КВАТЕРНИОННЫЙ АНАЛИЗ И АЛГЕБРОДИНАМИКА

В. В. Кассандров

Институт гравитации и космологии РУДН

vkassan@sci.pfu.edu.ru

Представлен алгебродинамический подход к теории поля и частиц, основанный на нелинейном обобщении условий Коши-Римана на некоммутативные алгебры кватернионного типа. Для комплексных кватернионов такая теория лоренц-инвариантна, обладает естественной калибровочной и твисторной структурой. Точечные и струноподобные сингулярности интерпретируются как частицеподобные объекты, их электрический заряд автоквантован. Представлена новая "причинная геометрия Минковского с фазой", индуцируемая алгеброй бикватернионов. На ее фоне рассматривается самосогласованная алгебраическая динамика сингулярностей ("ансамбля дубликонов").

1 О коммутативном и некоммутативном анализе и алгебродинамике

История открытия и изучения исключительных алгебр типа кватернионов и октонионов, как и многочисленных попыток использования их для "объяснения структуры Мира", полна драматизма и неоправдавшихся до настоящего времени надежд [1, 2]. Библиография только за период XX века по применениям кватернионов в теоретической и математической физике насчитывает тысячи работ [3]. Значительная их часть посвящена проблеме построения кватернионного анализа (теории функций кватернионного переменного), по богатству внутренних свойств и приложений сопоставимого с комплексным анализом. Однако, по мнению большинства современных математиков, эта проблема так до сих пор и не получила решения [4]. Между тем *коммутативный* анализ, т. е. анализ функций, принимающих значение в ассоциативной коммутативной алгебре конечной размерности $n \ge 2$ (не обязательно обладающей делением), был построен еще в конце XIX века Г. Шефферсом [5] "по образу и подобию комплексного анализа" и в настоящее время используется, в частности, в развиваемой Д. Г. Павловым концепции *поличисел* и связанных с ними финслеровых геометрий [6, 7]. Обобщение этого анализа на *суперaлгебры* было реализовано в работах В. С. Владимирова и И. В. Воловича [8].

Принципиальное различие между коммутативным и некоммутативным анализом отмечено еще А. Садбери [9]: некоммутативность стирает различие между "сопряженным" q^* и исходным q элементами алгебры, позволяя выразить их друг через друга, используя постоянные базисные элементы алгебры. Например, в случае алгебры кватернионов Гамильтона $\mathbb{Q}$ для всех $q \in \mathbb{Q}$ имеем (см. [2], p. 121):

$$q^* \equiv -\frac{1}{2}(q + I * q * I + J * q * J + K * q * K), \tag{1.1}$$

где I, J, K – три мнимые единицы алгебры кватернионов. Поэтому определение, по аналогии с комплексным случаем, "кватернионно-аналитической" ("кватернионно-голоморфной") функции как независящей от кватернионно-сопряженного аргумента оказывается лишенным смысла.

С другой стороны, естественное определение "правой" ("левой") производной $F'(Z)$ кватернионной функции $F(Z)$, $F : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$:

$$F' = dF * dZ^{-1} \quad (F' = dZ^{-1} * dF) \tag{1.2}$$

также оказывается непродуктивным, поскольку условие существования и однозначности предела (1.2) (т. е. его независимости от "пути стягивания" к нулю приращения dZ в векторном пространстве $\mathbf{E^4}$ алгебры $\mathbb{Q}$) приводит к существенно переопределенной системе дифференциальных уравнений, оказывающейся совместной лишь для тривиального случая линейной функции (подробнее см., например, [10]). Имеются и другие соображения, убеждающие в трудности построения кватернионного (и вообще некоммутативного) анализа (см., например, [11]).

Тем не менее предпринимались многочисленные попытки обхода этих трудностей, наиболее известной из которых является концепция Фетера [9,11,12]. Во многих работах условия "кватернионной аналитичности" (или их *бикватернионного* обобщения) выписывались формально в виде линейной системы уравнений "максвеллоподобного" типа (вместе с соответствующим ей волновым уравнением как обобщением 2D уравнения Лапласа). Однако все эти попытки, по-видимому, не могут рассматриваться в качестве последовательной версии кватернионного анализа. Если же касаться проблемы построения *неассоциативного* анализа, например над алгеброй октонионов, то подходов к ее решению пока вообще не просматривается (см., впрочем, [10], раздел 10).

Что касается коммутативного анализа, то, как известно, в отмеченном выше подходе Шефферса (его современное изложение см., например, в монографии [13]) вместо определения производной используется требование представления в инвариантной форме *дифференциала* функции алгебраического переменного. Это позволяет распространить подход на все (конечномерные) ассоциативно-коммутативные алгебры $\mathbb{A}$, в том числе и не обладающие делением, в частности на алгебры двойных и дуальных чисел.

А именно, пусть $F(Z)$ – $\mathbb{A}$-значная функция $F : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$ алгебраического переменного $Z \in \mathbb{A}$. Шефферс сформулировал условие ее *дифференцируемости в* $\mathbb{A}$ как условие пропорциональности линейных частей приращений (дифференциалов) dZ, dF независимой переменной и ее функции соответственно,

$$dF = H(Z) * dZ, \tag{1.3}$$

где $H \in \mathbb{A}$, а $(*)$ обозначает операцию умножения в $\mathbb{A}$. Для алгебр с делением условие (1.3), очевидно, эквивалентно условию существования и независимости от "пути стремления" к нулю отношения приращений, т. е. производной $H(Z) = dF * dZ^{-1} \equiv F'(Z)$ и, в частном случае алгебры комплексных чисел $\mathbb{C}$, немедленно приводит к уравнениям Коши-Римана. В общем случае линейные дифференциальные уравнения, связывающие частные производные от компонент $F(Z)$, следуют из (1.3) после исключения компонент $H(Z)$ и вполне аналогичны уравнениям Коши-Римана для функций комплексной переменной. Вообще, во многих аспектах построенный Шефферсом коммутативный анализ воспроизводит двумерный комплексный, так что может быть построен широкий класс $\mathbb{A}$-дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (1.3) и включающий, в частности, произвольные полиномы от $\mathbb{A}$-переменной.

Однако переход от коммутативного случая к некоммутативным ассоциативным алгебрам кватернионного типа все же представляется весьма заманчивым, поскольку такие алгебры $\mathbb{A}$, в отличие от коммутативных, имеют широкую группу непрерывных симметрий, представленных *внутренними автоморфизмами*

$$q \mapsto a * q * a^{-1}, \quad a \in \mathbb{A}, \forall q \in \mathbb{A}, \tag{1.4}$$

сохраняющими закон умножения в $\mathbb{A}$. Для алгебры $\mathbb{Q}$, как известно, группа автоморфизмов есть 2:1 группа 3-мерных вращений $SO(3)$, так что *исключительная алгебра* *кватернионов Гамильтона может рассматриваться как алгебра физического евклидова пространства* $\mathbf{E^3}$. Ее обобщение на поле комплексных чисел – алгебра *бикватернионов* $\mathbb{B}$ – позволяет обеспечить переход к 4-мерному пространству-времени и записать основные соотношения релятивистской теории в компактном виде [14]. Наконец, предложенная автором и изложенная далее в статье версия (би)кватернионного анализа позволила получить нелинейное лоренц-инвариантное обобщение уравнений Коши-Римана и построить лишь на их основе замкнутую теорию поля и частиц – *алгебродинамику*. Изложению этой версии некоммутативного анализа и ее реализации в алгебродинамике и посвящена данная статья.

2 Кватернионная дифференцируемость и конформные отображения

Правильный подход к обобщению подхода Шефферса на алгебры кватернионного типа состоит, по-видимому, в явном учете некоммутативности алгебры $\mathbb{Q}$ в самом определении дифференцируемой функции ее аргумента. А именно, заметим, что в правой части соотношения (1.3) фигурирует инвариантная $\mathbb{A}$-значная дифференциальная 1-форма наиболее общего вида, которая может быть построена с использованием только операций в алгебре $\mathbb{A}$. По этим соображениям в случае, когда $\mathbb{A}$ является некоммутативной (однако по-прежнему ассоциативной), условие (1.3) может быть естественно обобщено на следующее условие $\mathbb{A}$-*дифференцируемости функции* $F(Z)$ (см. [10, 23] и ссылки в этих работах):
$$dF = L(Z) * dZ * R(Z). \tag{2.1}$$
Здесь $L, R : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$ – две т. н. *полупроизводные* функции от $F(Z)$, левая и правая соответственно. Для заданной $F(Z)$, удовлетворяющей (2.1), полупроизводные определены неоднозначно, с точностью до преобразования $L \to \alpha L,\ R \to \alpha^{-1}R$, где функция $\alpha(Z)$ принимает значения в *центре* (коммутативной подалгебре) алгебры $\mathbb{A}$ (для ассоциативных алгебр α, как правило, – это действительное или комплексное число). Таким образом, согласно данному определению, *нахождение функций, дифференцируемых в некоторой некоммутативной ассоциативной алгебре* $\mathbb{A}$ *– это перечисление всех триплетов функций* $\{F(Z), L(Z), R(Z)\}$*, удовлетворяющих условию (2.1)* (с точностью до вышеотмеченной α-эквивалентности полупроизводных).

Для коммутативных алгебр условие (2.1) редуцируется снова к (1.3), в котором теперь "производная" $H(Z)$ образована из "полупроизводных" $H(Z) = L(Z) * R(Z)$. С другой стороны, если в общем некоммутативном случае положим, например, $R(Z) = E$ (предполагая существование единичного элемента E в алгебре $\mathbb{A}$), то приходим снова к условию (1.3) с $H(Z) = L(Z)$. Однако, как уже было отмечено, по меньшей мере для алгебр типа кватернионов это условие является чересчур жестким, поскольку ему удовлетворяют лишь линейные функции вида $F = A * Z + B$, где A, B – некоторые постоянные элементы алгебры (см., например, [9, 15]).

В общем случае условие $\mathbb{A}$-дифференцируемости (2.1) определяет более широкий класс функций. В частности, для алгебры кватернионов Гамильтона $\mathbb{Q}$ условие (2.1) оказывается алгебраическим эквивалентом условия *конформности* отображения $Z \mapsto F(Z)$ в евклидовом пространстве $\mathbf{E^4}$ [24–26]. Действительно, находя кватернионную норму элементов $N^2(q) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ в левой и правой частях соотношения (2.1) и используя соотношение *мультипликативности* нормы

$$N^2(p * q) = N^2(p)N^2(q), \quad \forall p, q \in \mathbb{Q}, \tag{2.2}$$

получим:
$$dl^2 \equiv N^2(dF) = N^2(L * R)N^2(dZ) \equiv \Lambda(Z)ds^2, \tag{2.3}$$

так что каждая $\mathbb{Q}$-дифференцируемая функция действительно определяет некоторое конформное отображение $ds \mapsto dl$ в $\mathbf{E^4}$ с масштабным фактором $\Lambda(Z) = N^2(L * R)$. Заметим, что в этом отношении соотношение (2.1) опять-таки можно рассматривать как естественное обобщение условия комплексной голоморфности.

Известно, однако (т. н. *теорема Лиувилля*, см., например, [16]), что в $\mathbf{E^4}$ конформные отображения образуют конечную 15-параметрическую группу, в отличие от бесконечномерной группы конформных отображений на двумерной комплексной плоскости, реализуемой аналитическими функциями комплексного переменного. Напротив, каждое из конформных отображений в $\mathbf{E^4}$ отвечает некоторой $\mathbb{Q}$-дифференцируемой функции, удовлетворяющей условию (2.1) [10]. Например, для инверсии $F(Z) = Z^{-1}$ имеем $dF = -Z^{-1}{*}dZ{*}Z^{-1}$, т. е. выражение, имеющее форму условия (2.1). Аналогично проверяется соответствующее утверждение и для других независимых конформных преобразований в $\mathbf{E^4}$: трансляций, поворотов и дилатации, а также для произвольных их последовательностей. Иначе говоря, преобразования, определяемые $\mathbb{Q}$-дифференцируемыми функциями, образуют группу, изоморфную конформной группе $\mathbf{E^4}$.

Однако, вследствие конечномерности этой группы для исключительной алгебры с делением $\mathbb{Q}$ класс $\mathbb{Q}$-дифференцируемых функций, определяемых условием (2.1), оказывается все же слишком узким для применений в фундаментальной физике, например для того, чтобы соответствующие функции могли рассматриваться в качестве физических полей. Ситуация существенно меняется в случае некоммутативных алгебр с делителями нуля, в том числе в случае алгебры бикватернионов $\mathbb{B}$ (кватернионов над полем $\mathbb{C}$).

3 Бикватернионная дифференцируемость и уравнение $\mathbb{C}$-эйконала

Мы ограничимся ниже рассмотрением случая полных $N \times N$ матричных алгебр $\mathbb{A} = Mat(N)$ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (при $N = 2$ мы имеем изоморфизм матричной алгебры $Mat(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{B}$ с алгеброй бикватернионов). Для эквивалента кватернионной нормы – *определителя* матрицы дифференциалов dF в левой части соотношения (2.1) – будем иметь

$$\det \|dF\| = \det \|L(Z) * R(Z)\| \det \|dZ\| \equiv \lambda(Z) \det \|dZ\|. \tag{3.1}$$

В случае, когда обе матрицы L, R обратимы, так что $\lambda(Z) \neq 0$, соотношение (3.1) определяет конформное отображение с масштабным множителем $\lambda(Z)$ инфинитезимальной (комплексной или вещественно индефинитной) метрики, представленной определителями в (3.1). В частности, для алгебры $\mathbb{B}$ мы имеем дело с конформными отображениями в комплексифицированном пространстве Минковского $\mathbb{C}\mathbf{M}$.

Наиболее интересным, однако, является случай, когда $\det L = 0$ (или, аналогично, $\det R = 0$); при этом масштабный фактор $\lambda(Z) = 0$, и соотношение (3.1) определяет отображение полного векторного пространства $\mathbb{A}$ в подпространство ее элементов – делителей нуля (в комплексный "световой конус" в случае алгебры $\mathbb{B}$). Такие отображения могут быть названы *вырожденными конформными отображениями*. Они составляют важный и широкий класс: в контексте представленной далее в статье алгебродинамической теории именно такие отображения (дифференцируемые $\mathbb{A}$-функции) отождествляются с физическими полями. В частности, *при комплексификации кватернионов класс дифференцируемых функций и отвечающих им отображений существенно расширяется.*

В $N \times N$ матричном представлении условие дифференцируемости (2.1) в покоординатной записи принимает вид $(A, B, ... = 1, ...N)$:

$$\nabla_{AB} F_{CD} = L_{CA} R_{BD} \tag{3.2}$$

где ∇_{AB} соответствует оператору дифференцирования по координате Z^{AB}. Для какой-то пары фиксированных значений индексов C, D, обозначая $F_{CD} \equiv \Sigma,\ L_{CA} \equiv \phi_A,\ R_{BD} \equiv \psi_B$, имеем вместо (3.2)

$$\nabla_{AB}\ \Sigma = \phi_A \psi_B. \tag{3.3}$$

Детерминант матрицы полупроизводных в правой части уравнения в силу факторной структуры тождественно равен нулю, откуда следует уравнение

$$\det \|\nabla_{AB}\Sigma\| = 0, \tag{3.4}$$

которое с необходимостью выполняется для каждой матричной компоненты $F_{CD} \equiv \Sigma \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ дифференцируемой в $\mathbb{A}$ функции $F(Z)$.

Уравнение (3.4) представляет собой *нелинейный* аналог уравнения Лапласа в комплексном анализе, причем *нелинейность возникает здесь как прямое следствие учета некоммутативности алгебры* в самом определении $\mathbb{A}$-дифференцируемой функции (2.1). В случае алгебры бикватернионов $\mathbb{B}$ (3.4) есть не что иное, как *уравнение комплексного 4-эйконала.* Действительно, вводя для краткости следующие обозначения координат в матричном представлении:

$$Z^{00} = u,\ Z^{11} = v,\ Z^{01} = w,\ Z^{10} = p, \tag{3.5}$$

и раскрывая определитель (3.4), будем иметь уравнение

$$(\nabla_u\Sigma)(\nabla_v\Sigma) - (\nabla_w\Sigma)(\nabla_v\Sigma) = 0, \tag{3.6}$$

которое в декартовых комплексных координатах $z^0 = (u+v)/2,\ z^3 = (u-v)/2,\ z^1 = (w+p)/2,\ z^2 = i(w-p)/2$ принимает знакомый вид уравнения эйконала

$$(\frac{\partial\Sigma}{\partial z^0})^2 - (\frac{\partial\Sigma}{\partial z^1})^2 - (\frac{\partial\Sigma}{\partial z^2})^2 - (\frac{\partial\Sigma}{\partial z^3})^2 = 0. \tag{3.7}$$

Согласно результатам работы [17] (см. также [18]), общее решение уравнения комплексного эйконала (УКЭ) состоит из двух различных классов, оба из которых могут быть получены алгебраически с помощью произвольной (аналитической) функции (проективного) *твисторного переменного.* А именно, в определении 4-градиента комплексного эйконала (3.2) выберем в качестве основного один из 2-спиноров, например $\psi = \{\psi_B\}$, и определим *инцидентный* ему 2-спинор $\tau = \{\tau^A\}$ с помощью соотношения Клейна-Пенроуза [19]

$$\tau = Z\psi, \quad \leftrightarrow \quad \tau^A = Z^{AB}\psi_B. \tag{3.8}$$

Пару спиноров $\{\psi_B, \tau^A\}$, связанных соотношением инцидентности (3.8), мы будем называть *(проективным) твистором* комплексного пространства Минковского $\mathbb{C}\mathbf{M}$.

Действительно, соотношение (3.8), как и сам спинор ψ в соотношении (3.2), определены с точностью до умножения на ненулевой комплексный скаляр; поэтому определены, по существу, лишь *три комплексных отношения* компонент твистора. Пусть, например, отлична от нуля компонента спинора ψ_0; тогда, используя проективную эквивалентность, можно выбрать калибровку твистора вида $\psi_0 = 1$, и для этих отношений имеем:

$$\psi_1 = G, \quad \tau^0 = wG + u,\ \tau^1 = vG + p. \tag{3.9}$$

Выберем теперь некоторую произвольную функцию Π трех комплексных аргументов – компонент проективного твистора

$$\Pi(\psi_1, \tau^0, \tau^1) \equiv \Pi(G, wG + u, vG + p) \tag{3.10}$$

Разрешая уравнение $\Pi = 0$ относительно $G(u,v,w,p)$, получаем некоторое решение УКЭ (I класса). Далее, разрешая относительно G уравнение $d\Pi/dG = 0$ и подставляя решение в исходную функцию Π, приходим к “сопряженному” решению УКЭ $\Pi(u,v,w,p)$ (II класса). Согласно результатам работы [17], два этих класса исчерпывают все (почти всюду аналитические) решения УКЭ (подробнее см. [17, 18]). Для дальнейшего заметим только, что для каждой генерирующей (“Мировой”) функции Π решение совместной системы $\Pi = 0, \quad d\Pi/dG = 0$ определяет структуру особого множества $\Pi(u,v,w,p) = 0$ – множества точек ветвления самого эйконала G и, соответственно, – сингулярного множества его 4-градиента. Решение этой алгебраической системы позволяет, иногда даже без непосредственного нахождения самого эйконала, определить структуру его сингулярностей, подчас чрезвычайно сложную; соответствующие примеры приведены в работах [18, 20, 27, 31].

4 Глобальные симметрии и расщепление условий $\mathbb{A}$-дифференцируемости

Вернемся теперь к анализу условий $\mathbb{A}$-дифференцируемости (2.1) в общем некоммутативном случае матричной алгебры $Mat(N,\mathbb{C})$. Нетрудно видеть, что это фундаментальное соотношение сохраняет свой вид при следующих преобразованиях:

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \quad F(Z) \mapsto SF(Z)T^{-1}, \quad L(Z) \mapsto SL(Z)P^{-1}, \quad R(Z) \mapsto QR(Z)T^{-1}, \tag{4.1}$$

где P, Q, S, T – четыре постоянные обратимые и, вообще говоря, различные матрицы $N \times N$ (знак матричного умножения здесь и в дальнейшем для простоты опускаем). Отвлекаясь от масштабных преобразований (вообще говоря, с разными масштабными факторами для координат Z и функции $F(Z)$), определитель всех матриц будем в дальнейшем считать единичным, так что $P, Q, S, T \in SL(2,\mathbb{C})$.

В частном случае равенства всех матриц имеем преобразования подобия – внутренние автоморфизмы алгебры, – оставляющие инвариантным след и определитель матриц. При $N = 2$, т. е. в случае алгебры бикватернионов $\mathbb{B}$, определитель имеет структуру квадратичной $\mathbb{C}$-значной формы:

$$\det \|Z\| = (z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 \tag{4.2}$$

и, таким образом, с учетом инвариантности следа z^0, автоморфизмы представляют собой вращения 3-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^3$; группа автоморфизмов $Aut(\mathbb{B})$ 2:1 изоморфна группе вращений $SO(3,\mathbb{C})$. В общем случае ($N > 2$) автоморфизмы являют собой линейные преобразования, оставляющие инвариантными след и голоморфную “финслерову метрическую” форму N-го порядка, определяемую структурой детерминанта матрицы.

Ограничиваясь для простоты ниже случаем $N = 2$, рассмотрим общие симметрии *условий бикватернионной дифференцируемости* (4.1). Преобразования координат

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \quad P, Q \in SL(2,\mathbb{C}), \tag{4.3}$$

очевидно, представляют собой 6-параметрические вращения полного векторного пространства $\mathbb{C}^4$ алгебры, оставляющие инвариантной голоморфную “метрику” (4.2). Эти преобразования образуют группу, 2:1 изоморфную группе $SO(4,\mathbb{C})$. При этом закон преобразований полупроизводных $L(Z), R(Z)$ и самой функции $F(Z)$, согласно (4.1), остается недоопределенным вследствие свободы выбора 2-х других матриц $S, T \in SL(2,\mathbb{C})$. Это, очевидно, связано с очень широкой группой симметрий условий $\mathbb{B}$-дифференцируемости (2.1).

Действительно, можно положить, например, $S = Q$, $T = P$, рассматривая тем самым симметрии вида

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \quad F(Z) \mapsto QF(Z)P^{-1} \quad L(Z) \mapsto QL(Z)P^{-1}, \quad R(Z) \mapsto QR(Z)P^{-1}, \qquad (4.4)$$

при которых все “поля” $L(Z), R(Z), F(Z)$ ведут себя как (ковариантные) векторы, реализуя тем самым векторное представление группы $SO(4,\mathbb{C})$. Однако для тех же полей возможен и другой тип преобразований, сохраняющих вид основных уравнений (2.1). А именно, положим матрицы S, T равными единичной. Тогда будем иметь преобразования симметрий вида

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \quad F(Z) \mapsto F(Z) \quad L(Z) \mapsto L(Z)P^{-1}, \quad R(Z) \mapsto QR(Z), \qquad (4.5)$$

так что при этом основная функция $F(Z)$ ведет себя как $SO(4,\mathbb{C})$-скаляр, а полупроизводные $L(Z), R(Z)$ – как совокупность двух независимо преобразующихся строк (столбцов), т. е. как $SO(4,\mathbb{C})$-спиноры!

Таким образом, в рассматриваемом случае имеем уникальную ситуацию, когда одно и то же “физическое поле” может преобразовываться по нескольким независимым представлениям “комплексифицированной группы Лоренца” $SO(4,\mathbb{C})$, являясь в одно и то же время вектором, парой спиноров или совокупностью скаляров.

Наиболее общие симметрии (4.1) образуют (в отношении 4:1) $12\mathbb{C}$-параметрическую группу $SO(4,\mathbb{C}) \times SO(4,\mathbb{C})$, которую можно представлять себе как произведение *координатной* и *внутренней* групп. Однако по отношению к преобразованиям “полей” представление полной группы не может быть разложено однозначно на представление каждой из составляющих.

Действительно, матрицы S, T однозначно представимы в виде $S = \Lambda Q$, $T = \Pi P$ через некоторые новые матрицы $\Lambda, \Pi \in SL(2,\mathbb{C})$. При этом преобразования полей при общих преобразованиях симметрии (4.1) принимают вид

$$Z \mapsto PZQ^{-1}, \; F \mapsto \Lambda(QFP^{-1})\Pi^{-1}, \quad L \mapsto \Lambda(QLP^{-1}), \quad R \mapsto (QRP^{-1})\Pi^{-1}, \qquad (4.6)$$

и имеют следующую естественную интерпретацию: по отношению к группе “координатных” преобразований $SO(4,\mathbb{C})_{coord}$ все поля $L(Z), R(Z), F(Z)$ являются (ковариантными) векторами; в то же время по отношению к внутренней “изотопической” группе $SO(4,\mathbb{C})_{int}$ каждая из полупроизводных $L(Z), R(Z)$ ведет себя как пара *изоспиноров*, тогда как основное поле $F(Z)$ является *изовектором.* Однако, несмотря на удобство и общность такой интерпретации, она не является, как мы видели выше, единственно возможной.

Заметим, что координатное пространство Z может быть редуцировано к пространству *унитарных* матриц (кватернионов Гамильтона) или к пространству *эрмитовых* матриц, для которых введенные выше прямоугольные координаты z_μ вещественны, а инвариантная форма (4.2) представляет собой метрику Минковского. При этом требование сохранения введенного условия (унитарности, эрмитовости и т. п.) накладывает ограничения на общие преобразования симметрии (4.1), так что группа симметрий редуцируется к меньшей. Все подобные ситуации, включая законы возможных преобразований для “полей” (остающихся, вообще говоря, комплекснозначными) могут быть легко проанализированы. В частности, на эрмитовом координатном подпространстве алгебродинамическая “теория поля”, основанная на условиях $\mathbb{B}$-дифференцируемости (2.1), будет автоматически лоренц-инвариантной. Ниже этот случай будет рассмотрен подробнее.

В заключение обсуждения вопроса о симметриях отметим, что линейные преобразования (4.1), включающие в себя $SO(4,\mathbb{C})$-вращения и масштабное преобразование, не исчерпывают всех симметрий соотношений $\mathbb{B}$-дифференцируемости (2.1), которые очевидным образом инвариантны относительно $4\mathbb{C}$ трансляций, а также относительно всех *инверсий* в этом пространстве, так что полная группа симметрий по меньшей мере включает в себя $15\mathbb{C}$-параметрическую группу конформных преобразований 4-мерного комплексного пространства с голоморфной метрикой (4.2).

В соответствии с широкой группой симметрии условия $\mathbb{B}$-дифференцируемости допускают различные виды их "расщепления", т. е. редукции к более простым системам уравнений. При этом, очевидно, группа симметрий редуцированной системы будет меньше исходной. Наиболее важным примером является расщепление по столбцам (строкам) матрицы основной функции $F(Z)$ [23].

А именно, обозначим два *столбца* этой матрицы как $F = \{\eta_1, \eta_2\}$, а столбцы правой полупроизводной как $R = \{\xi_1, \xi_2\}$. Тогда исходная система редуцируется к системе двух однотипных уравнений вида

$$d\eta_a = \Phi * dZ * \xi_a, \quad a = 1, 2 \tag{4.7}$$

и решение полной системы получается как произвольная комбинация двух каких-либо решений системы типа (4.7) с одним и тем же матричным "полем" $\Phi(Z)$ (левой полупроизводной). Редуцированния система (4.7) форм-инвариантна, в частности, при следующих преобразованиях переменных:

$$Z \mapsto QZP^{-1}, \quad \xi \mapsto P\xi, \quad \Phi \mapsto P\Phi Q^{-1}, \quad \eta \mapsto P\eta, \tag{4.8}$$

при которых величины $\Phi(Z)$ преобразуются как комплексный 4-вектор, а "поля" $\eta(Z)$ и $\xi(Z)$ – как $SL(2,\mathbb{C})$-спиноры [1].

Сведение полной системы уравнений $\mathbb{B}$-дифференцируемости к более простой системе вида (4.7) для двух спиноров (основного и дополнительного) и одного 4-вектора можно назвать *спинорным расщеплением* исходной системы уравнений (2.1).

Основной класс решений полной системы (2.1) на самом деле восстанавливается по произвольному решению *одной* из спинорных систем (4.7). Для этого достаточно просто занулить, например, спиноры η_2 и ξ_2 или считать их пропорциональными исходным спинорам, т. е. положить

$$\eta_2 = k\eta_1, \quad \xi_2 = k\xi_1 \tag{4.9}$$

с произвольным *постоянным* комплексным коэффициентом пропорциональности $k \in \mathbb{C}$. При этом правая полупроизводная представляет собой вырожденную (изотропную) матрицу, $\det R(Z) = 0$, а основная матричная функция отличается от изотропной на произвольную постоянную матрицу C: $F(Z) = C + H(Z)$, $\det H(Z) = 0$. Заметим, что коэффициент пропорциональности k не может нетривиально зависеть от координат Z, что легко доказать, учитывая одинаковый вид "поля" $\Phi(Z)$ для обеих спинорных систем [21].

Изотропный случай, соответствующий *вырожденным конформным отображениям* (см. раздел 3), вообще является единственным физически нетривиальным, поскольку в невырожденном случае, отвечающем каноническим конформным отображениям в $\mathbb{C}$, напряженности ассоциированных с $\mathbb{B}$-дифференцируемыми функциями калибровочных полей обращаются в нуль [10, 22, 23]. С другой стороны, при изотропности, например, матрицы правой полупроизводной два ее столбца пропорциональны

[1] Очевидно, что преобразования (4.8) не исчерпывают всех симметрий каждой из систем уравнений (4.7), вытекающих из общих преобразований симметрии (4.1), и представлены здесь лишь в качестве примера.

в точке и, ввиду постоянства коэффициента k, – глобально. Таким образом, мы показали, что все физически нетривиальные (изотропные) решения основных уравнений $\mathbb{B}$-дифференцируемости (2.1) можно получить из *одного* решения фундаментальной спинорной системы

$$d\eta = \Phi dZ\xi \tag{4.10}$$

с помощью тривиальной "достройки" спиноров $\xi(Z), \eta(Z)$ до изотропных матриц (при этом каждый из спиноров может быть умножен на произвольное комплексное число).

5 Общее решение фундаментальной спинорной системы

Как и уравнение комплексного эйконала (УКЭ) для отдельных компонент основного спинора $\eta(Z)$, общее решение фундаментальной спинорной системы (ФСС) (4.10) состоит из двух различных классов и получается по аналогии с общим решением УКЭ (раздел 3). Здесь мы приведем его структуру без доказательства.

Решения ФСС I класса

Определим твистор пространства $\mathbb{C}^4$

$$\mathbf{W} = \{\xi, \kappa\} \equiv \{\xi, Z\xi\}, \tag{5.1}$$

построенный на некотором спиноре $\xi(Z)$, удовлетворяющем ФСС (4.10) вместе с некоторыми соответствующими ему функциями $\eta(Z), \Phi(Z)$. Пусть три его *проективные* компоненты функционально независимы; тогда можно считать функционально независимыми и все четыре его компоненты

$$\{\xi_A, \quad \kappa^A = Z^{AB}\xi_B\}. \tag{5.2}$$

При этом можно показать, что компоненты основного спинора, наоборот, функционально зависимы между собой, и их можно считать зависящими от координат лишь через компоненты твистора (5.2):

$$\eta_A(Z) = \eta_A(\sigma), \quad \sigma(Z) = \sigma(\xi, \kappa) \equiv \sigma(\xi(Z), Z\xi(Z)). \tag{5.3}$$

Выбор генерирующей функции $\sigma(\xi, \kappa)$, как и функциональной зависимости от нее компонент основного спинора $\eta_A(\sigma)$ может быть совершенно произволен (разумеется, при обеспечении необходимых условий гладкости).

Оказывается, что зависимость от координат компонент спинора $\xi_A(Z)$ может быть при этом определена из решения алгебраической системы двух уравнений вида

$$\frac{d\sigma}{d\xi_B} = 0, \tag{5.4}$$

после чего подстановкой решения $\xi(Z)$ в (5.3) получаем выражение для основного спинора $\eta(Z)$. При этом матрица "поля" Φ_{AB} изотропна и равна

$$\Phi_{AB} = \frac{d\eta_A}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\kappa^B}. \tag{5.5}$$

Таким образом, каждая дифференцируемая функция твисторного переменного $\sigma(\xi, \kappa)$ порождает класс эквивалентных (в смысле функциональной зависимости друг от друга компонент спинора η_A) решений ФСС. Эти решения, очевидно, соответствуют решениям I класса УКЭ, описанным в разделе 3.

Решения ФСС II класса

Пусть теперь три *проективные* компоненты твистора (5.1) функционально зависимы; тогда, опять с учетом произвола выбора четвертой компоненты твистора *общего вида*, можно считать, что между его компонентами (5.2) имеются *две* функциональные связи вида

$$\Pi^{(D)}(\xi_A, \kappa^A) = \Pi^{(D)}(\xi_A, Z^{AB}\xi_B) = 0, \quad (D) = 1, 2. \tag{5.6}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим распределение $\xi_B(Z)$. Дифференцируя уравнения (5.6) по координатам, можно показать (см. подробнее [17]), что компоненты ξ удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\nabla_{AB}\xi_C = \left[-\frac{\partial \Pi^{(D)}}{\partial \kappa^A} Q^{-1}_{(D)C} \right] \xi_B \equiv \Psi_{CA}\xi_B, \tag{5.7}$$

где введено обозначение Ψ_{CA} для величин в квадратных скобках, и $Q^{-1}_{(D)C}$ – для матрицы, обратной к

$$Q^{(D)C} := \frac{d\Pi^{(D)}}{d\xi_C}. \tag{5.8}$$

В инвариантной пфаффовой форме система уравнений (5.7) записывается следующим образом:

$$d\xi = \Psi dZ \xi. \tag{5.9}$$

При отождествлении основного и дополнительного спиноров $\eta(Z) \equiv \xi(Z)$, а функции $\Psi(Z)$ с "полем" (левой полупроизводной) $\Phi(Z)$, эта система сама по себе, очевидно, является одним из решений ФСС, соответствующих генерирующим твисторным функциям (5.6).

На самом деле этот случай имеет исключительно важное значение для последующих применений бикватернионного анализа в контексте алгебродинамики; в предыдущих работах система (5.9) и соответствующая ей полно-матричная система

$$dF = \Psi dZ F, \tag{5.10}$$

в которой $F(Z)$ – *изотропное* ($\det F = 0$) бикватернионное поле, построенное с помощью двух пропорциональных спиноров $\xi(Z)$, получила название *генерирующей системы уравнений* (ГСУ). Действительно, как мы увидим ниже, каждое решение ГСУ естественно порождает некоторое решение свободных уравнений Максвелла, Янга-Миллса и других фундаментальных (безмассовых) уравнений релятивистских полей. Заметим, что с математической точки зрения ГСУ представляет особый случай условий $\mathbb{B}$-дифференцируемости, при котором *правая полупроизводная* $R(Z)$ *отождествляется с основным бикватернионным "полем"* $F(Z)$.

Приведем теперь *общий вид* решений ФСС II класса, соответствующий некоторому произвольному набору двух твисторных функций $\Pi^{(D)}(\xi_A, \kappa^A)$. Из них путем решения алгебраических уравнений (5.6) для спинора $\xi(Z)$ и вычисления по формулам (5.7),(5.8) величин $\Psi(Z)$ получаем полное решение ГСУ (5.9). Оказывается, что при этом компоненты основного спинора $\eta(Z)$ могут быть произвольными (и, вообще говоря, различными) функциями компонент твистора (5.2):

$$\eta_A(Z) = \eta_A(\xi, \kappa) \equiv \eta_A(\xi(Z), Z\xi(Z)). \tag{5.11}$$

Заметим, что в силу связей (5.6) *только две из этих твисторных компонент на самом деле являются независимыми.* Наконец, соответствующее выражение для "поля"

$\Phi(Z)$ получается из найденного решения ГСУ $\{\Psi(Z), \xi(Z)\}$ и произвольно выбранной зависимости компонент основного спинора (5.11) следующим образом:

$$\Phi(Z) = (M\Psi(Z) + N(E + Z\Psi(Z)), \quad M := \|\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\|, \quad N := \|\frac{\partial\eta}{\partial\kappa}\|, \tag{5.12}$$

где E представляет опять 2×2 единичную матрицу. В результате мы получаем, что произвольный набор двух независимых функций твисторного переменного $\Pi^{(D)}(\mathbf{W}) \equiv \Pi^{(D)}(\xi_A, \kappa^A)$ порождает некоторый класс эквивалентных (в смысле произвольности выбора зависимости компонент основного спинора $\eta_A(\mathbf{W})$) решений ФСС. Этот класс, очевидно, соответствует II классу решений УКЭ, описанному в разделе 3.

Таким образом, мы приходим к общему решению ФСС (4.10). Действительно, поскольку из трех *проективных* компонент базового твистора (5.1) либо все три, либо только две функционально независимы [2], то всякое решение ФСС принадлежит либо к первому, либо ко второму классу. Поэтому любое (почти всюду аналитическое) решение ФСС может быть получено из некоторой генерирующей функции твисторного переменного (I класс) либо пары таких функций (II класс) с помощью вышеописанной *чисто алгебраической* процедуры. По сравнению с общим решением уравнения комплексного эйконала, описанном выше в разделе 3 (в выбранной калибровке) и в работах [17,18], в случае ФСС имеется дополнительный произвол в выборе (зависимости от твисторных переменных) компонент основного спинора, которые либо функционально связаны (для I класса решений) либо независимы (для II класса).

Такой произвол может быть естественным образом исключен, если в качестве основного уравнения выбирается система ГСУ (5.9) или соответствующая ей полноматричная система (5.10). Все ее решения уже принадлежат ко второму классу решений ФСС и полностью определяются выбором пары генерирующих функций твисторного переменного (5.6) (а при выборе калибровки проективного твистора (см. ниже) – даже одной единственной "Мировой" функцией). К более подробному обзору свойств и решений этой универсальной системы уравнений мы и переходим.

6 Бикватернионная дифференцируемость и калибровочные поля

В *алгебродинамике* условия бикватернионной дифференцируемости (2.1) и, конкретно, их основной случай – генерирующая система уравнений (5.9), (5.10) – рассматриваются в качестве единственных первичных уравнений физических полей – дифференцируемых $\mathbb{B}$-функций. При этом для обеспечения релятивистской инвариантности теории следует ограничить комплексные координаты Z на подпространство эрмитовых матриц $Z \mapsto X = X^+$ с метрикой Минковского $\det X = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. ГСУ (5.9) принимает тогда следующий вид:

$$d\xi = \Psi dX \xi \tag{6.1}$$

и сохраняет свою форму (включая эрмитовость координатной матрицы) при следующих преобразованиях симметрии:

$$X \mapsto P^+XP, \quad \xi \mapsto P^{-1}\xi, \quad \Psi \mapsto P^{-1}\Psi(P^+)^{-1}, \tag{6.2}$$

при которых величины $\xi(Z)$ и $\Psi(Z)$ ведут себя как $SL(2,\mathbb{C})$-спинор и комплексный 4-вектор соответственно. Более общей группой симметрии (6.1) является *конформная*

[2] Утверждение, что по крайней мере две компоненты произвольного твистора всегда независимы, доказано, например, в работе [22].

группа пространства Минковского, что и определяет существование введенной выше *твисторной* структуры.

Следует отметить, однако, что эрмитовость представляет собой некоторое избыточное требование, не мотивированное внутренней структурой исходной алгебры бикватернионов. В последнем разделе статьи мы покажем, каким образом в рамках полного векторного пространства $\mathbb{C}^4$ алгебры $\mathbb{B}$ на самом деле *закодировано* пространство Минковского. С учетом этого обстоятельства мы будем в этом и последующих разделах сохранять *голоморфный* характер теории, работая, как и до того, с комплексными координатами $Z = \{z_\mu\}$ и, соответственно, – с ГСУ в прежней форме (5.9), (5.10). При непосредственной физической интерпретации мы всегда будем подразумевать переход к вещественным координатам $\{x_\mu\}$ или, иначе говоря, – к эрмитовой матрице координат $X = X^+$.

Заметим теперь, что ГСУ (5.9) переопределена (8 дифференциальных уравнений для 6 неизвестных функций), поэтому должны выполняться некоторые условия совместности (интегрируемости и т. п.), которые позволяют получить из (5.9) ограничения отдельно на спинор $\xi(Z)$ и на векторное поле $\Psi(Z)$. Однако перед рассмотрением этих соотношений необходимо установить *калибровочную* природу поля $\Psi(Z)$, существенно отличную от обычной. Отметим, что в дальнейшем в этом и следующем разделе мы следуем в основном изложению обсуждаемых вопросов в работах [22, 26].

Легко видеть, что хорошо известные из теории поля калибровочные $U(1)$ преобразования вида

$$\xi \mapsto \exp i\alpha(X)\xi, \quad \Psi \mapsto \Psi - i\nabla \ln \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{6.3}$$

или их комплексификация, не сохраняют форму ГСУ. Однако в работах [22, 23] было показано, что эта система обладает т. н. “слабой” (или “ограниченной”) калибровочной симметрией, при которой калибровочный параметр α зависит от координат неявно, только через компоненты самого преобразуемого спинора $\xi(Z)$ и твисторно-сопряженного ему спинора $\kappa(Z) = Z\xi(Z)$,

$$\alpha = \alpha(\mathbf{W}) = \alpha(\xi, \kappa) \equiv \alpha(\xi(Z), Z\xi(Z)). \tag{6.4}$$

Такие преобразования, соответствующие проективным преобразованиям твисторных компонент, образуют группу, являющуюся подгруппой полной калибровочной комплексной группы $\mathbb{C}$ (комплексификацией $U(1)$) [22]. При этом величины $\Psi(Z)$ преобразуются градиентным образом, т. е. ведут себя как *потенциалы* некоторого калибровочного поля, которое, как мы увидим в дальнейшем, естественно ассоциируется с (комплексифицированным) *электромагнитным* полем.

Действительно, ГСУ (5.9) может рассматриваться как *условие ковариантного постоянства спинора* $\xi(Z)$ по отношению к $\mathbb{B}$-значной 1-форме эффективной связности

$$\Omega = \Psi dZ. \tag{6.5}$$

Интересно, что в 4-векторном представлении $\mathbb{B}$-связность (6.5) порождает афинную связность вида [10, 23]

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \delta^\mu_\nu \Psi_\rho + \delta^\mu_\rho \Psi_\nu - \eta_{\rho\nu}\Psi^\mu - i\epsilon^\mu_{.\nu\rho\lambda}\Psi^\lambda, \tag{6.6}$$

определяющую эффективную комплексную геометрию *Вейля-Картана*. В такой $\mathbb{B}$-индуцированной геометрии вектор неметричности Вейля и вектор псевдоследа кручения пропорциональны друг другу, и оба выражаются через компоненты основного калибровочного поля $\Psi(Z)$ [3].

Используя определение (6.5), перепишем теперь начальную ГСУ (5.9) в виде

$$d\xi = \Omega\xi \tag{6.7}$$

Динамика связности $\Omega(Z)$ может быть получена внешним дифференцированием (6.7), что приводит к условию интегрируемости вида

$$R\xi \equiv (d\Omega - \Omega\wedge\Omega)\xi = 0, \tag{6.8}$$

где (в круглых скобках) появляется *2-форма кривизны связности* R. Поскольку спинор ξ не произволен, а подчиняется (6.7), из условий интегрируемости (6.8) не следует тождественное обращение в нуль кривизны [4]. Замечательным образом, вместо тривиализации условия интегрируемости (6.8) приводят к *самодуальности* кривизны [10, 23].

Чтобы показать это, отметим, что для связности вида (6.5) кривизна R имеет следующую, довольно специальную форму

$$R = (d\Psi - \Psi dZ\Psi)\wedge dZ \equiv \pi\wedge dZ, \tag{6.9}$$

где возникает новая $\mathbb{B}$-значная 1-форма π с компонентами

$$\pi_{AC} = \pi_{ACBD}dZ^{BD} = (\nabla_{BD}\Psi_{AC} - \Psi_{AB}\Psi_{CD})dZ^{BD}. \tag{6.10}$$

Теперь условия интегрируемости (6.8) принимают форму $(\pi\wedge dZ)\xi = 0$, или в матричной форме

$$\pi_{ACBD}dZ^{BD}\wedge dZ^{CE}\xi_E = 0.$$

С учетом свойств симметрии 2-спиноров из последнего соотношения получаем

$$\pi_A{}^C{}_{C(B}\xi_{E)} = 0,$$

так что для любого нетривиального решения $\xi(Z)$ имеем

$$\pi_A{}^C{}_{CB} \equiv \nabla_{CB}\Psi_A{}^C + \Psi_{BC}\Psi_A{}^C = 0. \tag{6.11}$$

Далее, используя стандартную процедуру и разлагая кривизну (6.9) на само- и антисамодуальную часть, убеждаемся, что уравнения (6.11) представляют собой именно *условия обращения в нуль самодуальной части кривизны*. При этом другая, антисамодуальная ее часть $\bar R$ имеет вид

$$\bar R_A{}^D{}_{(BC)} = \nabla^C{}_{(B}\Psi_{AC)} - \Psi^C{}_{(B}\Psi_{AC)} \tag{6.12}$$

и удовлетворяет дополнительным условиям интегрируемости $\bar R\xi = 0$ (далее в статье эти условия не используются).

Итак, хотя 2-форма кривизны (6.9) 1-формы связности (6.5) и не является сама по себе (анти)самодуальной (т. е. самодуальной в “сильном” смысле), она с необходимостью

[3] Ковариантные векторные поля в геометрии Вейля без кручения рассматривались в работе [31]; их свойства тесно связаны с симметриями многообразий Вейля [32]. Для действительных связностей такого типа отношения между неметрической частью и частью, связанной с кручением, являлись предметом рассмотрения в [29].

[4] В этом пункте данный подход существенно разнится от принятого в работах Бухдала [33], Пенроуза [34] и Плебаньского [35], где предполагалось, что условия интегрируемости, напоминающие (6.8), должны выполняться для произвольного спинорного поля (или для широкого класса решений т.н. “точных” систем уравнений поля).

становится (анти)самодуальной *на решениях ГСУ*. По этой причине такое свойство кривизны ГСУ в работе [39] получило название *слабой самодуальности*.

С физической точки зрения выражение (6.12) определяет напряженность некоторого матричного калибровочного поля; в частности, ее диагональная часть

$$F_{BC} = \bar{R}_A{}^A{}_{(BC)} = \nabla^A{}_{(B}\Phi_{AC)} \tag{6.13}$$

соответствует напряженности электромагнитного поля, в то время как бесследовая часть (6.12) определяет напряженность комплексного поля типа *Янга-Миллса*[5]. Действительно, при учете *тождеств Бианки*

$$dR \equiv \Omega \wedge R - R \wedge \Omega, \tag{6.14}$$

самодуальность кривизны $R + iR^* = 0$ немедленно влечет за собой выполнение вакуумных уравнений Максвелла для диагональной (электромагнитной) части 2-формы $F = Tr(R) = R_A{}^A$

$$dF^* = 0 = dF \equiv 0, \tag{6.15}$$

и уравнений Янга-Миллса для бесследовой части кривизны $\mathbf{F}_A{}^B = R_A{}^B - \frac{1}{2}F\delta_A^B$.

При этом, хотя электромагнитная 2-форма F является, вообще говоря, $\mathbb{C}$-значной, в силу своей самодуальности она сводится к вещественной 2-форме $\mathtt{F}$, связанной с F следующим образом:

$$F = \mathtt{F} - \mathtt{i}\mathtt{F}^*. \tag{6.16}$$

Разумеется, для этой формы также выполняются однородные уравнения Максвелла, так что число независимых степеней свободы оказывается одинаковым с обычным вещественным электромагнитным полем. В явном виде для $\mathbb{C}$-значных напряженностей "электрического" $\vec{E}$ и "магнитного" $\vec{H}$ полей имеем из (симметричной по паре индексов части) условий интегрируемости (6.11)

$$\vec{E} + i\vec{H} = 0, \tag{6.17}$$

откуда $\Im(\vec{H}) = \Re(\vec{E})$, $\Im(\vec{E}) = -\Re(\vec{H})$, и пара $\{\Re(\vec{E}), \Re(\vec{H})\}$ представляет $\mathbb{R}$-значное электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла. В дополнение из (антисимметричной по спинорным индексам части) (6.11) получаем следующее "неоднородное условие Лоренца" [10, 23] для $\mathbb{C}$-значных электромагнитных потенциалов $A_\mu \leftrightarrow \Phi_{AD}$:

$$\partial_\mu A^\mu + 2A_\mu A^\mu = 0, \tag{6.18}$$

которое также обязано тождественно выполняться на решениях ГСУ. Условие (6.18), разумеется, само по себе не является калибровочно инвариантным в общепринятом смысле, однако аналогично классической электродинамике инвариантно относительно слабых калибровочных преобразований (6.4) при условии, что преобразуемые потенциалы (совместно с некоторым соответствующим им спинором $\xi(Z)$) удовлетворяют ГСУ.

Что же касается полей Янга-Миллса, то они всегда могут быть выражены через напряженность *электромагнитного* поля и сам спинор ξ_A, и поэтому не могут рассматриваться самостоятельно. Заметим, что по отдельности действительная и мнимая

[5] Принимая во внимание ограниченную (слабую) калибровочную симметрию, введенное поле – это не совсем то, что обычно понимают под полями Янга-Миллса с калибровочной группой $SL(2,\mathbb{C})$. Однако вид калибровочных уравнений для введенного поля совпадает с общепринятым, ограничения имеют место только для класса отбираемых решений и их калибровочных преобразований друг в друга.

части бесследовой компоненты кривизны $\mathbf{F}_A{}^B$ уже не будут удовлетворять вакуумным уравнениям Янга-Миллса в силу нелинейности последних. Поэтому здесь поля Янга-Миллса являются *существенно комплексными*. Другие детали и особенности полей Янга-Миллса, возникающих в алгебродинамическом подходе, можно найти в статье [23].

7 Изотропные бессдвиговые конгруенции, ассоциированные с ГСУ

Рассмотрим теперь ограничения на основной спинор ξ_A, возникающие при исключении калибровочного поля потенциалов Ψ_{AC} из ГСУ (5.9). Для этого распишем данную пфаффову систему дифференциальных уравнений в покомпонентном виде:

$$\nabla_{BA}\xi_C = \Psi_{CB}\xi_A \tag{7.1}$$

и, умножая ее на ортогональный спинор ξ^A, с учетом антисимметричности спинорной нормы $\xi_A\xi^A = 0$ имеем:

$$\xi^A\nabla_{BA}\xi_C = 0, \tag{7.2}$$

т. е. систему нелинейных уравнений на компоненты спинора $\xi(Z)$. Заметим, что при ограничении комплексных координат на подпространство Минковского $\mathbf{M}$ следствием системы (7.2) является хорошо известная в общей теории относительности система уравнений для главного спинора т.н. *бессдвиговой изотропной (геодезической) конгруенции* (БИК) 4-мерных прямолинейных "лучей":

$$\xi^B\xi^C\nabla_{AB}\xi_C = 0. \tag{7.3}$$

Отметим, что с целью унификации записи здесь и в дальнейшем при ограничении координат на $\mathbf{M}$ мы не делаем различия между пунктирными и непунктирными индексами спиноров, что, вообще говоря, является общепринятым в спинорной алгебре.

В работах [22, 56] было показано, что исходная система (7.2) отличается от системы (7.3) для БИК только более жесткой фиксацией калибровки спинора ξ, а в той части, которая касается *отношения* компонент спинора, эти системы эквивалентны. В частности, *общее решение* системы БИК (и, тем самым, полное описание всех таких конгруенций на пространстве Минковского $\mathbf{M}$) связано с ее твисторной структурой и дается известной *теоремой Керра* [19, 40] в виде неявного алгебраического уравнения

$$\Pi(\xi,\kappa) = \Pi(\xi, Z\xi) = 0, \tag{7.4}$$

где Π – произвольная *однородная* функция твисторных компонент. Из (7.4) находится отношение спинорных компонент, которое только и определено системой БИК (7.3). Аналогично более жесткая система уравнений для спинора ГСУ (7.2) имеет, как было показано ранее (раздел 4), общее решение (5.6) в виде двух уравнений, содержащих две произвольные и независимые твисторные функции $\Pi^{(D)}(\xi,\kappa)$. Из этих уравнений уже определяются обе компоненты спинора $\xi(Z)$.

Как хорошо известно, геометрически на $\mathbf{M}$ для построения БИК следует определить поле (вещественного) изотропного вектора, направляющего к (прямолинейным) лучам конгруенции, через основной спинор $\xi(Z)$ следующим образом:

$$k_\mu(X) = \xi^+\sigma_\mu\xi, \quad \sigma_\mu = \{E, \sigma_a\}, \tag{7.5}$$

где $\{\sigma_a\},\ a = 1,2,3$ – матрицы Паули, E – единичная 2×2-матрица.

Хорошо известно, что из решения условия инцидентности спиноров (3.8), ограниченного на $\mathbf{M}$,

$$\kappa = X\xi \tag{7.6}$$

относительно точек пространства-времени X следует [19], что твисторное поле $\{\xi, \kappa\}$ вместе с определяемым им вектором БИК k_μ *переносится параллельно вдоль определяемых самим этим вектором прямолинейных изотропных направлений.* При этом в качестве параметра переноса вдоль лучей конгруенции может быть выбрана сама временна́я координата [18, 60, 61].

Отметим теперь, что для физических приложений важны лишь *проективные* компоненты твистора ГСУ, определяемые отношением компонент спинора $\xi_1/\xi_0 = G$ и равные

$$\kappa^0 = wG + u, \quad \kappa^1 = vG + p, \tag{7.7}$$

где u, v, w, p – комплексные матричные координаты (3.5), две из которых (u, v) при ограничении на $\mathbf{M}$ становятся вещественными, а две другие (w, p) – комплексно-сопряженными. При этом для фундаментального спинорного поля $G(X)$ обе системы (7.2) и (7.3) эквивалентны двум ДУ следующего вида:

$$\nabla_w G = G \nabla_u G, \quad \nabla_v G = G \nabla_p G, \tag{7.8}$$

Общее аналитическое решение уравнений (7.8) для функции $G(X)$ немедленно следует теперь из калибровочно инвариантного его представления (5.6) в форме одного алгебраического уравнения (ср. с общим решением УКЭ II класса, раздел 3)

$$\Pi(G, \kappa^0, \kappa^1) = \Pi(G, wG + u, vG + p) = 0, \tag{7.9}$$

неявно определяющего функцию $G(X)$. Здесь Π – произвольная голоморфная функция трех комплексных твисторных переменных. Соотношение (7.9) выражает факт функциональной зависимости трех компонент $\{G, \kappa^0, \kappa^1\}$ проективного твистора $\mathbf{W}$, сопоставляемого решениям ГСУ. Для уравнений БИК (7.3) это соотношение хорошо известно, представляя теорему Керра в фиксированной калибровке.

Заметим теперь, что решения (7.8) определены всюду, кроме точек ветвления функции $G(X)$, соответствующих *кратным* корням уравнения Керра (7.9), которые определяются условием вида

$$P := \frac{d\Pi}{dG} = 0. \tag{7.10}$$

Перемножая теперь два уравнения (7.8), можно снова проверить выполнение уравнения 4-эйконала для поля $G(X)$ в виде

$$\nabla_u G \nabla_v G - \nabla_w G \nabla_p G = 0, \tag{7.11}$$

а дифференцируя эти уравнения – убедиться, что $G(X)$ удовлетворяет также и линейному *волновому* уравнению д'Аламбера [39, 41, 56]

$$\Box G \equiv (\nabla_u \nabla_v - \nabla_w \nabla_p) G = 0. \tag{7.12}$$

Отметим еще, что с учетом (7.11) каждая C^2-функция $\lambda(G)$ также является гармонической на решениях ГСУ,

$$\Box \lambda(G) = 0. \tag{7.13}$$

Используя теперь выражение (5.7) для потенциалов Ψ_{AB} и принимая во внимание (7.11), можем выразить напряженности электромагнитного поля (6.13) через вторые производные от $\ln G$:

$$F_{00} = \nabla_u \nabla_p \ln G, \quad F_{11} = \nabla_v \nabla_w \ln G, \quad F_{01} = \nabla_w \nabla_p \ln G, \tag{7.14}$$

так что выполнение вакуумных уравнений Максвелла для напряженностей (7.14) сразу следует из волнового уравнения (7.13) для $\lambda = \ln G$. Дважды дифференцируя тождество (7.9) по координатам $\{u, v, w, p\}$, получим окончательно следующее важное (и не имеющее аналогов в литературе) представление напряженностей электромагнитного поля (7.14) через твисторные переменные [22, 26]:

$$F_{AB} = \frac{1}{P}\left(\Pi_{AB} - \frac{d}{dG}(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P})\right), \tag{7.15}$$

где функция P определена в (7.10), а $\{\Pi_A, \Pi_{AB}\}$, $A, B = 0, 1$ обозначают производные (1-го и 2-го порядков) от функции Π по ее твисторным аргументам κ^0, κ^1. Ниже мы вернемся к этому компактному выражению для напряженностей ассоциированного поля.

Тесная связь между ГСУ и БИК дает возможность ввести еще одну геометрофизическую структуру – эффективную *риманову метрику*. Действительно, хорошо известно [40, 42], что можно деформировать метрику плоского пространства $\eta_{\mu\nu}$ в метрику $g_{\mu\nu}$ *Керра-Шилда*

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h k_\mu k_\nu \tag{7.16}$$

таким образом, что основные характеристики БИК k_μ (геодезичность, вращение и сдвиг) сохраняются при такой деформации. Здесь h – некоторая скалярная функция, а изотропная (по отношению как к плоской, так и преобразованной метрикам) конгруенция k, определенная в (7.5), имеет следующий проективно инвариантный вид:

$$k = du + \bar{G}dw + Gd\bar{w} + G\bar{G}dv, \tag{7.17}$$

где через $\bar{G}$ обозначается величина, комплексно сопряженная G.

Обратимся теперь к результатам классической статьи [40], в которой было показано, что метрика (7.16) удовлетворяет электровакуумной системе уравнений Эйнштейна-Максвелла для функций G, полученных как решение алгебраического уравнения Керра (7.9) с *линейной* по твисторным аргументам κ^0, κ^1 генерирующей функцией Π :

$$\Pi = \varphi + (qG + s)\kappa^1 - (pG + \bar{q})\kappa^0. \tag{7.18}$$

Здесь $\varphi = \varphi(G)$ – произвольная аналитическая функция комплексной переменной G, s и p – действительные, а q – комплексная константы. Не входя в детали, отметим, что в соответствии с результатами работы [40] скалярная функция h в (7.16) определена, с точностью до произвольной константы, той же функцией Π и некоторой другой функцией $\Psi(G)$, независимой от $\varphi(G)$ и связанной с электромагнитным полем решения системы Эйнштейна-Максвелла. Такие поля определены в искривленном пространстве с метрикой (7.16) и, вообще говоря, отличны от полей, возникающих в нашем подходе и удовлетворяющих уравнениям Максвелла в *плоском* пространстве-времени[6]. Тем не менее, для наиболее интересных случаев решений Райснера-Нордстрема и Керра-Ньюмена выражения для обоих этих полей почти идентичны, различаясь лишь тем, что в нашем подходе электрический заряд оказывается фиксированным по абсолютной величине самой ГСУ (см. раздел 7).

В работах [40, 41] было также показано, что сингулярности кривизны римановой метрики Керра-Шилда (7.16) определяются как раз условием (7.10). С другой стороны, из выражения (7.15) следует, что то же условие $P = 0$ определяет множество сингулярных точек электромагнитного поля. Это же условие, как можно проверить, имеет

[6] В то же время оба таких типа полей в общем случае отличны и от полей, которые могут быть определены для БИК через твисторное преобразование Пенроуза, см. [19], глава 6.

место и для сингулярностей поля Янга-Миллса (ЯМ), ассоциированного с решениями ГСУ[7].

Таким образом, каждому решению ГСУ можно естественно сопоставить некоторое электромагнитное, комплексное ЯМ и поле кривизны (эффективное "гравитационное") поля. Эти поля удовлетворяют соответственно свободным (комплексифицированным) уравнениям Максвелла, Янга-Миллса и, по крайней мере в основном стационарном случае, – электровакуумной системе Максвелла-Эйнштейна[8]. Сингулярности всех этих полей определяются одним и тем же условием (7.10) и совпадают в пространстве и времени. Это позволяет в алгебродинамическом подходе, основанном на ГСУ, *рассматривать частицы как общие сингулярности всех ассоциированных полей.* Развитием этой общей концепции мы займемся в следующем разделе.

8 Сингулярные "частицеподобные" решения ГСУ с автоквантованным электрическим зарядом

Мы представим здесь краткий обзор основных решений ГСУ и ассоциированных с ними решений уравнений Максвелла, известных к настоящему времени. Все они могут быть получены выбором генерирующей функции П с последующим решением алгебраического уравнения (7.8) и вычислением промизводных. Если ограничиться наиболее простым случаем решений, которые можно получить в явной форме, то следует рассматривать только функции П, *квадратичные* по твисторным аргументам (линейные функции приводят к решениям с нулевыми напряженностями электромагнитного поля (7.14)).

Фундаментальное *статическое* решение генерируется функцией П вида

$$\Pi = G\kappa^0 - \kappa^1 + 2ia \equiv G(wG + u) - (vG + p) + 2ia, \tag{8.1}$$

($a = Const \in \mathbb{R}$), не содержащее временнóй переменной. Приравнивая эту функцию нулю и решая квадратное уравнение относительно неизвестной G, получаем (при ограничении координат на вещественное пространство Минковского):

$$G = \frac{p}{(z + ia) \pm r_*} \equiv \frac{x + iy}{(z + ia) \pm \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}}. \tag{8.2}$$

Электромагнитное поле (7.14), ассоциируемое с данным решением

$$\vec{E} - i\vec{H} = \pm\frac{\vec{r}_*}{4(r_*)^{3/2}}; \qquad (\vec{E} + i\vec{H} = 0), \tag{8.3}$$

где $\vec{r}_* = \{x, y, z + ia\}$, имеет сингулярность в форме *кольца* радиуса a, единственно возможную величину электрического заряда $q = \pm 1/4$ (в использованных безразмерных единицах), а также дипольный магнитный и квадрупольный электрический моменты, равные соответственно qa и qa^2 [39, 56]. Если отвлечься от ограничений на заряд, то электромагнитное поле (8.3) совместно с римановой метрикой (7.16), соответствующей БИК (7.17), в точности воспроизводит поле и метрику решения Керра-Ньюмена (в координатах статьи [40]). В частном случае, при $a = 0$, решение (8.2) соответствует *стереографической проекции* $S^2 \to \mathbb{C}$, а поля превращаются в кулоновское электрическое поле с точечной сингулярностью и в метрику Райснера-Нордстрема.

[7] Дополнительные сингулярности поля ЯМ соответствуют *полюсам* функции $G(X)$ [21, 22].

[8] Соответствие между БИК и калибровочными полями в случае искривленного (алгебраически специального) пространства-времени рассматривалось в нашей работе [57].

Квантование электрического заряда является фундаментальным свойством решений ГСУ, обнаруженным в [10, 23]. Это свойство следует из условий самодуальности (6.17), которое совместно с калибровочной симметрией ГСУ приводит к ограничению $q = N/4, N \in \mathbb{Z}$ на величину электрического заряда поля, ассоциированного с любым решением ГСУ [9]. Это свойство имеет как топологические, так и чисто динамические причины, связанные с переопределенной структурой ГСУ. Доказательство общей теоремы квантования заряда представлено в работах [26, 58].

При этом необходимо заметить, что в отличие от некоторых других, чисто топологических подходов к проблеме эарядового квантования [43, 44] в контексте ГСУ заряд фундаментального статического решения (8.2) может иметь лишь одно единственное по модулю значение и, как следствие, естественным образом рассматриваться как *элементарный заряд*. Вместе с известным замечательным свойством решения Керра-Ньюмена иметь гиромагнитное отношение $g = 2$, равное его значению для дираковской частицы [45], появление в теории элементарного заряда делает гораздо более оправданными попытки интерпретации фундаментального решения (8.2) в качестве классической модели электрона. Такие попытки предпринимались, например, в моделях Лопеса [46], Израэля [47] или Буринского [48], основанных исключительно на системе уравнений Эйнштейна-Максвелла) [10].

Согласно общей теореме, доказанной в работе [41] (см. также [48]), все *статические* решения уравнений БИК (а, следовательно, и ГСУ) с ограниченным в 3-мерном пространстве сингулярным множеством (ниже мы называем их *частицеподобными* [27]) сводятся (с точностью до 3-мерных вращений и трансляций) к решению Керра (8.2). Если, однако, снять требование статичности и выйти из класса функций (7.18), рассматривавшихся в [40], то можно обнаружить много зависящих от времени “частицеподобных” решений с ограниченными сингулярностями различных размерностей, с разной временно́й динамикой и пространственной формой.

В частности, *аксиально симметричное* решение частицеподобного типа, генерирующееся функцией

$$\Pi = \kappa^0\kappa^1 + b^2G^2 = 0, \quad b = Const, \tag{8.4}$$

было найдено в [21, 39]. Для действительных b оно описывает *две точечные сингулярности с элементарными зарядами* $+1/4$ *и* $-1/4$, совершающие встречное гиперболическое движение. Электромагнитное поле такого решения

$$E_\rho = \pm\frac{8b^2\rho z}{\Delta^{3/2}}, \quad E_z = \mp\frac{4b^2M}{\Delta^{3/2}}, \quad H_\varphi = \pm\frac{8b^2\rho t}{\Delta^{3/2}}, \tag{8.5}$$

соответствует полю известного *решения Борна*. При этом использованы обозначения

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad s^2 = t^2 - z^2, \quad M = s^2 + \rho^2 + b^2, \quad \Delta = M^2 - 4s^2\rho^2,$$

а сингулярности определяются условием $\Delta = 0$. Для чисто мнимых $b = ia,\ a \in \mathbb{R}$ в начальный момент времени $t = 0$ имеем *электрически нейтральную* кольцевую сингулярность радиуса a, которая с течением времени расширяется в *тор*. По истечении

[9] В инвариантной при преобразованиях дуальности $\mathbb{B}$-электродинамике на самом деле квантуется не электрический, а эффективный *магнитно-электрический* заряд, а проблема магнитного монополя получает естественное решение [58].

[10] Недавно в нашей работе [59] было показано, однако, что керровская конгруенция является *неустойчивой в смысле Арнольда*, т. е. по отношению к малому изменению параметров генерирующей функции (8.1), при котором сингулярное керровское кольцо из статического превращается в равномерно расширяющееся и “высвечивается на бесконечность”. Решение проблемы устойчивости требует, по-видимому, перехода к новой “причинной геометрии Минковского с фазой”, см. раздел 9.

времени $t = |a|$ сингулярность превращается в *тор с самопересечением*, изображенный на рис. 1.

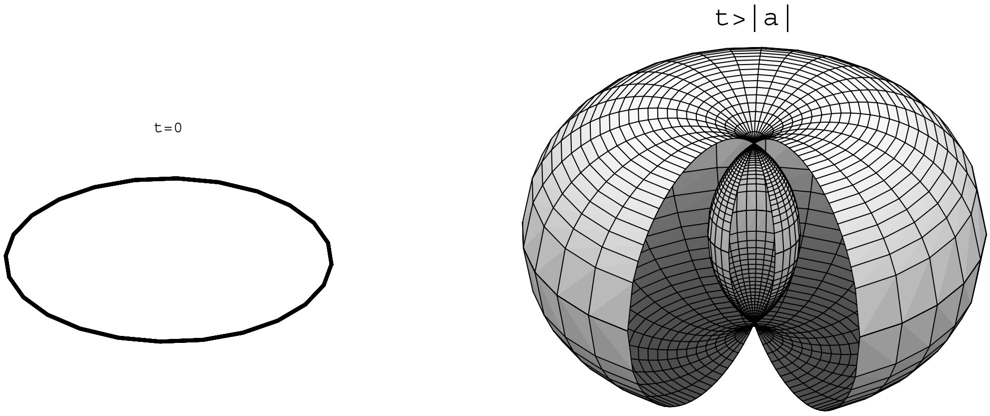

Рис. 1: Форма сингулярного множества для электромагнитного поля (8.5) электрически нейтрального решения (8.4) в начальный ($t = 0$) и последующий ($t > |a|$) моменты времени

Отметим здесь еще частицеподобное решение, для которого сингулярность в начальный момент времени имеет форму "восьмерки", а также решение волнового типа со *спиралевидной* сингулярностью [27]. Последнее решение (отвечающее более сложной, нежели квадратичная, генерирующей функции) представляет собой аналог электромагнитной волны в контексте алгебродинамики.

Если отказаться от квадратичности генерирующей функции, то можно прийти и к более широкому классу решений ГСУ и соответствующих им решений уравнений Максвелла с чрезвычайно сложной структурой сингулярного множества. В частности, в работах [18, 20, 61] описано решение, отвечающее *процессу аннигиляции* двух противоположно заряженных точечных сингулярностей, а также решение с "фотоноподобной" сингулярностью (в виде пары скрещенных колец), движущейся равномерно со скоростью света.

Таким образом, чисто алгебраическим методом был получен широкий класс точных или неявно заданных решений *вакуумных* уравнений Максвелла со сложной комбинированной структурой распределенных или точечных сингулярностей. Многие из этих решений не были известны ранее, и даже само их существование не обсуждалось. Эти решения определены всюду, кроме точек, в которых электромагнитное поле обращается в бесконечность. Множество таких сингулярных точек (в фиксированный момент времени) может быть 0-, 1- или даже 2-мерным (как в случае торообразной сингулярности (8.5)); оно может динамически изменять размерность. Однако для решений общего вида, не обладающих какой-либо симметрией, это сингулярное множество всегда *одномерно* и состоит из некоторого числа замкнутых или открытых кривых ("струн") [20]. Для частицеподобных решений сингулярное множество ограничено в 3-мерном пространстве.

Несмотря на исходную "вакуумность" исходных уравнений, сингулярности поля определяют пространственное распределение и динамику эффективного *источника поля*, в точках которого нарушается аналитичность решений. Тем самым, в отличие от обычного подхода, когда исходно задаваемый источник определяет электромагнитное поле в окружающем пространстве, в представленной концепции, наоборот, *почти* *всюду аналитическое поле, удовлетворяющее свободным уравнениям Максвелла, само определяет положение своих сингулярностей-источников*. Рассматриваемые решения определены, кроме сингулярного множества меры нуль, во всем бесконечном пространстве-времени, получаются алгебраически из некоторой произвольной генерирующей функции и *не требуют никаких граничных или начальных условий*.

Более того, в общем случае оказывается невозможным свести это множество сингулярностей к стандартному описанию, покрывая его δ-образными источниками, из-за существенной *многозначности* заряженных решений керровского типа. Тем не менее, все "квантовые числа", форма и динамика таких сингулярностей хорошо определены и нетривиальны, что связано со *скрытой нелинейностью* [43, 51] уравнений Максвелла (и Янга-Миллса) в алгебродинамическом подходе, а именно с их *вторичностью* по отношению к исходной нелинейной ГСУ (ее условий интегрируемости).

Именно наличие первичной "мастер-структуры" ГСУ обеспечивает существование некоторых "правил отбора" даже для решений линейных уравнений Максвелла, в том числе и ограничений на допустимые значения электрического заряда, а также приводит к нарушению принципа суперпозиции (поскольку сумма решений удовлетворяет линейным уравнениям Максвелла, но вовсе не обязательно – самой первичной ГСУ).

Исходная переопределенная ГСУ не обладает также и инвариантностью относительно пространственных отражений (а, возможно, и относительно обращения времени) [23]. Эти инвариантности восстанавливаются только на уровне *следствий* этой первичной системы уравнений, а именно уравнений Максвелла, Янга-Миллса и т. п. Такая ситуация, по-видимому, уникальна для теории поля и, с другой стороны, адекватна наблюдаемой физической реальности.

Более подробное обсуждение статуса сингулярных частицеподобных решений в алгебродинамическом подходе можно найти в работах [18, 23, 27, 58].

9 Комплексная геометрия бикватернионов и ансамбль дубликонов

Красивое представление решений уравнений БИК (а, следовательно, и бикватернионной ГСУ) было предложено в работах Е. Т. Ньюмена и др. [49, 52, 53] и развито затем в работе А. Я. Буринского, Р. П. Керра и З. Перьеса [50] и в последующих работах А. Я. Буринского и Е. Т. Ньюмена с сотр. В этом представлении рассматривается "виртуальный" точечный заряд, движущийся по некоторой произвольной "кривой" $\{z_\mu(\tau)\}, \quad \tau \in \mathbb{C}$ в *комплексифицированном* пространстве Минковского $\mathbb{C}\mathbf{M}$. В этом случае "след" *комплексного изотропного ("светового") конуса* "движущегося" заряда на *действительном* пространстве-времени $\mathbf{M}$ формирует изотропную конгруенцию лучей, которая всегда является бессдвиговой.

Конгруенция Керра представляет лишь простейший пример такого представления (генерирующий ее точечный источник "покоится" в некотором месте "дополнительного" к $\mathbf{M}$ *мнимого* подпространства $\mathbb{C}M$). Приведенные выше решения ГСУ и соответствующие им БИК все могут быть получены из такого *представления Ньюмена*. С другой стороны, эти примеры показывают, что для подобных *"комплексифицированных" полей Лиенара-Вихерта* структура сингулярного множества может быть очень сложной и состоит, в общем случае, из большого числа одномерных кривых – струн.

В контексте алгебродинамики комплексифицированное пространство Минковского $\mathbb{C}\mathbf{M}$ с необходимостью возникает как полное векторное пространство алгебры бикватернионов $\mathbb{B}$. В то же время ограничение координат на вещественное пространство-время $\mathbf{M}$ выглядит искусственным и мотивированным только физическими соображениями. Действительно, это подпространство даже не образует подалгебры в $\mathbb{B}$ и не является инвариантным ни относительно автоморфизмов $\mathbb{B}$, ни относительно полной группы преобразований симметрии (4.1).

С другой стороны, группа автоморфизмов бикватернионов $SO(3, \mathbb{C})$ содержит 6 вещественных параметров и 2:1 изоморфна группе Лоренца $SO(3, 1)$, и не известно ни одной другой алгебры с подобными свойствами. Это свойство алгебры $\mathbb{B}$ было использовано, в частности, при построении *кватернионной теории относительности* А. П. Ефремова [54], в контексте которой инвариантное пространство $\mathbb{C}^3$ рассматривалось в качестве первичного физического пространства-времени с тремя пространственными и тремя временны́ми координатами. При этом для сведения исходного трехмерного времени к физическому одномерному накладывались дополнительные условия ортогональности.

С нашей точки зрения, такая "экзотическая" интерпретация свойств алгебры бикватернионов не является необходимой. Дело в том, что инвариантное подпространство $\mathbb{C}^3$ алгебры $\mathbb{B}$ естественным образом отображается в "причинную" часть физического пространства-времени Минковского с дополнительными внутренними переменными [55]. А именно, основной комплексный инвариант этого пространства

$$\sigma = (z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2 \tag{9.1}$$

распадается на некомпактную "модульную" часть и компактную "фазовую". Первая часть, представленная вещественным положительно определенным инвариантом

$$S^2 := \sigma\sigma^* \geq 0, \tag{9.2}$$

как раз и определяет наблюдаемую "пространственно протяженную" физическую геометрию, тогда как вторая "фазовая" часть инварианта σ воспринимается как определяющая внутреннюю геометрию "слоя". Так вот, основной результат работы [55] состоит в том, что положительно-определенный $SO(3, \mathbb{C})$ -инвариант (9.2) может быть эквивалентным образом представлен в виде интервала Минковского:

$$S^2 = \sigma\sigma^* \equiv T^2 - |\vec{X}|^2, \tag{9.3}$$

где *вещественные* величины

$$T := (\vec{z}, \vec{z}^*), \quad \vec{X} := i[\vec{z}, \vec{z}^*] \tag{9.4}$$

при $SO(3, \mathbb{C})$-вращениях преобразуются как временна́я и пространственные координаты Минковского при преобразованиях Лоренца. В определении (9.4) круглые и квадратные скобки обозначают скалярное и векторное произведение векторов соответственно.

Таким образом, алгебру $\mathbb{B}$ действительно можно рассматривать как *алгебру пространства-времени*, причем геометрия Минковского индуцируется ею через *квадратичное отображение* комплексных координат инвариантного подпространства $\mathbb{C}^3$ полного векторного пространства $\mathbb{B}$ *во внутреннюю, "причинную" часть светового конуса* $\mathbf{M}$*, включая его изотропную границу*. При этом, помимо *положительно определенного инварианта Минковского (!)* (9.3) возникает другой, *фазовый инвариант* преобразований Лоренца, который может оказаться тесно связанным с квантовыми свойствами материи и явлениями квантовой интерференции в частности.

Согласно обсуждаемым здесь представлениям, первичная, "истинная" динамика материальных образований (сингулярностей и др.) имеет место именно в исходном комплексном пространстве, а наблюдаемая – в индуцированном им "причинном пространстве-времени Минковского". Такой подход позволяет, в частности, успешно реализовать красивую старую идею Уилера-Фейнмана о "размножении электронов".

А именно, пусть, согласно представлению Ньюмена, точечная частица "движется" в $\mathbb{C}\mathbf{M}$ по "траектории" $\{z_\mu(\tau)\}, \quad \tau \in \mathbb{C}$ достаточно сложного вида. Тогда можно показать [62], что положение этой частицы будет жестко коррелировано с другими ее положениями на собственной Мировой линии, причем эта корреляция реализуется через одинаковое значение твисторного поля конгруенции и, соответственно, – через уравнение *комплексного изотропного конуса*.

Ситуация во многом напоминает известную процедуру Лиенара-Вихерта в электродинамике, однако, в отличие от действительного случая, в комплексном пространстве уравнение "светового конуса" имеет значительное (если не бесконечное) счетное число корней. Соответственно, частица будет "видеть" и "получать сигналы" от "самой себя" в разных ее положениях на единой траектории. Возникающий ансамбль тождественных, но различным образом расположенных и движущихся частиц был в работе [62] назван ансамблем *дубликонов* ("duplicons").

Помимо идеи дубликонов, в рассматриваемом контексте неизбежно возникает проблема *комплексного времени*, связанная с общей концепцией времени в алгебродинамике [18,60,62]. А именно, каждому из решений ГСУ соответствует некоторая (бессдвиговая) изотропная конгруенция (БИК) лучей (раздел 7). Эта конгруенция может рассматриваться как основной элемент картины Мира, возникающей в алгебродинамике – как поток первичного света, "Предсвета" [18, 60]. При этом вся "материя", представленная в теории частицеподобными сингулярными образованиями ассоциированных полей, в такой картине предстает как система *каустик* первичного предсветового потока.

Возвращаясь теперь к проблеме времени, отметим, что на $\mathbf{M}$ временна́я координата может рассматриваться как *параметр вдоль лучей фундаментальной конгруенции*, и определяющим свойством времени в таком подходе является свойство *воспроизводимости*, сохранения первичного твисторного поля, имеющее место вдоль лучей. Образно выражаясь, *время выступает в теории как автоморфизм первичного поля.* При этом электромагнитное и другие поля, выражаемые через проиводные от твисторного поля, разумеется, не сохраняются вдоль лучей, равно как и каустики-частицы. Именно это и определяет другую фундаментальную функцию времени, отвечающую за *изменчивость* материальных форм.

Картина существенно меняется в комплексном пространстве $\mathbb{C}\mathbf{M}$, где твисторное поле определено с точностью до двух комплексных параметров и остается постоянным вдоль 2-мерных комплексных плоскостей [19, 62]. Если же дополнительно требовать сохранения "материальной" структуры каустик, то остается лишь один свободный параметр, который можно рассматривать как *комплексное время* [62]. При этом, однако, временно́й порядок следования событий становится неопределенным, и в отсутствии каких-либо оснований для его фиксации наиболее естественно рассматривать изменения комплексного времени как *вполне случайные.* Возникающая тогда для ансамбля дубликонов стохастичность в комплексном пространстве может оказаться тесно связанной с квантовой теорией в формулировке, близкой к фейнмановской. Однако эти идеи еще только предстоит реализовать.

Заключение

В данной статье мы не ставили своей основной задачей представить ни новую полевую модель, ни новый алгебраический метод нахождения новых сложных решений известных уравнений классической теории поля. Вместо этого мы пытались здесь последовательно выявить свойства самих дифференцуируемых функций бикватернионного переменного, т. е. построить новую версию некоммутативного анализа. Тем не менее, общие условия $\mathbb{B}$-дифференцируемости [10, 23, 24] редуцируются к генерирующей системе уравнений (5.9), которая обладает врожденной калибровочной и 2-спинорной (твисторной) структурами и обнаруживает удивительные связи со структурами и с языком, общепринятыми в релятивистской теории поля.

В сущности, необходимо сделать лишь три основных предположения для того, чтобы физически интерпретировать исходную абстрактную математическую схему:

1) о пространстве-времени как о (вещественном или инвариантном комплексном) подпространстве векторного пространства $\mathbb{B}$-алгебры,
2) о физических полях как дифференцируемых функциях $\mathbb{B}$-переменного,
3) о частицах как пространственно ограниченных сингулярностях напряженностей (кривизн) калибровочного и метрического полей, непосредственно сопоставляемых первичным $\mathbb{B}$-дифференцируемым функциям-полям.

С физической же точки зрения, ГСУ может рассматриваться как весьма специфическая система уравнений поля (нелинейная, нелагранжева, переопределенная) для эффективно взаимодействующих 2-спинорного и электромагнитного полей, причем уравнения для обоих не постулируются, а следуют из условий интегрируемости или "сверток" самой ГСУ.

Твисторная структура также вполне естественным, "динамическим" образом возникает в теории в процессе интегрирования ГСУ и делает возможным получение всех ее решений, как и соответствующих им решений уравнений калибровочных полей, замечательно простым алгебраическим методом [11].

В частности, из алгебраического уравнения (7.9) сразу же может быть получен широкий класс точных решений линейных уравнений Максвелла с протяженной, но ограниченной в пространстве структурой сингулярности. Условие (7.10) играет при этом роль *уравнений движения* для таких частицеподобных объектов, в то же время определяя их характеристики и пространственную форму и реализуя тем самым эйнштейновскую концепцию *сверхпричинности* [38].

Как следствие невыполения принципа суперпозиции для решений исходной ГСУ, эволюция таких частицеподобных объектов моделирует физическое взаимодействие, а динамические *перестройки* структуры сингулярного множества могут интерпретироваться как *взаимопревращения* частиц, в том числе как акты излучения / поглощения. Все эти процессы, очевидно, обнаруживают тесную связь с теорией особенностей дифференцируемых отображений и теорией катастроф [36].

Мы надеемся также, что по меньшей мере некоторые замечательные свойства ГСУ могут представлять интерес в общем контексте теории поля. Отметим здесь, в частности:

1) возможность расширения класса физически интересных калибровочных полевых моделей с учетом обнаруженной для ГСУ "слабой" калибровочной симметрии (6.4) и за счет использования связностей типа (6.5), (6.6);
2) естественную возможность получения "правил отбора" для электрического заряда, спина и других характеристик, исходя из переопределенной структуры уравнений поля;
3) полную алгебраизацию первичных дифференциальных уравнений в частных производных для фундаментальных полей, обладающих твисторной структурой;
4) возможность определения пространственного расположения и эволюции особенностей поля без непосредственного нахождения самих решений полевых уравнений (мето-

[11] Отметим, что в твисторном подходе Р. Пенроуза [19,30] для получения решений волновых уравнений достаточно провести интегрирование функций твисторного аргумента; в рассматриваемом подходе даже это интегрирование не является необходимым.

дом исключения самой полевой функции $G(X)$ из системы алгебраических уравнений (7.9) и (7.10).

Можно представить себе по меньшей мере три возможных точки зрения на смысл алгебраических структур, представленных в данной статье, и на основную ГСУ в том числе: как на красивую математическую "игрушку", как на мощный метод получения решений известных уравнений поля и, наконец, как на фундаментальную динамическую систему уравнений, первичную по отношению к общепринятым лагранжевым системам. Причем построение классической динамики на основе переопределенных систем типа ГСУ предполагает и использование совершенно новых методов квантования. С другой стороны, можно при этом пытаться объяснить квантовые свойства в целом через, например, стохастическое поведение ансамбля частицеподобных (сингулярных) объектов (дубликонов и т. п.) или привлекая другие, но чисто классические и алгебраические по природе идеи и методы.

Во всяком случае, для нахождения правильного подхода к квантованию и к объяснению квантовых свойств материи вообще необходимо вначале тщательно изучить свойства самих классических решений как на фоне обычного пространства-времени Минковского, так и при рассмотрении естественно индуцируемой свойствами $\mathbb{B}$-алгебры "причинной геометрии Минковского с фазой", кратко рассмотренной в последнем разделе. Мы считаем, что именно эта геометрия на самом деле может оказаться истинной геометрией физического пространства-времени, а также быть ответственной за универсальные квантовые свойства материи и за квантовую неопределенность (в контексте изначально чисто классической теории).

Во всяком случае, уже обнаруженные свойства $\mathbb{B}$-дифференцируемых функций-полей и многочисленных геометрофизических структур, порождаемых ими, выглядят настолько необычно и, с другой стороны, настолько коррелируют с моделями и математическим аппаратом теоретической физики, что заставляют задуматься о возможном *Числовом* происхождении фундаментальных законов природы [60,63] и обратиться вновь, на современном математическом и физическом уровне понимания, к древней философии Пифагора и его последователей.

* * *

Автор признателен своим ученикам Джозефу А. Ризкалла и Владимиру Н. Тришину за многолетнее сотрудничество. Многие важные результаты, представленные в статье, были в свое время получены в совместных с ними работах. Я также благодарен Дмитрию Г. Павлову за поддержку и приглашение к участию в конференции по финслеровой геометрии "Каир-2006".

Литература

[1] Гамильтон У. Р. Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. М.: Наука. 1994. 560 с.

[2] Penrose R. The Road to Reality. A complete guide to the laws of the Universe. London: Jonathan Cape. 2004. 1094 p.

[3] Gsponer A., Hurni J.-P. Quaternions in mathematical physics (1): Alphabetical bibliography. // Preprint www.arXiv.org / math-ph /0510059; (2): Analytical bibliography. // Preprint www.arXiv.org / math-ph /0510092

[4] Атья М. Геометрия и физика узлов. М.: Мир. 1995. С. 184

[5] Sheffers G. // *Berichte Sächs. Acad. Wiss.*, **Bd. 45**, 1893, P. 828

[6] Павлов Д. Г. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1 (1)**, 2004, С. 17; С. 31

[7] Гарасько Г. И. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1 (1)**, 2004, С. 75

[8] Владимиров В. С., Волович И. В. // *Теор. Мат. Физ.*, **59**, 1984, С. 3; **60**, 1984, С. 169

[9] Sudbery A. // *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **85**, 1979, P. 199; русский перевод см.: *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **2 (2)**, 2004

[10] Кассандров В. В. Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика. М: Изд-во УДН. 1992. 152 с.

[11] Evans M., Gürsey F., Ogievetsky V. *Physical Review*, **D47**, 1993, P. 3496; русский перевод см.: *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1 (3)**, 2005

[12] Fueter R. // *Monatsh. Math. Phys.*, **43**, 1931, P. 69; *Comm. Math. Helv.* **4**, 1931. P.9; **7**, 1934, P. 307; **8**, 1935, P. 371; **10**, 1937, P. 306

[13] Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. Казань: Изд-во КГУ. 1985. Глава 5

[14] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. Кватернионы в релятивистской физике. Минск: Наука. 1989. 247 с.

[15] Deavours A. // *Amer. Math. Monthly*, **80**, 1973, P. 995

[16] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука. 1979. 760 с.

[17] Kassandrov V. V. // *Gravitation & Cosmology*, **8**, Suppl. 2, 2002, P. 57–62; www.arXiv.org / math-ph / 0311006

[18] Кассандров В. В. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1 (1)**, 2004, С. 89; English version: Preprint www.arXiv.org / hep-th / 0312278

[19] Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т. 2. М.: Мир. 1988. 576 с.

[20] Kassandrov V. V. // In: *Proc. Int. Conf. on NonEuclidean Geometries*, ed. V. I. Redkov. Minsk: Institute of Physics of Belarus Press, 2006 (to be printed); http://dragon.bas-net.by/bgl5/proc.htm

[21] Ризкала Дж. А. Геометризация электромагнетизма на основе пространств со связностью Вейля-Картана. Кандидатская диссертация. М.: РУДН. 1999. 125 с.

[22] Kassandrov V. V., Rizcallah J. A. Twistor and “weak” gauge structures in the framework of quaternionic analysis. // Preprint www.arXiv.org / math-ph / 0311006

[23] Kassandrov V. V. // *Gravitation & Cosmology (Moscow)*, **3**, 1995, P. 216; www.arXiv.org / gr-qc / 0007026

[24] Kassandrov V. V. // *Acta. Applic. Math.*, **50**, 1998, P. 197

[25] Kassandrov V. V. // In: *Quasigroups and Nonassociative Algebras in Physics*, ed. J. Lõhmus and P. Kuusk. Tallinn: Institite of Physics of Estonia Press, 1990. P. 202

[26] Кассандров В. В.// *Вестник РУДН, сер. Физика*, **1**, 1993, P. 59

[27] Kassandrov V. V., Trishin V. N. // *Gravitation & Cosmology (Moscow)*, **5**, 1999, P.272; www.arXiv.org / gr-qc / 0007027

[28] Robinson I. // *J. Math. Phys.*, **2**, 1961, P. 290

[29] Tod K. P. // *Class. Quant. Grav.*, **13**, 1996, P. 2609

[30] Penrose R. // *Int. J. Theor. Phys.*, **1**, 1968, P. 61; *J. Math. Phys.*, **10**, 1969, P. 38

[31] Кассандров В. В., Ризкалла Дж. А. // В сб: *Геометризация физики II, Труды Межд. конф. памяти А. З. Петрова*, ред. В. И. Башков. Казань: Изд-во КГУ, 1996, С. 137

[32] Hall G. S. // *J. Math. Phys.*, **32**, 1991, P. 181; **33**, 1992, P. 2638

[33] Buchdahl H. A. // *Nuovo Cimento*, **10**, 1958, P. 96; **11**, 1959, P. 496; **25**, 1962, P.486

[34] Penrose R. // *Gen. Rel. Grav.*, **12**, 1980, P. 225

[35] Plebanski J. // *Acta Polon.*, **27**, 1965, P. 361

[36] Арнольд В. И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М: Изд-во МЦНМО. 2004. 672 с.

[37] Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М: Наука. 1996. 334 с.

[38] Эйнштейн А. Собрание сочинений. Т. 4. М: Наука. 1967. С. 109;
Einstein A. // *Forschun. und Forschr.*, **5**, 1929, P. 248

[39] Кассандров В. В., Ризкалла Дж.А. // В сб: *Современные проблемы теории поля*, ред. А. В. Аминова. Казань: Изд-во КГУ, 1998, С. 176; www.arXiv.org / gr-qc / 9809078

[40] Debney G. C., Kerr R. P., Schild A. // *J. Math. Phys.*, **10**, 1969, P. 1842

[41] Kerr R. P., Wilson W. B. // *Gen. Rel. Grav.*, **10**, 1979, P. 273

[42] Крамер Д., Штефанн Х., Мак-Каллум М., Херльт Э. Точные решения уравнений Эйнштейна. М: Энергоиздат. 1982. 416 с.

[43] Ranãda A. F. // *An. Fis. (Madrid)*, **A87**, 1991, P. 55; www.arXiv.org/ hep-th / 9802166

[44] Журавлев В. Н. // В сб: *Гравитация и электромагнетизм, № 6*, ред. А. Богуш и др. Минск: Университетское. 1998. С. 105

[45] Carter B. // *Phys. Rev.*, **174**, 1968, P. 1559

[46] Lopez C. A. // *Phys. Rev.*, **D30**, 1984, P. 313

[47] Israel W. // *Phys. Rev.*, **D2**, 1970, P. 641

[48] Буринский А. Я. // В сб: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып.11*, ред. К. П. Станюкович. М.: Атомиздат. 1980. С. 47

[49] Newman E. T. // *Journal Math. Phys.*, **14**, 1973, P. 102

[50] Burinskii A.Ya. // In: *Proc. IV Hungarian Relativity Workshop* ed. P. R. Kerr and Z. Perjés. Budapest: Académiai Kiadó, 1992, P. 149;
Burinskii A. Ya., Kerr R. P., Perjés Z. // Preprint www.arXiv.org/ gr-qc / 9501012

[51] Ranãda A. F., Trueba J. L. // *Phys. Lett.*, **A202**, 1995, P.337; *Phys. Lett.*, **A235**, 1997, P. 25

[52] Lind R. W., Newman E. T. // *Journal Math. Phys.*, **15**, 1974, P.1103

[53] Newman E. T. // *Physical Review*, **D65**, 2002, P. 104005; arXiv.org / gr-qc / 0201055

[54] Yefremov A.P. // *Gravitation & Cosmology (Moscow)*, **2**, № 1, 1995, P. 77; № 4, P. 335

[55] Kassandrov V. V. // *Gravitation & Cosmology (Moscow)*, **11**, 2005, P.354; www.arXiv.org / gr-qc / 0602088

[56] Kassandrov V. V., Rizcallah J. A. // In: *Geometrical and topological ideas in modern physics*, ed. V. A. Petrov. Protvino: Institute for high energy physics. 2002. P. 199

[57] Kassandrov V. V., Trishin V. N. // *General Relativity and Gravitation*, **36**, 2004, P. 1603; www.arXiv.org / gr-qc / 0401120

[58] Kassandrov V. V. // In: *Has the last word been said on classical electrodynamics?*, eds. A. Chubykalo, V. Onoochin, A. Espinoza, R. Smirnov-Rueda. Rinton Press, 2004, P. 42; www.arXiv.org / physics / 0308045

[59] Kassandrov V. V. // In: *Proceedings of Int.School on geometry and analysis, in memory of N. V. Efimov.* Rostov-na-Donu: Rostov Univ. Press. 2004. P. 65; www.arXiv.org / gr-qc / 0602046

[60] Кассандров В. В. // В сб.: *Математика и практика. Математика и культура. Вып.2*, ред. М. Ю. Симаков. М.: Самообразование. 2001. С. 61; www.chronos.msu.ru

[61] Кассандров В. В. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1(1)**, 2004, С. 91–107; www.chronos.msu.ru

[62] Kassandrov V. V. // In: *Proc. Int. Conf. "Physical Interpretations of Relativistic Theory"*, eds. M. C. Duffy et al. M: Bauman Tech. Univ. Press. 2005. P. 45; www.arXiv.org / gr-qc / 0602064

[63] Кассандров В. В. // *Дельфис*, **2**, 2005, С. 61