ОБОБЩЕННЫЕ N-АРНЫЕ ЗАКОНЫ КОМПОЗИЦИИ В АЛГЕБРЕ H_4 И ИХ СВЯЗЬ С АССОЦИИРОВАННЫМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ФОРМАМИ

В. М. Чернов

Институт систем обработки изображений РАН

vche@smr.ru

В работе рассматривается задача полилинеаризации норм алгебры H_4. Вводятся новые бинарные, а также тернарные и кватернарные операции в алгебре H_4 с изотропным базисом ("умножение Цассенхауза"). Показывается что квадратичная норма Минковского элемента алгебры, норма Бервальда-Моора, ассоциированная с формой четвертой степени, а также рассмотренная в предыдущей работе автора норма, ассоциированная с кубической формой, совпадают со значениями введенной бинарной, кватернарной и тернарной операций при равных значениях элементов – "сомножителей Цассенхауза".

1 Введение

1.1 Классические композиционные алгебры и алгебры H_n

Наиболее широкое распространение в физике, механике, информатике и других приложениях получили *композиционные алгебры*, то есть алгебры без делителей нуля с единицей, на векторных пространствах которых определены невырожденные *квадратичные* формы $N(x)$ (*нормы*) с условием $N(xy) = N(x)N(y)$. Рекурсивный метод их построения и классификация над различными полями связана с существованием в алгебрах, получаемых на каждом шаге рекурсии (анти)автоморфизма $x \mapsto \bar{x}$ второго порядка, продолжаемого рекурсивно для последующих шагов построения и порождающих указанные выше формы $N(x)$. За желание иметь алгебры, отличные от R и C, но с аналогами вещественной или комплексной нормы приходится расплачиваться некоммутативностью и/или неассоциативностью таких алгебр. Кроме того, рекурсивный процесс Кэли-Диксона построения композиционных алгебр уже на третьем шаге приводит к неассоциативности и не может быть продолжен дальше [1]–[3]. Помимо собственно композиционных алгебр, процесс Кэли-Диксона приводит к явному описанию алгебр ряда алгебр и с делителями нуля (например, алгебры двойных чисел, изоморфной $R \oplus R$, алгебры (2×2)-матриц $M_2(R)$), на векторных пространствах которых определена также квадратичная мультипликативная форма $N(x)$, уже не являющаяся невырожденной [1].

Некоммутативная четырехмерная алгебра кватернионов, например, успешно используется при решении задач механики, машинного зрения, в физике. Это связано как и с наличием нормы, так и, например, с элегантным представлением ортогональных преобразований трехмерного пространства не на "внешнем" матричном языке, а в терминах внутренних операций алгебры кватернионов, то есть, "бескоординатно".

Далее, например, представление элемента X четырехмерной алгебры, изоморфной алгебре (2×2)-матриц $M_2(R)$ в "клиффордовом" базисе с правилом умножения базисных элементов в форме

$$e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = e_0, \quad e_2^2 = e_0, \quad e_3^2 = -e_0;$$
$$e_1e_2 = -e_2e_1, \quad e_1e_3 = -e_3e_1, \quad e_2e_3 = -e_3e_2; \quad e_1e_2 = e_3,$$

и инволютивным отображением (т. н. *симплектическая инволюция*)

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \bar{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

естественным вложением $R \to M_2(R)$ с $y \mapsto ye_0$, $y \in R$ позволяет записать определяющее квадратное уравнение для элемента X с коэффициентами, выраженными в бескоординатной форме в терминах нормы $N(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и следа $Tr\,(X) = X + \bar{X} = a + d$:

$$X^2 - Tr\,(X)\, e_0 X + N(X) e_0 = 0, \tag{1.1}$$

то есть, фактически, в форме частного (двумерного) случая теоремы Гамильтона-Кэли. Отсюда при надлежащей интерпретации следует, что все результаты "линейной" *геометрии двумерной плоскости* могут быть получены как следствия *алгебраических свойств четырехмерной алгебры* $M_2(R)$.

В отличие от композиционных алгебр, произвольные ассоциативно-коммутативные конечномерные алгебры уже не являются квадратичными алгебрами над полем R. Поэтому алгебраические уравнения для их элементов естественным образом могут быть ассоциированы с автоморфизмами более высоких порядков, что дает основание предполагать возможность анализа свойств геометрических интерпретаций этих алгебр, выражаемых в терминах группы "симметрий" более высокого порядка, чем второй.

Первым шагом к реализации отмеченного выше комплекса идей и пониманию роли автоморфизмов высокого порядка при создании геометро-физических моделей пространства-времени является, по мнению автора, определение инвариантных характеристик уравнений, которым удовлетворяют элементы ассоциативно-коммутативных алгебр. То есть, определение аналогов форм $N(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и $Tr\,(X) = X + \bar{X} = a + d$ соотношения (1.1). Таким первым шагом в указанном направлении явились работы автора [4], [5], в которых, в частности, был получен следующий результат (теорема 2.1).

Рассмотрим алгебру $R \oplus R \oplus R \oplus R \cong H_4$ с базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.1. (Такой базис мы далее будем называть *изотропным* базисом).

Таблица 1.1.

$\times$	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_4	0	0	0
E_2	0	E_2	0	0
E_3	0	0	E_3	0
E_4	0	0	0	E_4

Мультипликативно нейтральным элементом (единицей алгебры) в этом базисе является элемент $I = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, а поле R канонически вкладывается в алгебру $R \oplus R \oplus R \oplus R$:

$$R \to R \oplus R \oplus R \oplus R \cong H_4, \quad x \mapsto xI, \quad x \in R.$$

Теорема. Алгебра $R \oplus R \oplus R \oplus R$ является алгеброй четвертой степени над R, то есть, любой элемент $w \in R \oplus R \oplus R \oplus R$ удовлетворяет алгебраическому уравнению степени не выше четвертой с вещественными коэффициентами.

Действительно, пусть $w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \leftrightarrow (a, b, c, d)$. Рассмотрим четыре отображения алгебры $R \oplus R \oplus R \oplus R$ в себя, являющихся, очевидно, автоморфизмами:

$$\begin{aligned} \tau_0: \quad w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4, \\ \tau_1: \quad w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto bE_1 + cE_2 + dE_3 + aE_4, \\ \tau_2: \quad w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto cE_1 + dE_2 + aE_3 + bE_4, \\ \tau_3: \quad w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 &\mapsto dE_1 + aE_2 + bE_3 + cE_4. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Другими словами, отображения переставляют циклическим образом компоненты (a, b, c, d) элемента w алгебры. Нетрудно показать, что элемент w является корнем многочлена

$$\Phi(\xi; w) = (\xi - \tau_0(w))(\xi - \tau_1(w))(\xi - \tau_2(w))(\xi - \tau_3(w)), \tag{1.3}$$

а также то, что коэффициенты полинома $\Phi(\xi; w)$ вещественные. Действительно, непосредственным вычислением получаем:

$$\Phi(\xi; w) = \xi^4 - s_1(w) I\xi^3 + s_2(w) I\xi^2 - s_3(w) I\xi^1 + s_4(w) I, \tag{1.4}$$

где вещественные коэффициенты $s_\nu(w)$ являются однородными симметричными формами компонент (a, b, c, d) элемента w алгебры:

$$\begin{aligned} s_1(w) &= s_{14}(w) = a + b + c + d, \\ s_2(w) &= s_{24}(w) = ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ s_3(w) &= s_{34}(w) = bcd + acd + abd + abc, \\ s_4(w) &= s_{44}(w) = abcd. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Многочлен $\Phi(\xi; w)$ минимальной степени с вещественными коэффициентами и с коэффициентом при старшей степени ξ, равным единице, такой, что $\Phi(\xi; w)|_{\xi = w} = 0$, будем называть *определяющим многочленом элемента* w, а его коэффициенты – *определяющими формами.*

Замечание 1.1. Формы (1.5) инвариантны относительно любой перестановки $\sigma \in S_4$ четырех компонент (a, b, c, d) элемента w алгебры. Следовательно, так как $\sigma \in S_4$ является автоморфизмом алгебры $R \oplus R \oplus R \oplus R$ над полем R, то многочлен *четвертой* степени $\Phi(\xi; w)$ наряду с корнем w имеет своими корнями еще, по крайней мере, 23 корня $\sigma(w)$, $\sigma \in S_4$, то есть, *все* его автоморфные образы относительно автоморфизмов $\sigma \in S_4$.

Замечание 1.2. В базисе $\{E, I, J, K\}$ алгебры $H_4 \cong R \oplus R \oplus R \oplus R$ с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 1.2.

$\times$	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	E	K	J
J	J	K	E	I
K	K	J	I	E

элемент $\omega \in H_4$ представляется в форме $\omega = tE + xI + yJ + zK$ $(t, x, y, z \in R)$, E – мультипликативно нейтральный элемент (единица) алгебры. Связь между изотропным базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и базисом $\{E, I, J, K\}$ осуществляется посредством линейного преобразования с ортогональной матрицей Адамара

$$had_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Совершенно очевидно, что каждому автоморфизму, определяемому действием элемента группы подстановок S_4, то есть, переставляющему компоненты элемента $\omega \in H_4$, представленного в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, соответствует линейное преобразование компонент t, x, y, z элемента $\omega = tE + xI + yJ + zK$, и также реализующее некоторый автоморфизм алгебры H_4. В частности, такими автоморфизмами являются:

$$\begin{array}{llll} \mu_0: & \omega & \mapsto & \mu_0(\omega) = tE + xI + yJ + zK, \\ \mu_1: & \omega & \mapsto & \mu_1(\omega) = tE + xI - yJ - zK, \\ \mu_2: & \omega & \mapsto & \mu_2(\omega) = tE - xI + yJ - zK, \\ \mu_3: & \omega & \mapsto & \mu_3(\omega) = tE - xI - yJ + zK. \end{array} \tag{1.6}$$

При представлении элемента $\omega \in H_4$ в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ этой четверке преобразований соответствует действие на компоненты элемента некоторой подгруппы четвертого порядка (изоморфной прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка) группы S_4.

Записывая в этом случае определяющий многочлен, непосредственным вычислением получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi; \omega) &= (\xi - \mu_0(\omega))(\xi - \mu_1(\omega))(\xi - \mu_2(\omega))(\xi - \mu_3(\omega)) = \\ &= \left(\xi^4 - S_1(\omega)\xi^3 + S_2(\omega)\xi^2 - S_3(\omega)\xi^1 + S_4(\omega)\right)E, \qquad \text{где} \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} S_{14}(\omega) = 4t, \\ S_{24}(\omega) = 6t^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2, \\ S_{34}(\omega) = -4tx^2 - 4y^2t - 4z^2t + 4t^3 + 8yzx = 4t(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 8yzx, \\ S_{44}(\omega) = x^4 + y^4 + z^4 - 2t^2x^2 - 2t^2y^2 - 2t^2z^2 + t^4 + 8txyz - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2, \end{gathered} \tag{1.7}$$

и $S_{24}(\omega)$ с точностью до нормирующих множителей совпадает с (псевдо)метрической формой Минковского, а $S_{44}(\omega)$ имеет стандартный "бервальд-мооровский" вид.

1.2 Основные идеи и определения

Как ни парадоксально, но идея использования дополнительных (или переопределенных) операций на той или иной конечномерной алгебре, ассоциированных с автоморфизмами порядка выше второго, с целью алгебраической поддержки решения геометрических задач имеет почтенную историю. Существует достаточно экзотическая и малоизвестная алгебраическая структура, известная как "конечные почти-поля Цассенхауза" [6] (см. также [7], глава 20). Именно, в поле F_q, $q = p^m$, (p – простое) вводится операция $x * y$ $(x, y \in F_q)$, выражающаяся через операцию умножения в поле F_q по закону $x * y \quad = y \cdot \eta(x)$, где η – автоморфизм Фробениуса специального вида. Эта операция некоммутативна и неассоциативна (последнее – в силу теоремы Веддербёрна [7], [8]). Естественно, что конечность полей F_q, следовательно, и почти-полей Цассенхауза, ограничивает круг задач, решаемых с применением такой техники, исключительно конфигурационными задачами конечной геометрии [7]. Идея рассмотрения "полилинейных", в отличие от классических "билинейных", скалярных произведений в ассоциативно-коммутативных алгебрах с целью создания адекватных геометро-физических моделей принадлежит, по всей видимости, Д. Г. Павлову [9], [10].

Рассмотрим пример алгебры $R \oplus R$ с базисом $\{E_1, E_2\}$ и с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.3 и мультипликативно нейтральным элементом (единицей) $I = E_1 + E_2 = (1, 1)$.

Таблица 1.3.

$\times$	E_1	E_2
E_1	E_4	0
E_2	0	E_2

Типичный элемент $x = x_1E_1 + x_2E_2$ будем далее обозначать для краткости $x = (x_1, x_2)$.

Пример 1.1. Рассмотрим две подстановки

$$\sigma^1 \leftrightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \leftrightarrow \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Определим действие операторов $\sigma^1,\ \sigma^2$, ассоциированных с подстановками $\sigma_1,\ \sigma_2$ на элементы $x = (x_1, x_2)$ алгебры $R \oplus R$:

$$\sigma^1(x) = (x_1, x_2), \quad \sigma^2(x) = (x_2, x_1),$$

то есть, операторы $\sigma^1,\ \sigma^2$ переставляют компоненты элемента $x = (x_1, x_2)$ в соответствии с нижними строками подстановок $\sigma_1,\ \sigma_2$.

Введем на $R \oplus R$ новую бинарную операцию $[x,\ y]$ ("умножение Цассенхауза"):

$$[x,\ y] = \sigma^1(x) \bullet\ \sigma^2(y),$$

где символом $(\bullet)$ обозначено обычное "покомпонентное" умножение элементов из $R \oplus R$.

Непосредственно проверяются следующие соотношения.

$$[x,\ y] = (x_1, x_2) \bullet (y_2, y_1) = (x_1y_2, x_2y_1) \doteq (\xi_2, \xi_1), \tag{1.9}$$

$$[x,\ x] = (x_1, x_2) \bullet (x_2, x_1) = (x_1x_2, x_2x_1) = x_1x_2I \doteq N(x)I. \tag{1.10}$$

Заметим, что введенная в (1.10) функция $N(x)$ *совпадает с традиционной нормой элемента алгебры* $R \oplus R$, *выраженной в терминах изотропных координат (компонент).*

Далее, справедливы равенства:

$$\begin{gathered} N([x, y]) = [[x, y], [x, y]] = \sigma^1([x, y]) \bullet\ \sigma^2([x, y]) = \\ = (x_1y_2, x_2y_1) \bullet (x_2y_1, x_1y_2) = (x_1y_2x_2y_1, x_1y_2x_2y_1) = \\ = (x_1y_2, x_1y_2) \bullet (x_2y_1, x_2y_1) = (x_1y_2)\, I \bullet (x_2y_1)\, I = \xi_1\xi_2 I = \\ = (x_1x_2)\, I \bullet (y_1y_2)\, I = N(x)N(y). \end{gathered} \tag{1.11}$$

Пример 1.2. Остановимся еще на одной иллюстрации "цассенхаузового умножения". Рассмотрим множество двумерно индексированных $(n \times n)$ массивов с покомпонентным сложением. Введем операцию $*$ "умножения", отличную от обычного матричного умножения. Пусть $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $D = \{d_{ij}\} = A * B$. Тогда, по определению:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{jk},$$

или, в неформальных терминах, «(i, j)-й элемент "$*$-произведения" равен скалярному произведению i-ой строки на j-ую строку». Преобразование массивов $\tau : A \to \tau(A)$ по правилу τ: $a_{ij} \mapsto a_{ji}$, есть "обычное" транспонирование матриц, но которое является *автоморфизмом 2 порядка* по отношению к операции $*$: $\tau(A * B) = \tau(A) * \tau(B)$, тогда как для обычного матричного умножения транспонирование является антиавтоморфизмом: $(AB)^t = B^t A^t$. В терминах операции $*$ традиционное матричное умножение является просто "умножением Цассенхауза" относительно операции $*$: $AB = A * \tau(B)$. Рассмотрение, например, трехмерных массивов $A = \{a_{ijk}\}$, $B = \{b_{ijk}\}$, $C = \{c_{ijk}\}$ и автоморфизм третьего порядка $\tau : a_{ijk} \mapsto a_{jki}$ приводит к "цассенхаузовому умножению" трехмерных массивов $X = [A, B, C]$, где

$$x_{pqr} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{pij} b_{iqj} c_{ijr}$$

и так далее.

Таким образом, из соотношения (1.11) следуют:

- равенство $N([x, y]) = N(x)N(y)$, то есть "соотношение мультипликативности" для нормы $N(x)$ относительно введенной операции $[x,\, y]$, причем эта норма совпадает с традиционной нормой элемента алгебры $R \oplus R$, выраженной в терминах изотропных координат (компонент);
- равенство
$$\sigma^1([x, y]) \bullet \sigma^2([x, y]) = \xi_1 \xi_2 I, \tag{1.12}$$
где (ξ_1, ξ_2) есть компоненты "цассенхаузовского произведения" $[x,\, y]$, причем упорядоченная пара верхних индексов операторов σ^1, σ^2 совпадает с упорядоченной парой нижних индексов компонент (ξ_1, ξ_2).

Последнее соображение является основой для обобщения понятия закона композиции для алгебр с n-арными операциями, а первое (мультипликативность нормы) является мотивацией для выбора именно такого принципа обобщения.

Введем некоторые формальные определения и понятия.

Пусть $\sigma_* \in S_n$ – некоторая подстановка:

$$\sigma_* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_*(1) & \sigma_*(2) & \ldots & \sigma_*(n) \end{pmatrix}.$$

Ассоциированным с подстановкой $\sigma_* \in S_n$ оператором $\sigma^* : H_n \to H_n$ будем называть оператор, переставляющий изотропные координаты элемента из алгебры H_n:

$$\sigma^* : x = (x_1, x_2, ..., x_n) \;\mapsto\; \sigma^*(x) = \left(x_{\sigma*(1)}, x_{\sigma*(2)}, ..., x_{\sigma*(n)}\right).$$

Пусть $(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^m)$ есть упорядоченное семейство ассоциированных операторов $(m \le n)$. Определим действие m-семейства $(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^m)$ на m-семейство элементов $(x_1, x_2, ..., x_m) \subset H_n$ "тензорным образом":

$$\left(\sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes ... \otimes \sigma^m\right)(x_1, x_2, ..., x_m) = \sigma^1(x_1) \bullet \sigma^2(x_2) \bullet ... \bullet \sigma^m(x_m).$$

Пусть $A \subset Z^m$ – некоторое мн-во индексов, $\tilde{S}_n^m = \{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, ..., \sigma^{a_m});\ (a_1, ..., a_m) \in \mathrm{A}\}$ – некоторое "отмеченное" индексным множеством $\mathrm{A} \subset Z^m$ множество m-семейств ассоциированных операторов.

Определение 1.1. m-арной операцией на алгебре $H_n\,(m \leq n)$, *порожденной семейством* $\tilde{S}_n^m = \{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, ..., \sigma^{a_m});\ (a_{1,...,}a_m) \in \mathrm{A}\}$, будем называть операцию, определенную равенством (здесь и далее $\lambda_m \in R$)

$$\begin{aligned}
&[x_1, x_2, ..., x_m] = \\
&= \lambda_m \sum_{(\sigma^{a_1},\sigma^{a_2},...,\sigma^{a_m}) \in \tilde{S}_n^m} (\sigma^{a_1} \otimes \sigma^{a_2} \otimes ... \otimes \sigma^{a_m})\,(x_1, x_2, ..., x_m) = \\
&= \lambda_m \sum_{(\sigma^{a_1},\sigma^{a_2},...,\sigma^{a_m}) \in \tilde{S}_n^m} \sigma^{a_1}(x_1) \bullet \sigma^{a_2}(x_2) \bullet ... \bullet \sigma^{a_m}(x_m)
\end{aligned}.$$

Определение 1.2. m-арную операцию на алгебре $H_n\,(m \leq n)$, порожденную семейством $\tilde{S}_n^m = \{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, ..., \sigma^{a_m});\ (a_{1,...,}a_m) \in \mathrm{A}\}$, будем называть *нормируемой*, если

$$N(x) = \lambda_m \sum_{(\sigma^{a_1},\sigma^{a_2},...,\sigma^{a_m}) \in \tilde{S}_n^m} (\sigma^{a_1} \otimes \sigma^{a_2} \otimes ... \otimes \sigma^{a_m})\,(x, x, ..., x) \in R. \tag{1.13}$$

Семейство ассоциированных операторов $\tilde{S}_n^m$ в этом случае будем называть *нормирующим семейством,* а функцию $N(x) \in R$ будем называть $\tilde{S}_n^m$ – *нормой* (или просто *нормой*, если из контекста ясно, какое семейство $\tilde{S}_n^m$ имеется в виду).

Определение 1.3. Пусть $S_n^m = \{(\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, ..., \sigma_{a_m});\ (a_{1,...,}a_m) \in \mathrm{A}\}$ есть множество подстановок, ассоциированных с нормирующим семейством операторов $\tilde{S}_n^m = \{(\sigma^{a_1}, \sigma^{a_2}, ..., \sigma^{a_m});\ (a_{1,...,}a_m) \in \mathrm{A}\}$, $[x_1, x_2, ..., x_m]$ есть m-арная операция, порожденная семейством $\tilde{S}_n^m$. Пусть в изотропных координатах элемент $[x_1, x_2, ..., x_m]$ имеет координаты $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$:

$$[x_1, x_2, ..., x_m] = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)\,.$$

Будем говорить, что *семейство* $\tilde{S}_n^m$ *порождает обобщенный* m*-арный закон композиции,* если выполняется равенство

$$\begin{aligned}
&N\left([x_1, x_2, ..., x_m]\right) = \underbrace{[[x_1, x_2, ..., x_m]\,, ..., [x_1, x_2, ..., x_m]]}_{m \quad \text{раз}} = \\
&= \lambda_m \sum_{(\sigma^{a_1},\sigma^{a_2},...,\sigma^{a_m}) \in \tilde{S}_n^m} (\sigma^{a_1} \otimes \sigma^{a_2} \otimes ... \otimes \sigma^{a_m}) \left(\underbrace{[x_1, x_2, ..., x_m]\,, ..., [x_1, x_2, ..., x_m]}_{m \quad \text{раз}}\right) = \\
&= \lambda_m \sum_{(\sigma_{a_1},\sigma_{a_2},...,\sigma_{a_m}) \in S_n^m} \xi_{\sigma_{a_1}(1)} \xi_{\sigma_{a_2}(2)} ... \xi_{\sigma_{a_m}(m)} I\,.
\end{aligned}$$

Пример 1.3. В обозначениях Примера 1.1 рассмотрим одноэлементное множество S_2^2 состоящее из одной пары подстановок $\{(\sigma_1,\ \sigma_2)\}$, определенных (1.8). Равенство (1.12) означает, что бинарная операция, порожденная семейством $\tilde{S}_2^2$ ассоциированных операторов $\tilde{S}_2^2 = \{(\sigma^1,\ \sigma^2)\}$, порождает бинарный закон композиции $\sigma^1([x, y]) \bullet\ \sigma^2([x, y]) = \xi_1 \xi_2 I$, совпадающий с точностью до обозначений с мультипликативным законом композиции

$$N\left([x, y]\right) = [[x, y]\,, [x, y]] = N(x) N\left(y\right) \qquad \text{и} \quad \lambda_2 = 1.$$

Замечание 1.4. Не всякое множество $\tilde{S}_n^m$ является нормирующим множеством операторов. Нетрудно убедиться, что в обозначениях Примера 1.1 одноэлементное множество $\tilde{S}_2^2 = \{(\sigma^1,\ \sigma^1)\}$ не является нормирующим множеством операторов, так как $N(x) = [x,x] \notin R$. В связи с этим возникает Вопрос 1: каковы необходимые и достаточные условия, сформулированные в теоретико-групповых терминах, того, чтобы множество операторов, ассоциированное с $S_n^m = \{(\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, ..., \sigma_{a_m})\}$, было бы нормирующим?

Замечание 1.5. Естественно, что наибольший интерес вызывают те нормирующие множества $\tilde{S}_4^m$ ассоциированных операторов множества S_4^m, для которых $N\,(w)$ при всех $w = (a,b,c,d) \in H_4$ совпадала бы с одной из форм (1.5). В связи с этим возникает Вопрос 2: каковы необходимые и достаточные условия, сформулированные в теоретико-групповых терминах, того, что норма, порожденная множеством операторов $\tilde{S}_n^m$ совпадала бы с одной из форм (1.5) для H_4?

Настоящая работа посвящена получению *достаточных* условий в Вопросе 2. Другими словами, получению ответа на вопрос: какова должна быть бинарная, тернарная или кватернарная операция на алгебре H_4, чтобы

$$N(x) = \underbrace{[x, x, ..., x]}_{m \quad \text{раз}} \in \{s_{24}\,(w)\,, s_{34}\,(w)\,, s_{44}\,(w)\}\,.$$

Замечание 1.6. Доказательства утверждений в следующих двух разделах работы сводятся к рутинной, хотя и громоздкой, проверке тождеств, аналогично Примеру 1.1. Поэтому в работе приводятся только формулировки соответствующих теорем.

2 Обобщенные n-арные законы композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$

2.1 Обобщенный кватернарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$

Пусть кватернарная операция в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ определена равенством

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \lambda_4 \left(\sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4\right)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_4 \sigma^1\,(x_1) {\bullet} \sigma^2\,(x_2) {\bullet} \sigma^3\,(x_3) {\bullet} \sigma^4\,(x_4) \quad (2.1)$$

где $\lambda_4 = 1$ и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Одноэлементное семейство четверки операторов $\tilde{S}_4^4 = \{(\sigma^1,\ \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4)\}$, ассоциированное с одноэлементным множеством S_4^4, состоящим из четверки (циклических) подстановок $\{(\sigma_1,\ \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)\}$ является нормирующим множеством, порождающим обобщенный кватернарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ в (мультипликативной) форме

$$\begin{aligned}
&N_4\left([x_1, x_2, x_3, x_4]\right) = \left[[x_1, x_2, x_3, x_4]\,, [x_1, x_2, x_3, x_4]\,, [x_1, x_2, x_3, x_4]\,, [x_1, x_2, x_3, x_4]\right] = \\
&= \left(\sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4\right)\left([x_1, x_2, x_3, x_4]\,, [x_1, x_2, x_3, x_4]\,, [x_1, x_2, x_3, x_4]\,, [x_1, x_2, x_3, x_4]\right) = \\
&= \xi_{\sigma_1(1)} \xi_{\sigma_2(2)} \xi_{\sigma_3(3)} \xi_{\sigma_4(4)} I = \\
&= \left(x_{11} x_{12} x_{13} x_{14}\right)\left(x_{21} x_{22} x_{23} x_{24}\right)\left(x_{31} x_{32} x_{33} x_{34}\right)\left(x_{41} x_{42} x_{43} x_{44}\right) I = \\
&= N_4\,(x_1)\, I \cdot N_4\,(x_2)\, I \cdot N_4\,(x_3)\, I \cdot N_4\,(x_4)\, I,
\end{aligned} \quad (2.3)$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ есть четверка координат элемента $[x_1, x_2, x_3, x_3]$ – результата определенной выше кватернарной операции в изотропном базисе: $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = [x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Кроме того, справедливо равенство

$$\begin{aligned} &N_4(x) = [x, x, x, x] = (\sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4)(x, x, x, x) = \\ &= \xi_{\sigma_1(1)} \xi_{\sigma_2(2)} \xi_{\sigma_3(3)} \xi_{\sigma_4(4)} I = (x_1 x_2 x_3 x_4) I = s_{44}(x) \bullet I, \end{aligned} \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Из Теоремы 2.1 следует, в частности, что введенное в определении 1.2. соотношением (1.14) понятие нормы действительно представляет собой мультипликативную (псевдо)норму (1.5) Бервальда-Моора $s_{44}(x)$, выраженную в изотропном базисе.

2.2 Обобщенный тернарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$

Пусть тернарная операция в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ определена равенством

$$[x_1, x_2, x_3] = \left(\sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4 + \sigma^4 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 \otimes \sigma^1 + \sigma^3 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2\right)(x_1, x_2, x_3), \tag{2.5}$$

где $\lambda_3 = 1$ и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. Четырехэлементное семейство троек операторов

$$\tilde{S}_4^3 = \left\{ \left(\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4 \right), \left(\sigma^4, \sigma^1, \sigma^3 \right), \left(\sigma^2, \sigma^4, \sigma^1 \right), \left(\sigma^3, \sigma^1, \sigma^2 \right) \right\},$$

ассоциированное с семейством S_4^4 троек подстановок

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

является нормирующим множеством, порождающим обобщенный тернарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ в форме

$$\begin{aligned} &N_3([x_1, x_2, x_3]) = [[x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2, x_3]] = \\ &= (\sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4 + \sigma^4 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 \otimes \sigma^1 + \sigma^3 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2)([x_1, x_2, x_3], ..., [x_1, x_2, x_3]) = \\ &= \left(\xi_{\sigma_2(1)} \xi_{\sigma_3(2)} \xi_{\sigma_4(3)} + \xi_{\sigma_4(1)} \xi_{\sigma_1(2)} \xi_{\sigma_3(3)} + \xi_{\sigma_2(1)} \xi_{\sigma_4(2)} \xi_{\sigma_1(3)} + \xi_{\sigma_3(1)} \xi_{\sigma_1(2)} \xi_{\sigma_2(3)}\right) I, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ есть четверка координат элемента $[x_1, x_2, x_3]$ – результата определенной выше тернарной операции в изотропном базисе:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = [x_1, x_2, x_3],$$

и, кроме того, выполняются равенства

$$\begin{aligned} &N_3(x) = [x, x, x] = \\ &= (\sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^4 + \sigma^4 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 \otimes \sigma^1 + \sigma^3 \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2)(x, x, x), \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$N_3(x) = s_{34}(x) I. \tag{2.10}$$

2.3 Обобщенный бинарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$

Пусть бинарная операция в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ определена равенством

$$[x_1, x_2] = \lambda_2 \left(\sigma^1 \otimes \sigma^2 + \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^1 \otimes \sigma^4 + \sigma^2 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 + \sigma^3 \otimes \sigma^4\right)(x_1, x_2)\,, \quad (2.11)$$

где $\lambda_2 = 1/2$ и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Теорема 2.3. Шестиэлементное семейство пар операторов

$$\tilde{S}_4^2 = \left\{\left(\,\sigma^1, \sigma^2\right), \left(\sigma^1,\ \sigma^3\right), \left(\,\sigma^1, \sigma^4\right), \left(\sigma^2, \sigma^3\right), \left(\,\sigma^2, \sigma^4\right), \left(\,\sigma^3, \sigma^4\right)\right\},$$

ассоциированное с семейством S_4^2 пар подстановок

$$S_4^2 = \{(\,\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1,\ \sigma_3), (\,\sigma_1, \sigma_4), (\sigma_2, \sigma_3), (\,\sigma_2, \sigma_4), (\,\sigma_3, \sigma_4)\} \quad (2.13)$$

является нормирующим множеством, порождающим обобщенный бинарный закон композиции в алгебре $R \oplus R \oplus R \oplus R$ в форме

$$\begin{aligned} &N_2([x_1, x_2]) = [[x_1, x_2], [x_1, x_2]] = \\ &= \tfrac{1}{2}(\sigma^1 \otimes \sigma^2 + \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^1 \otimes \sigma^4 + \sigma^2 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 + \sigma^3 \otimes \sigma^4)([x_1, x_2], [x_1, x_2]) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\xi_{\sigma_1(1)}\xi_{\sigma_2(2)} + \xi_{\sigma_1(1)}\xi_{\sigma_3(2)} + \xi_{\sigma_1(1)}\xi_{\sigma_4(2)} + \xi_{\sigma_2(1)}\xi_{\sigma_3(2)} + \xi_{\sigma_2(1)}\xi_{\sigma_4(2)} + \xi_{\sigma_3(1)}\xi_{\sigma_4(2)}\right) I, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ есть четверка координат элемента $[x_1, x_2]$ – результата определенной выше тернарной операции в изотропном базисе: $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = [x_1, x_2]$.

Кроме того, справедливы равенства

$$\begin{aligned} &N_2(x) = [x, x] = \\ &= 1/2\,(\sigma^1 \otimes \sigma^2 + \sigma^1 \otimes \sigma^3 + \sigma^1 \otimes \sigma^4 + \sigma^2 \otimes \sigma^3 + \sigma^2 \otimes \sigma^4 + \sigma^3 \otimes \sigma^4)(x, x)\,, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$N_2(x) = s_{24}(x)\,. \quad (2.16)$$

Замечание 2.3. Из Теоремы 2.3 следует, в частности, что введенное в определении 1.2. соотношением (1.14) понятие нормы действительно представляет собой (псевдо)норму соответствующую метрике Минковского в форме $s_{44}(x)$, выраженную в изотропном базисе.

Замечание 2.4. В отличие от множества (2.4) подстановок в Теореме 2.2, которое группой не является, множество (2.8) подстановок в Теореме 2.3 является четырехэлементной нециклической группой, а в Теореме 2.1 множество подстановок есть циклическая группа.

3 Обобщения и открытые проблемы

1. В связи с Вопросами 1 и 2 п. 1 возникает проблема классификации обобщенных законов композиции для пространства H_n произвольной размерности.

Проблема 1. Каковы необходимые и достаточные условия, сформулированные в теоретико-групповых (или комбинаторных) терминах, того, чтобы множество операторов, ассоциированное с семейством подстановок $S_n^m = \{(\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, ..., \sigma_{a_m})\}$, было бы нормирующим; как связана порожденная норма с коэффициентами определяющего уравнения элемента алгебры H_n?

Отметим, что групповая структура множества подстановок S_n^m является, скорее всего, достаточным условием того, чтобы ассоциированное множество операторов было бы нормирующим (Теоремы 2.1 и 2.3). Однако необходимость этого неочевидна, как показывает Теорема 2.2. Скорее всего, вопрос классификации множеств S_n^m в Проблеме 1 является комбинаторным, но не исключительно теоретико-групповым.

2. Исчерпывающая классификация ассоциативно-коммутативных алгебр без нильпотентных элементов содержится в теореме Вейерштрасса [2]: любая ассоциативно-коммутативная конечномерная алгебра без нильпотентных элементов над R изоморфна прямой сумме алгебр R и C.

Из этой теоремы легко следует, что существует не более трех неизоморфных четырехмерных алгебр этого класса, а именно: $H_4, H_2 \oplus C, C \oplus C$. В связи с этим возникает проблема экстраполяции теорем 2.1 – 2.3 на случай указанных четырехмерных алгебр и на случай произвольной ассоциативно коммутативной конечномерной алгебры A_n.

Проблема 2. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы множество операторов, ассоциированное с семейством автоморфизмов алгебры A_n, было бы нормирующим; как связана порожденная норма с коэффициентами определяющего уравнения элемента алгебры A_n?

3. Из соотношения (2.3) и Замечания 2.1 следует чисто алгебраический факт мультипликативности нормы Бервальда-Моора, выраженной в терминах изотропного базиса. Конечно, соответствующие (индуцированные) соотношения инвариантности формы $S_{44}(x)$ остаются справедливыми и в "физическом" базисе $\{E, I, J, K\}$ с Таблицей 2.1 умножения базисных элементов. Но соотношение мультипликативности для формы $s_{44}(x)$, а именно $s_{44}(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 \bullet x) = s_{44}(x_1)\, s_{44}(x_2)\, s_{44}(x_3)\, s_{44}(x_4)$ может, по всей видимости, интерпретироваться как "масштабная инвариантность" свойств четырехмерного пространства-времени с метрикой Бервальда-Моора и/или как его "пространственно-временная изотропность". В отличие от Бервальд-Мооровской метризации четырехмерного пространства-времени, четырехмерное пространство с метрикой Минковского, с точностью до масштабирования совпадающего с H_4, снабженным метрической формой $S_{24}(x)$, обладает только свойством "пространственной", но не "пространственно-временной" изотропией. Группа (линейных) изометрий пространства H_4 с метрикой Минковского хорошо известна и вне связи с Теоремой 2.3.

Проблема 3. Могут ли быть получены преобразования Лоренца из соотношений (2.9) и (2.10), то есть, как прямые следствия *явных соотношений* Теоремы 2.3?

4. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ есть "какой-то" базис в H_4, изотропный, например. Пусть B оператор, не обязательно линейный, действующий из H_4 в H_4, так что

$$Bx = y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 \in H_4.$$

Условие того, что B сохраняет форму $s_{24}(x)$, то есть норму $N_2(x)$, может быть записано в виде

$$N_2(x) = [x, x] = [Bx, Bx] = [y, y] = N_2(y) = N_2(Bx). \tag{3.1}$$

Но, в силу линейности операции $[w_1, w_2]$, соотношение (3.1) можно переписать в виде

$$[x, x] = \sum_{i,j=1}^{4} x_i x_j [e_i, e_j] = [y, y] = \sum_{i,j=1}^{4} y_i y_j [e_i, e_j].$$

Если оператор B линейный, то массив $\{b_{ij} = [e_i, e_j]\,;\ i, j = 1, 2, 3, 4\}$, как известно, полностью определяет действие оператора B на всем H_4. Более того, для линейных изометрических операторов условия на числа b_{ij} могут быть получены из Теоремы 2.3. Если требовать того, чтобы B сохраняло форму $s_{34}(x)$, то есть норму $N_3(x)$, то также в силу линейности операции $[w_1, w_2, w_3]$, получаются условия изометричности (нелинейного) оператора B в терминах *трехмерного* массива $\{b_{ijk} = [e_i, e_j, e_k]\,;\ i, j, k = 1, 2, 3, 4\}$ и *явных соотношений* Теоремы 2.2.

Проблема 4. Пользуясь Теоремой 2.2, описать операторы B, сохраняющие форму $s_{34}(x)$, то есть норму $N_3(x)$.

Работа выполнена при поддержке некоммерческого фонда развития исследований по финслеровой геометрии.

Литература

1. *Общая алгебра.* (Под ред. Л. А. Скорнякова). М.: Наука, 1990
2. Allenby, R. B. J. T., *Rings, Fields and Groups: An Introduction to Abstract Algebra*, 2nd edition, 1991
3. Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа.* – М.: Наука, 1973.
4. Чернов В. М. Об определяющих уравнениях элементов ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр и ассоциированных метрических формах. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.* №4, 2005, с. 57–74.
5. V. M. Chernov. On defining equations for the elements of associative and commutative algebras and on associated metric forms. In: D. G. Pavlov (Ed.) *Space-Time Structure.* Moscow, TETRU, 2006, pp. 7–24
6. H. Zassenhaus. Über endliche Fastkörper. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 11 (1936), 187–220.
7. М. Холл. *Теория групп.* ИЛ, 1962.
8. С. Ленг. *Алгебра.* М.: Мир, 1968.
9. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.* №1, 2004, с. 5–19.
10. D. G. Pavlov. Generalisation of scalar product axioms. In: D. G. Pavlov (Ed.) *Space-Time Structure.* Moscow, TETRU, 2006, pp. 7–24.

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2006 г.