К ВОПРОСУ О КВАРТИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

П. Д. Сухаревский

Обсуждаются идеи А. Д. Сахарова о многолистной модели Вселенной в приложении к современной космологии. Обосновывается применение квартичной дифференциальной формы для построения метрики многомерного пространства. Построена неассоциативная алгебра квартичных антикоммутирующих матриц, квадратом которых являются квадратные антикоммутирующие матрицы Паули и Дирака. Найдены уравнения движения – квартичные аналоги уравнений Дирака с введением квартичных спиноров, получен соответствующий этим уравнениям лагранжиан. Введено необходимое для решения задач с многомерной формой бесконечномерное расширение кватернионов и их матричное представление.

Модель А. Д. Сахарова и «Big Rip»

В 70–80 годах прошлого столетия известный физик-ядерщик, внесший определяющий вклад в создание первой в мире термоядерной бомбы, академик АН СССР Андрей Дмитриевич Сахаров опубликовал несколько статей о «многолистных моделях Вселенной» [1]. В них обсуждаются «пульсирующие» или «осциллирующие» космологические модели, которые издавна привлекали внимание ученых. Термин «многолистная модель Вселенной», предложенный Сахаровым, как он пишет в 1969 году, представлялся ему «более выразительным, больше соответствующим эмоциональному и философскому смыслу грандиозной картины многократного повторения циклов бытия». Возможно, но нам это не известно, что относительно термина у него были и другие глубокие соображения, связанные с листами римановой поверхности, возникающими в результате интегрирования пути в квадратичной метрике.

В 1970 вышел его первый препринт «Многолистная модель Вселенной» [2]. В нем при обосновании гипотезы о многолистной структуре Вселенной Сахаров ссылался на идеи астрофизика И. Д. Новикова [3] о «сшивании» при гравитационном коллапсе двух четырехмерных пространств, одно из которых находится в стадии сжатия, а другое расширения. Сахаров рассматривал бесконечную последовательность таких попарно сшитых пространств, которые он и называл листами.

Его второе исходное предположение – использование предельного случая фридмановской модели Вселенной с метрикой:

$$ds^2 = dt^2 - \{a(t)\}^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{1}$$

и законом изменения масштаба: $a(t) \sim | t |^{2/3}$.

Учитывая, что особенностью метрики (1) при $t \to \infty$ является рост сколь угодно малых возмущений плотности в неограниченное число раз, в [2] сделан вывод о возможности гравитационных коллапсов при $\Delta\varepsilon/\varepsilon \sim 1$, где ε – средняя плотность энергии, включая энергию гравитационной природы. В случае Вселенной, заполненной пылью, $\varepsilon \sim 1/a^3$. Сахаров в [2] полагал, что так называемые «преждевременные» коллапсы в сжимающемся мире, рассматривавшиеся ранее в [4, 5], которым соответствуют антиколлапсы задержанных ядер в расширяющемся мире, являются теми же физическими процессами, обусловленными флуктуациями $\Delta\varepsilon \sim \varepsilon$.

В последние годы в литературе активно обсуждается гипотеза Калдвелла, Камионковского и Вейнберга «Призрачная энергия и космический судный день» (Phantom Energy and Cosmic Doomsday) [6]. В ней доказывается, что наличие во Вселенной темной энергии, которая для значений характеризующего ее параметра («квинтэссенции»)

$w \equiv p/\varepsilon$ в интервале $-1 < w < -1/3$ приводит к наблюдаемому ускоренному расширению Вселенной ($\varepsilon \sim 1/a^{3(1+w)}$), в случае $w < -1$ приведет за конечное время к разрыву Вселенной. Эта катастрофа Вселенной получила специальное название *«Big Rip»* («Большой Разрыв»). Легко заметить, что этот процесс, по сути, аналогичен случаю, рассматривавшемуся Сахаровым для флуктуаций во фридмановской Вселенной при $t \to \infty$ в [2] и в его последующих статьях, приведенных в [1]. Разница только во времени наступления катастрофы. Поэтому можно предположить, что Big Rip приведет не к гибели Вселенной, а к сшиванию ее двух листов и перетеканию вещества на другой лист с последующим сжатием Вселенной и возможным поворотом стрелы времени. Так как при $t < 0$ по Сахарову действуют статистические законы, обращенные во парадокс обратимости в его модели не существует. Таким образом, идеи о многолистной структуре Вселенной вновь становятся актуальными.

Заметим, что парные листы Вселенной фактически определены у Сахарова тем, что он пользуется квадратичной метрикой. В последнее время, в связи с рассмотрением многомерных моделей Вселенной, большой интерес вызывает рассмотрение пространств с финслеровой метрикой. Предпочтение по разным причинам отдается пространствам с квартичной метрикой, иногда называемым квадрапространствами [7]. Любопытно, что, как отмечает Д. Г. Павлов [8], который является, по-видимому, основоположником данного направления, среди изученных пространств со стандартной квадратичной метрикой выделяются пространства с двумя измерениями. В двумерном случае, согласно теореме Лиувилля [9], круг преобразований, относящихся к конформным, существенно выше, что приводит к существованию значительного разнообразия аналитических функций комплексного переменного, каждой из которых соответствует определенное конформное отображение на евклидовой плоскости. Так что квадратичная метрика наиболее адекватна пространствам с двумя, а не с четырьмя измерениями. Но эти двумерные пространства, естественно, могут быть вложены в четырехмерные.

При этом возникает естественный вопрос (и напрашивается соответствующий ответ): какая метрика наиболее адекватна пространствам с четырьмя измерениями?

Прежде, чем на него ответить, заметим, опираясь на работу [10] из того же сборника [7], что с чисто математической точки зрения размерность четыре оказывается самой сложной, так как дополнительные $d - 4$ размерности дают новую свободу действий. Например, как отмечено в [10], в размерности ≥ 5, когда возникают самопересечения комплексов внутри многообразий, малыми шевелениями их можно устранить. В малых же размерностях это невозможно.

По мнению автора работы [10] «размерность четыре с топологической точки зрения – единственная размерность, где сталкиваются столь разные техники и появляются вопросы, казалось бы, не относящиеся друг к другу. А решение многих из них потребует развития еще более удивительных техник алгебры, геометрии и топологии».

Учитывая вышеприведенные замечания (последнее из них является наиболее вдохновляющим), предположим, что для четырех измерений наиболее адекватной должна быть именно квартичная метрика. В этом случае изменятся и представления о многолистных моделях Вселенной Сахарова. Как будет показано ниже, это уже не будет последовательность попарно сшитых (или склеенных) листов четырехмерных пространств, а более сложная циклическая конструкция с возможной перестановкой четырех листов четырехмерных пространств во время коллапсов Вселенной.

Аксиоматическое обоснование квартичной геометрии

Рассмотрим некоторые математические соображения, подтверждающие эти предположения. Прежде всего, обратимся к аксиоматическому построению дифференциально-геометрического многообразия, которое позволяет из первых принципов исследовать физическую структуру пространства.

Как известно, имеется три магистральных направления построения геометрии в целом, которые в принципе могут быть приспособлены и для построения геометрии в малом:

Первое направление – идущее от знаменитой книги Давида Гильберта «Основания геометрии» [11], написанной в конце 19 века. Это наиболее полное аксиоматическое построение евклидовой геометрии. В этом построении она статическая, как и в трактате Евклида «Начала», появившемся около 300 лет до новой эры. Отказавшись от аксиомы о параллельных прямых, ее можно преобразовать в гиперболическую геометрию Лобачевского, но невозможно обобщить на эллиптическую геометрию Римана.

Второе направление – это векторное построение геометрии, впервые проведенное в известной книге Германа Вейля «Пространство. Время. Материя» (1918 г.) [12]. Огромная роль векторного пространства в современных теоретических исследованиях и легкость обобщения аксиом на тензорный анализ делают это направление чрезвычайно привлекательным.

Третье направление – построение геометрии на основе понятия симметрии, проведенное Фридрихом Бахманом в послевоенные годы и завершившееся в 1959 году изданием монографии [13]. Важность теории групп в современной физике и, особенно, группы движения, возможность трансформации системы аксиом как на гиперболическую, так и на эллиптическую геометрию выдвигают это направление на лидирующую позицию среди этих трех классических направлений.

Четвертое направление, которое обещает стать столь же магистральным, это построение геометрии на основе теории физических структур, родившееся в работах новосибирского математика Ю. И. Кулакова и его группы [14]. Математический аппарат теории физических структур представляет собой алгебраическую теорию отношений между элементами произвольной природы. В дальнейшем оно было модернизировано и получило мощное развитие в работах профессора физфака МГУ им. М. В. Ломоносова Ю. С. Владимирова и его учеников [15].

Как отмечается в предисловии редактора книги [13] И. М. Яглома, система аксиом Бахмана не обладает свойством полноты, в отличие от аксиоматики Гильберта. Это, в принципе, не снижает ее научную ценность, но стимулирует дальнейшие исследования. В частности, в ней ничего не говорится о конгруэнтности, упорядоченности и непрерывности, которые в дальнейшем используются в групповых отношениях, о скорости отображения.

Учитывая, что конгруэнтность входит в понятие группы движения, а отсутствие отношений и аксиом порядка и непрерывности позволяет включать в рассмотрение эллиптическую геометрию, можно говорить об определенной компенсации неполноты системы аксиом Бахмана. Но отсутствие аксиомы о скорости отображения нечем компенсировать, что снижает понимание физических процессов и, в целом, проблемы геометризации физики.

В связи с этим рассмотрим два утверждения, которые представляются автору аксиомами [16], лежащими в основе физической (материальной) геометрии. При этом под термином «физическая (материальная) геометрия» будем понимать абстрактный объект, которому кроме пространственных отношений присущи свойства, описываемые уравнениями и полями, характерными для реальных физических тел. Из приведенных выше направлений аксиоматического построения геометрии следует, что такое понимание геометрии не противоречит исторической тенденции.

(I) – *Аксиома отображения* (измерения). В физической континуальной геометрии можно ввести параметр отображения (измерения) τ такой, что скорость отображения по этому параметру $ds/d\tau = const$, где ds – бесконечно малый интервал между двумя точками (событиями). Параметр τ позволяет произвести равномерную разметку координатной сетки в дифференциально-геометрическом многообразии.

Эта аксиома определяет в дифференциально-непрерывной форме возможность определения скорости движения (или отображения симметрий по Бахману). Хотя в системе аксиом Бахмана нет понятия о дифференциальной непрерывности, она допускает такое представление через теорию групп. Но под движениями в теории групп, а значит и в аксиоматике Бахмана, понимается только чисто геометрические взаимно однозначные отображения множеств точек объектов и прямых на себя, сохраняющие отношения инцидентности (принадлежности) и порядка и переводящие отрезки и углы в конгруэнтные (тождественно равные) отрезки и углы. Это позволяет избежать ответов, в частности на парадокс (апорию) Зенона «Ахиллес и черепаха» о противоречивости некоторых свойств движения, но неудовлетворительно с точки зрения физического понимания процессов.

В то же время действительно при любой скорости реального движения (постоянной или переменной) параметр τ может быть определен, так как он не задан никакими предварительными условиями. С другой стороны, если параметр τ связать с параметром времени реального движения t, то аксиома отображения перейдет в постулат о существовании некоторой постоянной скорости реального движения – отсутствия сил в физической геометрии. В отличие от самой аксиомы, этот постулат может нарушаться в связи с медленной эволюцией масштабов физической геометрии. Но он позволяет строить теорию, геометризующую наблюдаемые движения в каждой точке с использованием в общем случае дифференциальной формы m-ой степени, например, по алгоритму:

$$ds = cd\tau = [g_{\mu\nu\ldots\varepsilon} dx^\mu dx^\nu \ldots dx^\varepsilon]^{1/m} = [g_{\mu\nu\ldots\varepsilon} dx^\mu/dt\; dx^\nu/dt\; \ldots\; dx^\varepsilon/dt]^{1/m} dt. \qquad (2)$$

Конструкции дифференциалов могут быть и более сложной формы. В частности, при $m = 4$ в нее легко вложить зарядовые, струнные, мембранные и гипермембранные объекты, которые в дифференциальном представлении будут иметь вид:

$$(ds')^4 = g_{1\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu dx^\nu dx^\gamma d\lambda^\xi + g_{2\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu dx^\nu d\sigma^{\gamma\xi} + \\ + g_{3\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu d\upsilon^{\nu\gamma\xi} + g_{4\mu\nu\gamma\xi} d\sigma^{\mu\nu} d\sigma^{\gamma\xi} + g_{5\mu\nu\gamma\xi} d\omega^{\mu\nu\gamma\xi}. \qquad (3)$$

Благодаря возможности вложения в квартичные формы дифференциальных форм меньшего порядка, объекты с $m < 4$, в том числе квадратичные и линейные, могут приобрести доминирующий вес, даже когда $\mid dx/dt \mid \ll 1$.

В частности, одной из возможностей такого вложения может быть самоорганизация (или квантование) любого из пяти членов формы (3). Например, член $g_{1\mu\nu\gamma\xi}\ dx^\mu dx^\nu dx^\gamma d\lambda^\xi$ в результате самоорганизации может быть преобразован в форму $g_{\mu\nu\gamma} dx^\mu dx^\nu dx^\gamma \Delta\lambda$, член $g_{2\mu\nu\gamma\xi}\ dx^\mu dx^\nu d\sigma^{\gamma\xi}$ в форму $g_{\mu\nu}\ dx^\mu dx^\nu \Delta\sigma$, а члены $g_{3\mu\nu\gamma\xi} dx^\mu d\upsilon^{\nu\gamma\xi}$, $g_{4\mu\nu\gamma\xi} d\sigma^{\mu\nu} d\sigma^{\gamma\xi}$, $g_{5\mu\nu\gamma\xi} d\omega^{\mu\nu\gamma\xi}$ соответственно в $g_\mu\ dx^\mu \Delta\upsilon, \Delta(\sigma)^2, \Delta\omega$.

Можно попытаться придать физический смысл этим объектам. Например, первый член можно считать характерным для мира со свободными струнами с квантованной длиной струны $\Delta\lambda$, второй и третий – для мира с двумя и тремя квантованными бранами соответственно, четвертый – с элементарными зарядами, а пятый с квантованным действием – постоянной Планка. Причем, все эти объекты могут существовать совместно в квартичном пространстве. С другой стороны, квантование может быть приближенным. Но тогда величины $\Delta\lambda, \Delta\sigma, \Delta\upsilon, \Delta(\sigma)^2$ и $\Delta\omega$ можно считать статистическими средними (или эффективными) величинами, которые за время существования Вселенной из-за постоянного роста энтропии превратились, практически, в константы. Однако, к сожалению, смысл этих преобразований еще далеко не ясен, поэтому в данной работе они более не обсуждаются.

(II) – *Аксиома жесткости* (упорядоченности). Элементы физической геометрии обладают жесткостью (упорядоченностью), то есть, несжимаемостью и однозначной последовательностью объектов, относительно которых проводится измерение.

Естественно, что эта аксиома не имеет никакого отношения к макроскопическим и даже микроскопическим, то есть, на уровне элементарных частиц, понятиям жесткости и упорядоченности для конкретных предметов. Она определяется для бесконечно малых измерений дифференциально-геометрического многообразия.

Аксиома (II) обобщает и дополняет аксиому жесткости Бахмана на плоскости, которая гласит:

Если h – луч, исходящий из точки A, и S – полуплоскость, ограниченная прямой, несущей луч h, а h' – луч, исходящий из точки A', и S' – полуплоскость, ограниченная прямой, несущей луч h', то не существует двух разных движений, которые переводили бы A в A', h в h' и S в S'.

Аксиома (II) означает, что в n-мерной геометрии после проведения $n-1$ произвольных дифференциальных смещений (отображений), сохраняющих интервал ds неизменным, n-е отображение может быть определено при помощи элементов самой геометрии. Макроскопическим прообразом таких элементов в двумерной геометрии являются линейка и циркуль. Например, задача извлечения кубического корня при помощи циркуля и линейки сводится к трисекции угла. В планиметрии она не имеет решения. Но с использованием трехмерных аналогов линейки и циркуля (их может быть несколько вариантов) задача трисекции угла решается элементарно.

Действительно, рассмотрим следующую идеальную схему. Возьмем кусок плоскости (плоской мембраны) в виде клина с углом при вершине, равным α, свернем его в конус и склеим края (рис. 1а, 1б). Выберем также аналог циркуля в виде треноги с центральным стержнем и направляющей рамкой из равностороннего треугольника (рис. 1в) и, сместив рамку влево, наденем на него конус, закрепив при вершине. Потянув рамку за центральный стержень в сторону вершины телесного угла, добьемся плотного натяжения материала мембраны ножками циркуля таким образом, что конус превратится в пирамиду. Угол при вершине этой пирамиды на каждой грани будет точно равен $\alpha/3$.

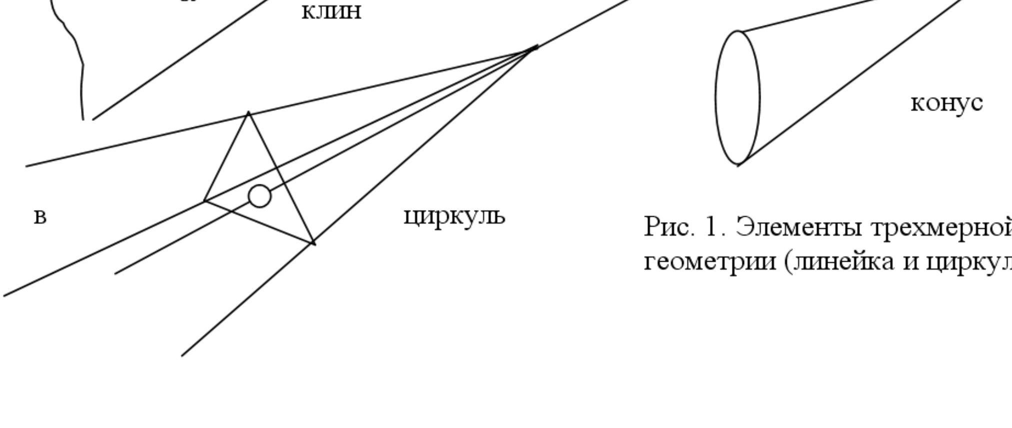

Рис. 1. Элементы трехмерной геометрии (линейка и циркуль).

Одним из следствий аксиомы (2), как будет видно из дальнейших выкладок, является неоднозначность n-го отображения, что не вытекает из аксиом Бахмана. А общим следствием аксиом (I) и (II) для физической геометрии $n = 4 + k$ измерений оказывается ограничение на введение дифференциальной формы m-го порядка величиной $m \leq 4$.

Введение данных аксиом соответствует общей идее о необходимости аксиоматизации геометрии, желанию понять первоосновы окружающего нас мира. Естественно, что там, где аксиоматика не заводит в тупик и не переусложняет задачу, она становится конструктивной. Так, введение дифференциальной формы:

$$ds^m = g_{\mu\nu\dots\varepsilon} dx^\mu dx^\nu \dots dx^\varepsilon, \tag{4}$$

где $\mu\nu\dots\varepsilon \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n = m + k$, $k \geq 0$, соответствует понятию о физических структурах, лежащих в первооснове бурбаканизации физики в духе Кулакова-Владимирова [14, 15], то есть, заданию в качестве исходных представлений унарных отношений между различными объектами, в данном случае между ds, и $dx^\mu, dx^\nu, \dots, dx^\varepsilon$ через $g_{\mu\nu\dots\varepsilon}$, хотя авторы [13, 14 и 15] не оперируют аксиомами непрерывности и упорядоченности, оставляя возможность для дискретных и неупорядоченных геометрий. Более того, в [15] показано, как можно строить геометрию без этих аксиом на самом первичном уровне. Однако, исходное понятие о физических структурах не запрещают дифференциальные отношения на любом уровне масштабов. Важна сама идея о первичности отношений между объектами. По мнению автора, континуальность и дискретность, близкодействие и дальнодействие – это различные грани одной и той же сущности.

Аксиоматические построения, естественно, – достаточно скучное занятие с очень медленным продвижением, но без них сложнее приблизиться к истине.

Для полноты исходного представления о данной физической структуре необходимо определить еще отношения для любого из этих объектов.

Учитывая это, определим отношение между одним из объектов, например dx^μ, и остальными объектами, решив алгебраическое уравнение степени m при фиксированных значениях $ds, dx^\nu, \dots, dx^\varepsilon$.

Как известно, такое алгебраическое уравнение при $m \leq 4$ решается в радикалах. Рассмотрим, какими свойствами обладает это решение.

Во-первых, оно неявно удовлетворяет аксиоме (I) и удовлетворяет требованию жесткости, то есть аксиоме (II). Действительно, при $m = 1$ или 2 решение алгебраического уравнения, как известно, находится при помощи циркуля и линейки. Если же $m = 3$, то (по методу Кардано) после сведения исходного кубического уравнения к виду $y^3 + py + q = 0$ и замены $y_0 \equiv \alpha + \beta$, где y_0 – корень модифицированного кубического уравнения, оно сводится к квадратному уравнению, корнями которого являются значения α^3 и β^3. Последнее уравнение также решается на плоскости при помощи циркуля и линейки. А корни кубические из значений α^3 и β^3 находятся с использованием геометрических объектов – трехмерных аналогов циркуля и линейки, как было показано выше. Аналогичная ситуация складывается при решении квартичного уравнения с $m = 4$ по методу Феррари. Таким образом, решение алгебраического уравнения для каждого объекта этой физической структуры при $m \leq 4$ удовлетворяет предложенным выше геометрическим представлениям.

Во-вторых, это решение неоднозначно. Многозначная функция комплексного переменного, выражающая данное решение при $m \leq 4$, соответствует группе Галуа [17]. Иначе говоря, группа Галуа лежит в основе геометризации физических структур при $m \leq 4$ и, в частных случаях, при $m \geq 5$.

В-третьих, произвольная функция, выражающаяся в радикалах, может быть определена по непрерывности вдоль любой непрерывной кривой C, не проходящей через точки, в которых эта функция не определена. Если при этом кривая C не проходит через точки разветвления и неоднозначности, то она определяется по непрерывности вдоль кривой C однозначно [18]. То есть эта функция обладает ценным свойством монодромии.

В-четвертых, для любой функции, выражающейся в радикалах, можно построить риманову поверхность. В данном случае она будет m-листной ($m \leq 4$) для каждого объекта $ds, dx^\mu, dx^\nu, \ldots, dx^\varepsilon$, $\mu\nu\ldots\varepsilon \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $n = m + k$, $k \geq 0$. В результате групповых преобразований при сохранении ds римановы поверхности для каждого отдельного из n объекта переходят одна в другую, образуя одну единственную риманову гиперповерхность с четырьмя n-мерными гиперлистами. Очевидно, что при интегрировании путей (переходе от геометрии в малом к геометрии в целом) свойства четырехлистности сохраняются.

Поэтому, возвращаясь к идеям о многолистной модели Вселенной Сахарова, можно отождествить при $m = 2, n = 4$ риманову гиперповерхность с двумя листами (как у А. Д. Сахарова) соответствующим им квадратичным (учитывая квадратичность метрики) четырехмерным пространствам геометрии в целом. А при переходе к $m = 4$, $n = 4 + k$, $k \geq 0$ (назовем эти пространства квартичными n-мерными) легко получается обобщение двухлистной сахаровской модели на четырехлистную модель, отождествляемую с римановой гиперповерхностью n измерений, которую по аналогии можно назвать фрагментом четырехлистной циклической структуры Вселенной (или просто четырехлистной моделью Вселенной, если не предполагать ее циклическое дублирование).

Подводя итог выше приведенным рассуждениям, скажем, что имеется достаточно оснований для того, чтобы рассматривать дифференциальные формы с $m \leq 4$ в качестве основы для геометризации физических структур, чего нельзя сказать о дифференциальных формах с $m \geq 5$.

Пример квартичного обобщения теории Дирака

Перейдем теперь к простейшей (канонической) дифференциальной форме четвертого порядка:

$$ds^4 = g_{\mu\nu\gamma\epsilon} dx^\mu dx^\nu dx^\gamma dx^\epsilon \quad \Rightarrow \quad ds^4 = dx_1^4 + dx_2^4 + dx_3^4 + dx_4^4 \tag{5}$$

и решим задачу на собственное значение квартичного дифференциального оператора в такой, условно говоря, «плоской» геометрии, то есть, без перекрестных членов:

$$(\partial_1^4 + \partial_2^4 + \partial_3^4 + \partial_4^4)\psi = m^4\psi, \tag{6}$$

где $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, $x_4 = ict$, m^4 – собственное значение дифференциального оператора. Не следует путать использованное здесь значение m, связанное в квантовой механике с массой элементарной частицы, с размерностью метрики в приведенных выше формулах (2)–(4).

Очевидно, что от выражения (6) легко перейти к дифференциальной форме (5) в квантово-механическом случае, положив $\psi = exp\{imx_i dx_i/ds\}$, которое, собственно и является решением уравнения (6).

Очевидно также, что соотношения (5) и (6) нарушают лоренцеву инвариантность интервала ds. Но в квартичном пространстве именно форма (5) соответствует диагональному выражению для метрического тензора 4-го ранга, определяя квартичную метрику касательного пространства.

Этот оператор является выделенным в том смысле, что его размерность и порядок дифференцирования совпадают и равны 4, а размерность 4 выделена самой природой. Некоторое обоснование, почему это так, следует (в том числе) и из вышеприведенных рассуждений, главным из которых, по-видимому, является свойство монодромии римановой гиперповерхности.

Можно ли найти корень четвертой степени из квартичного дифференциального оператора, такой, чтобы

$$(M_i\partial_i)^4 = (\gamma_i\partial_i^2)^2 = \sum_i \partial_i^4, \tag{7}$$

где γ_i – гамма-матрицы Дирака или их обобщение, а $\sum\limits_i$ – суммирование по индексу i? Полученное таким образом линейное уравнение удовлетворяло бы одному из основных постулатов квантовой механики – принципу суперпозиции.

Легко показать, что не существует антикоммутирующих матриц любого порядка с обычными правилами умножения, квадрат которых также есть антикоммутирующая матрица. Действительно, если $M_iM_j = -M_jM_i$, то $M_i^2M_j^2 = M_iM_iM_jM_j = M_iM_jM_jM_i = M_j^2M_i^2$. Более сложные комбинации со смешиванием коммутирующих и антикоммутирующих матриц также не приводят к цели.

Однако эта трудность возникает потому, что в квартичной геометрии нужно пользоваться более сложными математическими инструментами. Поэтому введем квартичные матрицы, обобщающие матрицы Паули и матрицы Дирака со специальными правилами умножения. А именно, вначале по обычным правилам перемножим квадратные матрицы на одной гиперграни кварты, а затем, с помощью структурных констант, определяющих правила умножения на ортогональных гипергранях, свернем остальные индексы матричных элементов. По самому определению алгебра этих матриц будет неассоциативной.

Обозначим квартичную матрицу, обобщающую матрицу Паули ${\sigma_i}^a{}_b$ через ${\zeta_i}^a{}_b{}^c{}_d$, где, в данном случае, индекс i связан с индексом координаты, левая пара индексов a и b – индексы квадратной матрицы на гиперграни, а правая пара c и d – индексы этих же элементов, обозначающие их принадлежность соответствующим гиперграням (в третьем и в четвертом измерении соответственно). Индексы a, b, c и d пробегают значения 1 и 2. В дальнейшем, как левая, так и правая пара индексов, а также, индекс координаты могут, естественно, обозначаться другими латинскими буквами. Смысл нововведения в том, что после перемножения антикоммутирующих квадратных матриц на одной гиперграни их произведения уже не будут на ней антикоммутирующими, но они могут быть антикоммутирующими на остальных ортогональных гипергранях кварты.

Примем для элементов матриц ζ_1 и ζ_2 следующие значения $({\zeta_i}^a{}_b{}^c{}_d :\equiv {\sigma_i}^a{}_b({\sigma_i}^c{}_d)^{1/2})$:

$$\zeta_1{}^a{}_b{}^1{}_1 = \zeta_1{}^a{}_b{}^2{}_2 = 0\,, \quad \zeta_1{}^a{}_b{}^1{}_2 = \sigma_1{}^a{}_b\,, \quad \zeta_1{}^a{}_b{}^2{}_1 = \sigma_1{}^a{}_b\,, \tag{8a}$$

$$\zeta_2{}^a{}_b{}^1{}_1 = \zeta_2{}^a{}_b{}^2{}_2 = 0\,, \quad \zeta_2{}^a{}_b{}^1{}_2 = (-i)^{1/2}\sigma_2{}^a{}_b\,, \quad \zeta_2{}^a{}_b{}^2{}_1 = (i)^{1/2}\sigma_2{}^a{}_b\,. \tag{8b}$$

Очевидно, что матрицы ζ_1 и ζ_2 являются эрмитово сопряженными, то есть, $\zeta_i^+ = \zeta_i$.

В результате перемножения элементов квартичных матриц ζ_1 и ζ_2 тензорным способом получим:

$$\zeta_1{}^a{}_b{}^2{}_1\,\zeta_2{}^b{}_c{}^1{}_2 = \zeta_1{}^a{}_b{}^1{}_2\,\zeta_2{}^b{}_c{}^1{}_2 = (-i)^{1/2}\sigma_1{}^a{}_b\,\sigma_2{}^b{}_c = (i)^{1/2}\sigma_3{}^a{}_c\,; \tag{9a}$$

$$\zeta_1{}^a{}_b{}^2{}_1\,\zeta_2{}^b{}_c{}^2{}_1 = \zeta_1{}^a{}_b{}^1{}_2\,\zeta_2{}^b{}_c{}^2{}_1 = (i)^{1/2}\sigma_1{}^a{}_b\,\sigma_2{}^b{}_c = (-i)^{1/2}\sigma_3{}^a{}_c\,. \tag{9b}$$

Если бы правые индексы мы сворачивали так же, как и левые, то есть, по правилам обычного матричного умножения, следовало бы сохранить второй член из (9б) и первый член из (9а), а два остальных члена отбросить. Но тогда они бы неправильно разместились в блочной структуре. В предлагаемой алгебре, наоборот, сохраним первый член из (9б) и второй из (9а), игнорируя члены, сохранявшиеся при сохранявшиеся при обычном матричном умножении.

В соответствии с новыми правилами умножения при возведении в квадрат квартичной матрицы ζ_1 сохраняются члены $({\zeta_1}^a{}_b{}^1{}_2)^2 = I^a{}_b$ и $({\zeta_1}^a{}_b{}^2{}_1)^2 = I^a{}_b$. А при возведении в квадрат матрицы ζ_2 – члены $({\zeta_2}^a{}_b{}^1{}_2)^2 = -iI^a{}_b$ и $({\zeta_2}^a{}_b{}^2{}_1)^2 = iI^a{}_b$. Если результаты возведения в квадрат матриц ζ_1 и ζ_2 разместить на одной гиперграни в соответствии с правой парой индексов членов, расположенных в скобках, и редуцировать единичные матрицы, то получим две искомые матрицы σ_1 и σ_2.

В то же время этот порядок размещения результатов возведения в квадрат не подходит для получения третьей матрицы Паули используя результаты умножения в (9а) и в (9б). Для того чтобы возведение в квадрат правых крайних членов из (9а) и в (9б) и последующее редуцирование единичных матриц дало матрицу σ_3, умноженную на мнимую единицу i, необходимо было бы член ${\zeta_1}^a{}_b{}^1{}_2{\zeta_2}^b{}_c{}^1{}_2$ как-то перебросить в ячейку $({}^1{}_1)$, а ${\zeta_1}^a{}_b{}^2{}_1\,{\zeta_2}^b{}_c{}^2{}_1$ в $({}^2{}_2)$. Однако в двумерном пространстве эта операция излишняя, поэтому ниже она не будет использована.

Так как $({\zeta_1}^a{}_b{}^1{}_2{\zeta_2}^b{}_c{}^1{}_2)^2 = iI^a{}_c$, а $({\zeta_1}^a{}_b{}^2{}_1{\zeta_2}^b{}_c{}^2{}_1)^2 = -iI^a{}_c$, то перемножение квадратов матриц $\zeta_{1,2}$ будет соответствовать алгебре матриц Паули. Так что квадраты матриц $\zeta_{1,2}$ создают гомоморфизм группы $SU(2)$ на квартичное пространство.

Чтобы формализовать это правило перемножения матриц $\zeta_{1,2}$, введем матрицу структурных констант (или оператор) $F := F^k{}_d{}^c{}_f{}^e{}_m$. Заметим, что все индексы этой матрицы связаны только с правой парой индексов квартичной матрицы. Элементы этой матрицы равны единице, когда $k = c = e$, $d = f = m$, $m \neq k$, а в остальных случаях равны нулю. Структурными они названы потому, что размещают элементы результатов умножения матриц ζ_1 и ζ_2 в нужные ячейки.

Тогда перемножение матриц ζ_i и ζ_j можно записать в виде:

$$(\zeta_i\zeta_j)^{ak}{}_{gm} = F^k{}_d{}^c{}_f{}^e{}_m\,{\zeta_i}^a{}_b{}^c{}_d\,{\zeta_j}^b{}_g{}^e{}_f\,. \tag{10}$$

Тем не менее, можно просто запомнить правило свертывания правых индексов при перемножении квартичных матриц, что и будет использовано ниже при сохранении обозначения оператора F.

Удобно также представить оператор F в виде произведения на одной из граней кварты двух четырехзначковых матриц:

$$F = \Phi_L\Phi_R := {\Phi_L}^k{}_d{}^c{}_r{\Phi_R}^r{}_f{}^e{}_m\,, \tag{11}$$

элементы которых равны единице, когда для $\Phi_L:\ \ k = r = c, d \neq k,$ а для Φ_R: $m = f$, $r = e$, $m \neq r$, и равны нулю в остальных случаях.

Квартичный спинор, естественно, в этом подходе будет иметь два индекса, то есть $\psi := \psi^{ab}$. Причем, оба индекса сворачиваются по обычному матричному умножению, то есть, спинор полностью расположен на одной из граней кварты. Тогда член с частной производной по i-ой координате в координате в матричной форме для прямого и эрмитово сопряженного спинора можно образом:

$$\Phi_R\zeta_i\,\partial_i\psi := {\Phi_R}^r{}_f{}^e{}_m\,\zeta_i b_g{}^e{}_f\,\partial_i\psi^{gm} \equiv A_{Ri}{}^r{}_g{}^b{}_m\,\partial_i\psi^{gm} \tag{12a}$$

$$\partial_j\psi^+\,\zeta_j\Phi_L := \partial_j{\psi^*}_{ka}\,{\zeta_j}^a{}_b{}^c{}_d\,{\Phi_L}^k{}_d{}^c{}_r \equiv \partial_j{\psi^*}_{ka}\,A_{Lj}{}^k{}_b{}^a{}_r\,. \tag{12b}$$

Обобщение этой алгебры на квартичное четырехмерное пространство не представляет затруднений.

Действительно, выберем представление антикоммутирующих четырехрядных матриц в виде:

$$\gamma_k = i\sigma_k\tau_2,\ \gamma_4 = \tau_1,\ \gamma_5 = -i\tau_3, \tag{13}$$

где τ_1, τ_2, τ_3 – матрицы Паули, у которых вместо единиц стоят единичные двухрядные матрицы, и запишем аналоги матриц ζ_i следующим образом:

$$Z_\mu{}^a{}_b{}^c{}_d = \gamma_\mu{}^a{}_b(\gamma_\mu{}^c{}_d)^{1/2}, \tag{14}$$

где греческие индексы μ и латинские индексы a, b, c, d пробегают значения $1, 2, 3$ и 4.

Здесь появляются дополнительные делители нуля при умножении по правым индексам. Если они доставляют неудобства, можно использовать матрицы более высокого порядка, что не влияет на общую идеологию.

Нетрудно убедиться, что, введя матрицу структурных констант F, такую же, как и в двумерном случае, но с латинскими индексами, пробегающими значения $1, 2, 3$ и 4, мы получим и аналогичную алгебру антикоммутирующих матриц, преобразующихся затем после поворота на кварте в четыре γ-матрицы Дирака в представлении (13). Элементы матриц F равны единице при условии $k = c = e$, $d = f = m$, $m = 5 - k$. Для матриц Φ_L соответственно имеем $k = r = c$, $d = 5 - k$, а для Φ_R имеем $m = f$, $r = e$, $f = 5 - e$ и $f = e \pm 2$. Остальные значения равны нулю. Вместо матриц A_{Li} и A_{Rj} получим соответственно матрицы:

$$B_{L\mu} := B_{L\mu j}{}^k{}_b{}^a{}_r = Z_\mu{}^a{}_b{}^c{}_d\,\Phi_L{}^k{}_d{}^c{}_r \quad (a) \qquad \text{и} \quad B_{R\nu} := B_{R\nu}{}^r{}_g{}^b{}_m = \Phi_R{}^r{}_f{}^e{}_m\, Z_\nu{}^b{}_g{}^e{}_f \quad (b) \tag{15}$$

Обобщением уравнения Дирака в квартичной геометрии тогда будет:

$$iB_{R\mu}\partial_\mu\psi - (m^4)^{1/4}\psi = 0 \tag{16a}$$

и сопряженное с ним:

$$i\partial_\mu\underline{\psi}B_{L\mu} + (m^4)^{1/4}\underline{\psi} = 0, \qquad \text{где} \tag{16b}$$

$$\underline{\psi} := \psi^+\Gamma_4 \equiv \psi^*{}_{ab}\Gamma_4{}^b{}_c, \tag{17}$$

а Γ_4 – матрица Дирака γ_4, у которой вместо единиц стоят четырехрядные единичные матрицы I, индексы b и c, очевидно, относятся к правой паре индексов.

Тогда спинорный лагранжиан в квартичной метрике будет иметь вид:

$$L_4 = (i/2)[\underline{\psi}B_{R\mu}\partial_\mu\psi - \partial_\mu\underline{\psi}B_{L\mu}\psi] - (m^4)^{1/4}\underline{\psi}\psi. \tag{18}$$

Таким образом, задача извлечения корня четвертой степени из дифференциального оператора $\sum\limits_i \partial_i{}^4$ может быть решена в виде:

$$\sum_\mu \partial_\mu{}^4 = (\gamma_\mu\partial_\mu{}^2)(\gamma_\nu\partial_\nu{}^2) = [(Z_\mu\partial_\mu)F(Z_\nu\partial_\nu)][(Z_\alpha\partial_\alpha)F(Z_\beta\partial_\beta)], \qquad \text{где} \quad F = \Phi_L\Phi_R. \tag{19}$$

При этом неассоциативность умножения необходима только в правой части равенства (19).

Так как $(m^4)^{1/4} = (\pm, \pm i)\, m$, то теория, построенная с использованием подобной алгебры в квартичном пространстве, будет обладать захватывающей физической перспективой, потому что будет возможным описывать частицы, античастицы, псевдочастицы и антипсевдочастицы в квартичном пространстве, которое должно проявляться при ультрарелятивистских скоростях движения. Причем, гравитационное взаимодействие двух псевдочастиц должно приводить к возникновению сил отталкивания, что соответствует антигравитации, а в глобальных масштабах к наблюдаемому ускорению расширения Вселенной. Заметим, что в модели ([19], [20]) такое ускорение может быть частично или полностью интерпретировано как ускоренное сокращение масштабов длины и времени при сохранении размеров Вселенной (что в математическом смысле одно и то же), а также согласованное с этим сокращением изменение фундаментальных физических констант. Причем, так как природа инвариантна относительно согласованных изменений всех масштабов, то они могут наблюдаться только при нарушении этой инвариантности. Обе альтернативы ведут к коллапсу Вселенной и взаимно дополняют друг друга. Слияние псевдочастиц с псевдоантичастицами соответствует рождению античастиц. Античастицы, соответственно, должны распадаться на псевдочастицы и антипсевдочастицы. Эти эффекты могут давать вклад в наблюдаемую барионную асимметрию и темную материю Вселенной.

Естественно, что все вышеобозначенные эффекты в целом должны иметь экспериментальную или наблюдаемую в космических явлениях проверку. Причем, все они могут проявляться только при очень высоких энергиях или при чрезвычайно малых массах.

Если, например, дифференциальная форма для частицы, летящей вдоль координаты x^1 имеет вид:

$$ds^4 = (dx^4)^4 + (dx^1)^4 - [(dx^4)^2 + (dx^1)^2)]a^2, \tag{20}$$

где a^2 – малая, но конечная величина, $dx^4 = icdt$, то, разделив обе части равенства на a^2, практически всегда при $dx^1 < cdt$ двумя первыми членами в (20) можно пренебречь и будет работать обычная метрика пространства Минковского.

Тогда за интервал можно принять величину ds^2/a. Квартичная метрика начинает проявляться только при условии $2|(dx^4)^2|/a^2 + (dx^1)^2/(dx^4)^2 = 2(c^2/a^2)dt^2 + \beta^2 \geq 1$, где $\beta \equiv v/c$.

Таким образом, наблюдаемые метрические эффекты ожидаются действительно очень маленькими. Но они могут сыграть определенную роль в понимании физической картины мира и в развитии современной физической теории.

Полионы

К сожалению, рассмотренная выше задача является только частным случаем всей совокупности проблем, возникающих при попытках найти рабочие инструменты для работы в квартичном пространстве. Это видно, в частности, из работ, публикуемых в журнале «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике», ссылки на который приведены в данной статье. Для того чтобы несколько развязать узел этих проблем приведем введение в некоторый новый математический аппарат, пригодный, как надеется автор, для исследований в кубическом и квартичном n-мерном пространстве.

Оказывается удобным бесконечное расширение алгебры кватернионов, в которой коммутационные соотношения выглядят следующим образом:

$$q_j q_i = \exp\{2\pi i/m\} q_i q_j, \tag{21}$$

где $m \in \{N\}$ – степень дифференциальной формы интервала, определяющей метрику; $i, j \in \{1, \ldots, m\},\ i < j$. При этом выполняется равенство:

$$(q_i \partial_i)^m = \sum_i \partial_i{}^m \tag{22}$$

Назовем такие величины *полинионами.* Нетривиальным оказывается построение матричного представления для полинионов с коммутационными соотношениями (21) даже при $m = 3$ и 4. Действительно, так как для любых двух матриц с обычными правилами умножения $Sp(M_i M_j) = Sp(M_j M_i)$, то для удовлетворения (21) оба члена этого равенства должны быть равны нулю. С другой стороны, как легко доказать для попыток представления полинионов матрицами Паули, которые являются точным матричным представлением обычных кватернионов, для существования матричного представления единицы ${q_i}^m = I$ и для образования группы преобразований ($q_i \circ q_j = q_k$, $q_i, q_j, q_k \in G$) при $m = 3$ и 4 необходимо, чтобы $Sp(M_i M_j)$ и $Sp(M_i)$ не были равны нулю (при $m = 2$ это условие не требуется).

Однако, решение задачи оказывается неожиданно простым для неассоциативной алгебры с учетом предложенного выше алгоритма для частного случая извлечения корня четвертой степени из квартичного канонического дифференциала, которое допускает обобщение на любое значение m.

Действительно, рассмотрим обобщение матриц Паули в виде:

$$\sigma_1(m) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2(m) \to \begin{pmatrix} 0 & (-i)^{2/m} \\ (i)^{2/m} & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3(m) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{2/m} \end{pmatrix}; \tag{23}$$

Тогда, если умножение матриц проводить на таком листе римановой поверхности, где единицу можно разложить на множители:

$$1 = 1^{2/m} 1^{2/m} = (-1)^{2/m} (-1)^{2/m} = (i)^{2/m} (-i)^{2/m}, \tag{24}$$

что, вообще говоря, не совпадает (например, при $m = 4$) с обычной алгеброй комплексных чисел, то выполняется условие соотношения (21).

Это уже означает, что мы переходим к неассоциативной алгебре, умножая сначала числа, стоящие в скобках, и только затем возводим результат в дробную степень, причем, склеиваем листы при аргументах 0 и 2π. При этом, очевидно, что обобщенные матрицы Паули при таком неассоциативном умножении удовлетворяют группе $SU(2)$.

По-видимому, неассоциативность, а значит и необратимость времени характерна для кубичного и квартичного пространства, а также для более общего пространства. Это, кстати, упрощает интерпретацию модели многолистной Вселенной Сахарова при ее обобщении на квартичную и кубичную метрику.

Далее используется блочный прием построения неассоциативных матриц, как это сделано для частного случая в соотношениях (9)–(19) с заменой σ_i и γ_μ на $\sigma_i(4)$ и $\gamma_\mu(4)$, а также построение кубичных матриц и матриц произвольного порядка. При этом несложно удовлетворить условию $[\sigma_i(m)]^m = 1$ и $[\gamma_\mu(m)]^m = 1$.

Автор благодарен за интерес к работе и поддержку Д. Г. Павлову и А. А. Элиовичу, а также участникам семинара «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике» за полезное обсуждение рассмотренных (кроме подготовленного перед опубликованием пункта «Полинионы») в данной статье вопросов.

Список литературы

1. А. Д. Сахаров. Научные труды. М.: ЦентрКом. 1995.
2. А. Д. Сахаров. Многолистная модель Вселенной. // Препринт № 7 Института прикладной математики АН СССР. М.: 1970.
3. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Релятивистская астрофизика. М.: Наука. 1967.

4. И. Д. Новиков.//АЖ 41. 1964. С. 1075.
5. Y. Néeman. //Ap. J. 141. 1965. С. 1303.
6. Robert R. Caldwell. Mark Kamionkowski, Nevin N. Weinberg. Phantom Energy and Cosmic Doomsday. Phys. Rev. Lett. 91. 2003. 071301.
7. Д. Г. Павлов. Четырехмерное время. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. № 1 (2004). С. 33–42.
8. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения.// Там же. С. 5–19.
9. Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства. М.: Наука. 1966.
10. Р. В. Михайлов. О некоторых вопросах четырехмерной топологии: обзор современных исследований. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. № 1 (2004). С. 106–110.
11. Д. Гильберт. Основания геометрии. Гостехиздат. 1948.
12. Г. Вейль. Пространство. Время. Материя. М.: Едиториал УРСС. 2004.
13. Ф. Бахман. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М.: Наука. 1969.
14. Ю. И. Кулаков. Элементы физических структур. Новосибирск. Изд-во Новосибирского ун-та. 1968.
15. Ю. С. Владимиров. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. М.: Изд-во Моск. ун-та. Часть 1. (Теория систем отношений). 1996. Часть 2. (Теория физических взаимодействий). 1998.
16. П. Д. Сухаревский. Две аксиомы геометрии и их следствия. // Тез. докл. конференции «Инженерно-физические проблемы новой техники». Москва. 1994. С. 144–145.
17. А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. III. Основные структуры. М.: Физматлит. 2001.
18. В. Б. Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования. 2001.
19. К. П. Станюкович, П. Д. Сухаревский, Н. П. Щербинская. Об одной возможности единой классификации космических объектов и элементарных частиц. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. Вып. 2 (1987). С. 20–28.
20. П. Д. Сухаревский, Н. П. Щербинская. Интерпретация квазаров в ТВГ. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. Вып. 1 (1992). С. 3–5.