потенциалом в двумерном и четырехмерном пространствах с метрикой Бервальда - Моора подтверждают эту надежду, так как, по сути, представляют собой ни что иное, как финслеровы аналоги модели нестационарной Вселенной Фридмана, только теперь в пространстве-времени четырех измерений космологическое решение и в большей степени его восприятие нами оказывается существенно анизотропным.

Учитывая же недавно полученные астрономические данные [14], указывающие на наличие анизотропии коэффициента Хаббла, можно иначе взглянуть и на другое устоявшееся и, по-видимому, ошибочное убеждение, а именно, на уверенность большинства физиков в применимости к релятивистским моделям реального мира исключительно квадратичных метрик. Пространства же невырожденных поличисел P_n при $n > 2$ всегда обладают дополнительной анизотропией по сравнению с квадратичными пространствами той же размерности.

Список литературы

- [1] Богословский Г.Ю. 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(4), (2005), стр. 27 - 43.
- [2] Гарасько Г.И., Обобщение понятия конформных преобразований. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(3), (2005), стр. 16 - 25.
- [3] Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексной переменной. М., "Наука", 1977.
- [4] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(7), Т. 4 (2007).
- [5] Д.Г.Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(1), (2004).
- [6] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., "Наука", 1973.
- [7] Рашевский П.К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М. - Л.: ОГИЗ, 1947.
- [8] Гарасько Г.И., Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(6), Т. 3 (2006), стр. 6 - 20.
- [9] Гарасько Г.И., О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(5), Т. 3 (2006), стр. 3 - 18.
- [10] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц: Теория поля. М., "Наука", 1967.
- [11] К. Меллер: Теория относительности. М., АТОМИЗДАТ, 1975.
- [12] G.Yu. Bogoslovsky, H.F. Goenner, On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, Phys. Lett. A 244 (1998) 222–228.
- [13] G.Yu. Bogoslovsky, H.F. Goenner, Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, Gen. Relativ. Gravit. 31 (1999) 1565–1603.
- [14] McClure M.L., Dyer C.C. Anisotropy in the Hubble constant as observed in the HST Extragalactic Distance Scale Key Project results. arXiv:astro-ph/0703556v1