СИММЕТРИИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Д. Г. Павлов

МГТУ им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

"Важны не вещи, а принципы симметрии"
С. Вайнберг

1. Введение

Не так давно был установлен важный геометрический факт в отношении четырехмерного пространства с метрикой Бервальда-Моора: если бы в нем могли "жить" наблюдатели типа нас, и если бы они использовали для ориентации в основном низкоскоростные сигналы, то с их точки зрения Мир вокруг вполне естественно расщеплялся бы на одно временное и три пространственных измерения, причем последние образовывали бы почти евклидово подпространство [1]. При этом разница между геометрией такого трехмерия и обычного евклидова пространства достаточно часто оказывалась бы исчезающе малой. Этот вывод связан с тем обстоятельством, что наблюдатель для ориентации в окружающем его пространстве-времени вынужден пользоваться так называемым радарным методом [2], заключающимся в сравнении временных интервалов, прошедших по его собственным часам с теми, что прошли по часам посылаемых и принимаемых им с разных сторон сигналов. Именно такой метод мы, как раз, и применяем в реальности и именно он оказывается ответственным за то, что пространство с метрикой Бервальда-Моора, являющееся на самом деле совершенно равноправным по всем своим четырем направлениям, субъективно представляется асимметричным и расслоенным на три плюс одно принципиально различные измерения.

Этот довольно неожиданный эффект позволяет рискнуть пойти еще дальше и выдвинуть почти абсурдное предположение, что таким же симметричным образом могут быть устроены не только пространственно-временные измерения, но и все фундаментальные взаимодействия. Другими словами, вполне возможны абсолютно симметричные Миры, которые "населяющим их наблюдателям", из-за субъективности точек зрения каждого из них, представляются сильно асимметричными, причем не только в плане пространства-времени, но и заполняющих его полей.

2. Группы и n-группы симметрий

Утверждение, что понятие симметрии должно стоять рядом с такими фундаментальными категориями, как пространство, время, материя, уже давно не вызывает сомнений. Ярким примером может служить знаменитая эрлангенская программа Феликса Клейна [3], в которой он, по сути, обозначил основную задачу любой геометрии, как изучение групп соответствующих ей симметрий. Однако представляется, что истинное понимание роли и места симметрий в организации окружающего нас Мира, как среди математиков, так и среди физиков, все еще достаточно далеко от своего полного осмысления. Основанием к такому, казалось бы, явно уничижительному заключению может служить простое наблюдение, что одной из основных особенностей понятия группы симметрий является связь с бинарными операциями, тогда как природа математических операций сама по себе совсем не указывает на бинарность, как на единственно выделенное отношение. Более того, логика действительно последовательных исследований просто требует, чтобы наравне с бинарными операциями рассматривались и n-арные. Потенциальную плодотворность такого подхода демонстрируют достаточно интересные результаты, полученные на основе замены билинейной симметрической формы, лежащей в основе понятия метрики, на полилинейную [4]. Возникающее в результате подобного обобщения скалярное полипроизведение приводит нас к некоему подобию n-арной операции, что порождает уже не обычные евклидовы или псевдоевклидовы геометрии, а линейные финслеровы пространства. Упоминавшийся выше факт, что среди последних встречаются представители, которые могут не только на равных, но и с серьезным преимуществом конкурировать с пространствами Галилея и Минковского [5], позволяет предположить целесообразность следующих шагов в том же направлении. В частности, было бы крайне любопытно выяснить, к каким фундаментальным построениям мы смогли бы прийти, если бы помимо привычных бинарных операций стали рассматривать и их n-арные разновидности не только для получения скалярных величин, но векторных и даже тензорных. Конечно, подобные вопросы уже отчасти рассматриваются математиками и физиками, например, в работах связанных с n-лиевыми алгебрами [6] и в некоторых других [7], но проблема заключается в том, чтобы применить данную логику к совершенно иной геометрии пространства-времени, чем привычные пространства Галилея или Минковского.

3. Группы непрерывных симметрий пространств с метриками Бервальда-Моора

Мы попробуем проанализировать непрерывные симметрии не применительно к геометриям "вообще", а отталкиваясь от пространств с метриками Бервальда-Моора. Их удивительной особенностью является не только абсолютная симметрия, но и тесная связь с коммутативно-ассоциативыми алгебрами, во многом оказывающимися близкими родственниками алгебры комплексных чисел. Простейшим представителем такого ряда является одномерное пространство, которому соответствует алгебра действительных чисел. Метрическую функцию данного пространства можно представить в виде:

$$dS = dt.$$

Непрерывные симметрии этого пространства, которое в определенном смысле можно интерпретировать как одномерное время, связаны с однопараметрической группой трансляций. Заметим, что последней в алгебраическом плане соответствует операция сложения.

Для двухмерного пространства с метрикой Бервальда-Моора метрическая функция принимает наиболее простой и симметричный вид в так называемом изотропном базисе, связанном с векторами нулевой длины:

$$dS^2 = da_1\, da_2. \tag{1}$$

Соответствующий базис трудно представить физически, поскольку он состоит из векторов, лежащих на световом конусе. Переходя к компонентам, возникающим уже в обычном ортонормированном базисе, которые выражаются через старые компоненты соотношениями:

$$dt = da_1 + da_2; \quad dx = da_1 - da_2,$$

получаем существенно более привычную форму:

$$dS^2 = dt^2 - dx^2.$$

Как видим, двухмерное пространство Бервальда-Моора и псевдоевклидова плоскость – одно и тоже.

Непрерывные симметрии этого пространства по сравнению с одномерным примером уже достаточно сложны и разнообразны. Данное обстоятельство можно проиллюстрировать следующим образом. Как известно, каждой квадратичной форме взаимно однозначным образом ставится в соответствие билинейная симметрическая форма от двух векторов, которая в данном конкретном случае метрики (1) наиболее простой вид приобретает в изотропном базисе:

$$(A, B) = 1/2(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

откуда выражение для квадрата интервала получается подстановкой в данную форму одного и того же вектора A:

$$(A, A) = \|A\|^2 = a_1 a_2.$$

Если зафиксировать величину $\|A\|$ в качестве инварианта, то непрерывные преобразования, оставляющие этот параметр между всеми парами точек неизменным, образуют трехпараметрическую группу, разделяющуюся на двухпараметрическую подгруппу трансляций и однопараметрическую группу гиперболических поворотов (одномерных бустов). Кстати, здесь снова, как и в одномерном случае, можно наблюдать соответствие трансляций операции сложения, а вот вращениям уже соответствует вторая фундаментальная операция – умножение. Вернее сказать, вращениям соответствует операция умножения на число единичного модуля.

В двухмерном пространстве с метрикой Бервальда-Моора помимо длин векторов появилась еще одна метрическая величина, которая также может выступать самостоятельным инвариантом. Эта величина – угол. Чисто формально угол между двумя векторами можно определить как действительное число равное некоторой специальной функции от билинейной формы, в которую в качестве аргументов входят два единичных вектора $a = A/\|A\|$, $b = B/\|B\|$, связанные с рассматриваемыми направлениями:

$$\alpha = f((a, b)),$$

Вид и геометрический смысл функции f определяется требованиями, предъявляемыми к свойствам понятия угла. Так, если пожелать аддитивности сложения углов при поворотах, эта функция оказывается гиперболическим арккосинусом.

Возвращаясь к вопросу перечисления метрически выделенных преобразований, которые оставляют инвариантными не длины, а углы, мы получаем непрерывную группу, однако существенно более широкую, чем изометрии. Это группа так называемых конформных преобразований псевдоевклидовой плоскости. Она определяется условиями, аналогичными условиям Коши-Римана на комплексной плоскости, с той разницей, что для двух сопряженных функций U и V теперь справедливо иное соотношение знаков:

$$\partial U/\partial t = \partial V/\partial x, \quad \partial U/\partial x = \partial V/\partial t.$$

Еще более просто эти условия записываются в изотропном базисе:

$$\partial P_1/\partial a_2 = 0; \quad \partial P_2/\partial a_1 = 0.$$

Группа конформных преобразований псевдоевклидовой плоскости по своему разнообразию абсолютно ничем не отличается от своего аналога на евклидовой плоскости, а потому представляется удивительным, почему для комплексных чисел имеются многочисленные приложения, причем не только геометрические, но и физические, а в случае двухмерного пространства-времени ничего подобного не наблюдается. Возможно, дело в том, что псевдоевклидову плоскость привыкли рассматривать как упрощенный аналог четырехмерного пространства специальной теории относительности, для которого конформная группа не бесконечнопараметрическая, как на плоскости, а имеет всего лишь пятнадцать параметров (так называемая группа Боне-Метцера). Кроме того, если решиться интерпретировать конформные преобразования на псевдоевклидовой плоскости как переходы от одних систем отсчета к другим, в общем случае придется переосмысливать одно из основных положений СТО, согласно которому последняя имеет дело только с инерциальными системами отсчета. Самое неприятное, что даже если бы такая интерпретация завершилась непротиворечивым образом, расширить ее на четырехмерное пространство Минковского оказалось бы все равно невозможным именно по причине принципиального различия конформных групп одного и другого. Однако, в рассматриваемом в настоящей работе случае мы реальное четырехмерное пространство-время пытаемся связывать не столько с геометрией Минковского, сколько с пространствами обладающими метрикой Бервальда-Моора, а это означает, что и вопрос об интерпретации конформных симметрий на двухмерной плоскости снова встает как один из центральных.

Заметим, что псевдоевклидова плоскость является не только частным случаем псевдориманова пространства, но и частным представителем существенно более широкого класса пространств, связываемых с именем Германа Вейля. Геометрия Вейля отличается от геометрии Римана тем, что после процедуры параллельного переноса по замкнутому контуру некоторого вектора тот не обязан совпадать сам с собой не только по первоначальному направлению, но и по длине. Кроме метрического тензора, изменяющегося от точки к точке и имеющего второй ранг, пространства Вейля характеризуются еще одним тензором, но уже первого ранга, который задает для каждой точки и ее ближайшей окрестности собственный масштаб. Естественно, что если этот масштаб и по величине и по направлению один и тот же, мы получаем обычное риманово пространство. Однако масштаб может изменяться не только в кривых римановых пространствах, он может быть переменным и в плоских геометриях. Таким образом, возвращаясь к рассматриваемой проблеме, у нас появляется заманчивая возможность связывать с произвольными конформными преобразованиями псевдоевклидовой плоскости переход от одной плоскости Вейля к другой.

Что удивительно, используя такой прием, мы получаем существенно более интересную модель плоского пространства-времени, чем это предполагает двухмерный аналог СТО. Пожалуй, самое важное отличие при этом заключается даже не в возможности рассматривать кроме инерциальных систем отсчета еще и некоторые особого вида неинерциальные – более существенным оказывается появление среди аксиом теории относительности новой аксиомы, допускающей переменные от события к событию масштабы. Ведь, по сути, это приводит нас к выводу о возможности существования таких плоских геометрий пространства-времени, в которых скорость течения времени меняется от точки к точке, причем закон, устанавливающий этот темп, оказывается не произвольным, а подчиняющимся одному из основных геометрических принципов – принципу симметрии (в данном случае – конформной).

Косвенным свидетельством обоснованности предлагаемого подхода может служить легкость, с которой он распространяется на комплексную плоскость. В этом случае каждому конформному отображению мы точно так же можем поставить в соответствие переход от одной плоскости Вейля к другой, только уже не с псевдоримановым, а с римановым метрическим тензором, одним и тем же в каждой точке.

Таким образом, перейдя от одномерного пространства Бервальда-Моора всего лишь к двухмерному, мы не только получили возможность расширить внутренние непрерывные симметрии с конечнопараметрической группы на бесконечнопараметрическую, но даже смогли пересмотреть очевидность одного из основных допущений СТО о равномерности течения времени в плоских пространствах.

В трехмерном пространстве с метрикой Бервальда-Моора все оказывается еще более интересным. Метрическая функция этого пространства в изотропном базисе имеет также весьма лаконичный вид:

$$dS^3 = da_1\, da_2\, da_3,$$

при этом ей уже нельзя сопоставить скалярное произведение, как было в предыдущем примере. Зато для подобных пространств, как отмечалось выше, существует обобщение этого понятия [8], которое в рассматриваемом случае сводится к трилинейной симметрической форме от трех векторов и в изотропном базисе принимает вид:

$$(A, B, C) = 1/6\,(a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_3b_2c_1). \qquad (2)$$

Такое отклонение от классических правил построения метрических пространств, конечно же, не может пройти без последствий, в том числе, и для непрерывных симметрий. Изометрические преобразования, оставляющие инвариантными интервалы между произвольными парами точек, связанные с формами:

$$(A, A, A) = \|A\|^3$$

образуют пятипараметрическую группу и не содержат в себе практически ничего особенного, ну, разве что соответствующие группы таких же по размерности евклидова и псевдоевклидова пространств были шестипараметрическими. Однако, переходя к аналогам углов и определяемым теми аналогам конформных преобразований, мы сталкиваемся с первым сюрпризом. Дело в том, что, постулируя трилинейную симметрическую форму (2), с каждой парой единичных векторов $a = A/\|A\|$ и $b = B/\|B\|$ можно связывать уже не один, а два независимых параметра, в частности, определяемых как некоторые функции от форм:

$$\alpha = f_1((a, a, b)) \ \text{ и } \ \beta = f_2((a, b, b)).$$

Похоже, правда, несколько удобнее будет рассматривать их симметризованные и антисимметризованные линейные комбинации:

$$\alpha' = f_1'((a, a, b) + (a, b, b)) \ \text{ и } \ \beta' = f_2'((a, a, b) - (a, b, b)),$$

Естественно предположить, что каждый из таким образом определяемых углов задает свой собственный тип конформных преобразований, среди которых особенными свойствами будут выделяться преобразования, сохраняющие оба угла. Именно последние и будем считать прямыми аналогами обычных конформных преобразований. Группа таких преобразований, как и в двухмерном случае, оказывается бесконечнопараметрической, а в алгебраическом плане с ней возможно связать понятие, аналогичное аналитической функции. Условия такой аналитичности, обобщающие условия Коши-Римана для двухмерной плоскости, сводятся к существованию трех сопряженных скалярных функций P_1, P_2, P_3, таких что:

$$\partial P_1/\partial a_2 = 0; \quad \partial P_1/\partial a_3 = 0; \quad \partial P_2/\partial a_1 = 0;$$
$$\partial P_2/\partial a_3 = 0; \quad \partial P_3/\partial a_1 = 0; \quad \partial P_3/\partial a_2 = 0,$$

или другими словами, в изотропном базисе каждая из них зависит только от одной координаты.

Хотя конструкции таким способом определяемых аналитических функций на алгебре тройных чисел и соответствующих им конформных преобразований не особенно сложны, их класс достаточно широк, а следствия, с учетом сказанного выше на счет переменного в каждой точке масштаба, далеко не очевидны. Во всяком случае, они заслуживают того, чтобы их свойства изучались достаточно подробно. Однако сейчас мы не будем этого делать, а последуем дальше.

Точно так же, как скалярное произведение от двух векторов дает основания для введения, кроме длины, еще одного метрического параметра – угла, определенная на трехмерном пространстве Бервальда-Моора трилинейная симметрическая форма дает основания рассматривать совершенно непривычную для обычных геометрий величину, являющуюся действительной метрической характеристикой уже трех направлений. Такую величину, назовем ее *трингл*, условимся связывать с некоторой тригонометрической функцией от формы:

$$f((a^*, b^*, c^*)) = tringl,$$

в которую входят не просто единичные вектора, а попарно образующие "единичные" углы. Понятие "единичного" угла в пространствах типа Бервальда-Моора следует связывать с обобщением ортогональности.

Понятие трингла не просто отличает рассматриваемую, в общем-то достаточно простую, трехмерную геометрию от привычных римановых и псевдоримановых пространств, оно отличает их *кардинально*. Дело в том, что длина и угол, вокруг которых и было сосредоточено построение геометрии все несколько тысячелетий ее развития, начиная с Евклида и даже до него, теперь перестают быть уникальными метрическими характеристиками, и уступают часть своего безраздельного господства новым участникам, среди которых тринглы – это только первые члены бесконечного ряда. И тринглы, и их дальнейшие обобщения – абсолютно геометрические понятия, но, при этом, им нет аналогов в нашем геометрическом сознании. Собственно, именно поэтому их наличие в геометрии так долго и было скрыто от внимания математиков. Теперь же ситуация меняется и у нас в связи с этим, возможно, появляются вполне реальные шансы совершенно иначе взглянуть на взаимоотношения геометрии и квантовой механики, которые, как известно, были принципиально несовместимы, пока первая в лице ОТО строилась вокруг лишь таких фундаментальных понятий, как длины и углы.

Требование сохранения инвариантности тринглов при некотором классе преобразований трехмерного пространства с метрикой Бервальда-Моора или, что тоже самое, пространства тройных чисел H_3, с необходимостью приведет к обобщению ранее полученных условий (3) на более интересные. Какими окажутся эти условия и связанные с ними отображения, мы не будем сейчас определять, ясно одно, что именно такими и им подобными преобразованиями многомерные пространства Бервальда-Моора и должны составить самую серьезную конкуренцию римановым и псевдоримановым многообразиям.

В случае четырехмерного Бервальда-Моора все построения можно повторить. В результате мы придем к одной форме для интервала вектора, трем формам для аналогов углов, к трем – для аналогов тринглов и еще к одной форме от четырех векторов – квадрауглу. Естественно, что за каждым из этих новых понятий и за их комбинациями стоят свои собственные непрерывные группы метрически выделенных преобразований, или иными словами, симметрий. Конечно, эти симметрии еще только предстоит классифицировать и изучить, однако уже сейчас понятно, что потенциал стоящий за их разнообразием весьма высок, причем не только в плане абстрактной геометрии, но и применительно к физике.

4. Группы симметрий пространства Чернова

Пожалуй, здесь будет также уместно отметить, что помимо рассмотренных выше пространств с метрикой Бервальда-Моора и размерностью от единицы до четырех, определенный интерес представляет еще одно пространство: четырехмерное, но с кубической метрической формой:

$$dS^3 = dx_1dx_2dx_3 + dx_1dx_2dx_4 + dx_1dx_3dx_4 + dx_2dx_3dx_4. \tag{3}$$

Метрическую функцию такого вида условимся называть метрикой Чернова по фамилии российского математика, впервые обратившего на нее внимание в контексте применимости к реальному пространству-времени [9]. Логичность предположения Чернова вытекает из наблюдения, что метрическая форма пространства Минковского в специальном изотропном базисе принимает вид симметрического многочлена от четырех переменных второй степени:

$$dS^2 = dx_1dx_2 + dx_1dx_3 + dx_1dx_4 + dx_2dx_3 + dx_2dx_4 + dx_3dx_4,$$

что хоть и не кажется очевидным, на самом деле, как не сложно проверить обычной линейной подстановкой, является эквивалентным выражением для более часто употребляемой квадратичной формы:

$$dS^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

В том же ключе можно проинтерпретировать и пространство с метрической функцией в виде симметрического многочлена от четырех переменных первой степени:

$$dS^1 = dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4. \tag{4}$$

Такое пространство оказывается тесно связанным с линейной зависимостью временного интервала, характерной для геометрии Галилея, то есть с представлениями о времени, свойственными классической физике.

Таким образом, было бы, наверное, просто странно, если б из четырех симметрических многочленов от четырех переменных, принимаемых в качестве фундаментальных метрических форм, одна оказалась бы исключением и не нашла бы своего отражения в реальной физике. Скорее уж, следует удивляться не гипотезе Чернова, а тому, почему она не появилась значительно раньше.

Конечно, пространство Чернова просто обязано обладать собственным своеобразием и существенно отличаться, как от пространства Минковского, так и от пространства Галлилея, вернее, того пространства, что связано с линейной метрической формой (4). Однако, представляется что третья степень метрической формы, все же, несколько ближе к привычным нам квадратичным представлениям и пространство Чернова вполне может послужить своеобразным мостиком в изучении столь необычной и сложной геометрии, которой обладает финслерово пространство с метрической формой Бервальда-Моора четвертой степени. В данном контексте именно пространство Чернова, по-видимому, может лучше всего помочь разобраться с пониманием не только обычных симметрий, но и тех, что объективно оказываются за рамками понятия группы, то есть, связаны не с бинарными, а уже с тернарными операциями.

Поскольку метрика Чернова кубическая, геометрия ей соответствующая, в первую очередь, должна содержать тернарные свойства. В частности, это проявляется в том, что роль скалярного произведения в ней играет трилинейная форма от трех векторов A, B и C, которая в одном из наиболее удобных базисов принимает вид:

$$(A, B, C) = 1/6\,(a_1 b_2 c_3 + a_1 b_2 c_4 + a_1 b_3 c_2 + \cdots + a_4 b_3 c_1 + a_4 b_3 c_2). \tag{5}$$

Как нетрудно проверить, при подстановке в данную форму три раза одного и того же вектора A, получается выражение эквивалентное (3) и его по аналогии с квадратом интервала обычного вектора можно связывать с кубом интервала вектора пространства Чернова:

$$(A, A, A) = \|A\|^3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4. \tag{6}$$

Естественно, что столь лаконичный вид метрической формы, при переходе к другому базису будет меняться. В частности, при переходе к "ортонормированному" базису, связанному с изотропными координатами соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= t + x + y + z, \quad & a_2 &= t - x + y - z \\ a_3 &= t + x - y - z, \quad & a_4 &= t - x - y + z \end{aligned} \tag{7}$$

форма (6) принимает вид:

$$\|A\|^3 = 4t(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 8xyz.$$

Удивительным образом в таком представлении метрической формы соединились воедино и линейная по времени метрика Галилея (t), и квадратичная Минковского $(t^2 - x^2 - y^2 - z^2)$, и кубическая форма трехмерного пространства Бервальда-Моора (xyz). Все это лишний раз подчеркивает определенную взаимосвязь всех вариантов метрик, выражаемых симметрическими многочленами.

Использование для базиса связанного с координатами t, x, y, z термина "ортонормированный", хотя тот и заключен в кавычки, следует сопроводить специальным замечанием. Дело в том, что понятие ортогональности векторов в классическом смысле вытекает из билинейной симметрической формы, а у нас ее место занимает уже трилинейная форма. Кроме того, подставляя в форму (6) три раза любой из векторов X, Y, Z, имеющих в соответствии с (7) изотропные координаты $(1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, -1)$ и $(1, -1, -1, 1)$, получаем:

$$\begin{aligned} (X, X, X) = \|X\|^3 &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 0; \\ (Y, Y, Y) = \|Y\|^3 &= 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 0; \\ (Z, Z, Z) = \|Z\|^3 &= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Оказывается, кубы "длин" этих векторов равны нулю, как и у изотропных векторов пространства Минковского. Следовательно, о "нормированности", или единичности соответствующего базиса в обычном смысле, не может быть и речи. И все же, мы утверждаем, что термин "ортонормированности" для приведенной четверки достаточно уместен. Это, на первый взгляд парадоксальное заключение, связано с фундаментальным для физики понятием относительной одновременности. Впрочем, последовательным обоснованием данного утверждения, как и многим другим, что упоминалось выше, мы займемся в другой раз.

Настоящая работа не предполагает всестороннего исследования геометрий пространств Чернова и Бервальда-Моора, или связанных с ними n-арных операций и симметрий. Ее задача – на нескольких примерах попытаться обозначить максимально широкий круг идей, которые можно было бы в последующем развить и положить в основу более глубоких представлений о геометрии, чем обозначено в той же эрлангенской программе. Одной из таких идей является возможность естественным образом обобщить геометрию не только Римана, но и Вейля. Как известно в этих многообразиях в каждой точке задаются один (геометрия Римана) или два (геометрия Вейля) тензора. Мы же, беря за основу пространство Чернова, можем рассматривать в одной точке совокупность сразу трех тензоров, а для обобщения четырехмерного пространства Бервальда-Моора – даже четыре тензора, по одному на каждую из валентностей от единицы до четырех. Совокупность именно этой четверки тензоров, быть может, когда ни будь и позволит с единых геометрических позиций описать если не все, то хотя бы два фундаментальных взаимодействия, не выходя за рамки четырех измерений. Во всяком случае, и теория Эйнштейна, и теория Вейля должны оказаться упрощенными частными случаями этой новой пока еще не созданной теории и хотя ее появление, без всякого сомнения, будет сопряжено с определенными трудностями, скорее всего, это просто вопрос времени.

5. N-арные операции и числа-матрицы

Однако даже такой солидный потенциал, что был предсказан для некоторых финслеровых пространств выше, еще не исчерпывает всех возможных связанных с ними сюрпризов, правда, надо признать, что наши дальнейшие построения во многом будут носить уже спекулятивный характер.

До сих пор мы хоть и основывали свои построения на практически n-арной операции скалярного полипроизведения, в основе определяемых ею геометрий, все же, так или иначе фигурировали бинарные операции, связанные с аксиоматическим определением алгебр H_n и функций над ними. Однако алгебры и операции могут быть не только бинарными, но и n-арными.

С другой стороны, обращает на себя внимание удивительный факт, что одно из самых значимых понятий в современной геометрии – вектора, часто имеет своим математическим аналогом ту или иную гиперкомплексную числовую структуру, а являющиеся его естественными обобщениями тензоры валентности два и выше – подобного пока не востребовали. Такое положение дел представляется достаточно странным, в связи с чем, требует проверки гипотеза: нельзя ли хотя бы некоторым тензорам высших валентностей поставить в соответствие гиперкомплексные системы более общие, чем гиперчисла. Естественно предположить, что у таких математических объектов количество свободных компонент должно в точности соответствовать количеству независимых компонент ставящегося им в соответствие тензора. Ключевым моментом в поиске подобных структур может оказаться идея постулировать не только и не столько бинарные операции типа обычных сложений и умножений, сколько n-арные. Отдавая отчет, на сколько широким при таком подходе оказывается спектр потенциальных кандидатов, можно выдвинуть ряд упрощающих предположений, которые, по нашему мнению, существенно облегчат поиск. Прежде всего, ограничимся симметрическими тензорами, связанными с матрицами: 2×2, $3 \times 3 \times 3$ и $4 \times 4 \times 4 \times 4$. В принципе есть еще одна матрица вида "1", но она в определенном смысле тривиальна, так как представляет просто скаляр. Более сложные матрицы типа $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ и т. д. также вряд ли понадобятся, так как существующая в топологии ситуация с уникальной сложностью именно четырехмерных пространств, скорее всего, не потребует этих дальнейших расширений. В любом случае, имеем полное право, временно ограничить себя только тремя обозначенными выше объектами. Для каждого из них следует попытаться определить бинарную, тернарную и тетрадную операции, соответственно. Эти операции должны быть максимально просты и симметричны.

В первую очередь следует рассмотреть случай матриц 2×2, причем пытаться сопоставлять им не четырехмерное линейное пространство, а специального вида двухмерное многообразие. Учитывая, что комплексным и двойным числам (которые, кстати, можно представлять матрицами 2×2, но весьма специального вида) традиционно сопоставляются вектора евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей, нам желателен прием, включающий эти две возможности, как частные случаи. Скорее всего, следует сосредоточиться на двухмерных многообразиях, обладающих геометрией Вейля. Если подобный поиск пройдет результативно и мы сможем указать хотя бы один способ интерпретации матриц 2×2 и действий с ними, как специальных геометрических объектов неких вейлевских пространств, переход к матрицам $3 \times 3 \times 3$, а потом и к $4 \times 4 \times 4 \times 4$ будет иметь гораздо больше шансов на успех, чем сейчас.

Прежде всего, хотелось бы обратить внимание на следующий факт. Существует всего два типа фундаментальных полилинейных симметрических многочлена от двух переменных, которые, в определенном смысле, можно называть базисными:

$$(A, B) = a_1 b_1 + a_2 b_2; \quad (A, B) = 1/2(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

С ними связаны квадратичные формы:

$$S_1^2 = (A, A) = a_1^2 + a_2^2; \quad S_2^2 = (A, A) = a_1 a_2, \tag{8}$$

соответственно.

Несложно заметить, что именно этими двумя формами полностью исчерпываются неизоморфные друг другу невырожденные двухмерные геометрии с квадратичной формой. Первая евклидова, вторая – псевдоевклидова. Составлять линейные комбинации из этих двух форм и рассматривать пространства связанные с формами вида:

$$(A, A) = mS_1^2 + nS_2^2$$

при произвольных m и n не имеет смысла, так как любая из таких комбинаций (если она не приводит к вырожденному пространству), все равно, будет изоморфна либо S_1^2, либо S_2^2.

Несмотря на то, что с этими обеими формами можно связать понятие коммутативно-ассоциативной алгебры, помня, что при переходе к сумме трех кубов:

$$S_1^3 = (A, A, A) = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3$$

уже нельзя сопоставить обычную алгебру и что в такой геометрии, похоже, нет направлений, которым можно было бы приписать смысл времени (несомненно, являющегося важнейшим понятием физики), – мы в качестве основы дальнейших построений выберем геометрию с формой S_2^2, а вторую будем считать как бы вспомогательной.

Итак, идея заключается в следующем. Давайте попробуем алгебру объектов 2×2 рассматривать, как симбиоз *обеих* форм (8). Так как компонент у алгебры чисел H_2 две, можно попробовать с ними связывать коэффициенты диагональной матрицы 2×2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Тогда произвольную симметрическую матрицу 2×2, имеющую вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(где из условия симметричности $a_{12} = a_{21}$), можно интерпретировать как универсальный объект, имеющий двойную природу. С одной стороны – это вектор с компонентами $a_1 = a_{11}, a_2 = a_{22}$, а с другой – симметрический тензор второго ранга. Причем эти два, казалось бы, принципиально различных объекта, похоже, вполне совместимы. Иными словами, можно надеяться так организовать операции над симметрическими тензорами 2×2, что бы они не противоречили алгебре чисел (векторов) H_2.

Попробуем постулировать такую операцию как действие, позволяющее получать из двух произвольных матриц A и B – третью, по правилу:

$$[A_{ij}, B_{ij}] = C_{ij},$$

где

$$c_{11} = a_{11}b_{11}, \qquad c_{22} = a_{22}b_{22}, \qquad c_{12} = c_{21} = a_{12}b_{12}.$$

Аналогично при конструировании тернарной операции над симметрическими матрицами $3 \times 3 \times 3$ следует воспользоваться базисными полилинейными формами от трех векторов вида:

$$\begin{aligned}
(A,B,C) = \;& a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3;\\
(A,B,C) = \;& 1/3\,(a_1b_1c_2 + a_1b_1c_3 + a_2b_2c_1 + a_2b_2c_3 + a_3b_3c_1 + a_3b_3c_2+\\
& +a_1b_2c_1 + a_1b_3c_1 + a_2b_1c_2 + a_2b_3c_2 + a_3b_1c_3 + a_3b_2c_3+\\
& +a_2b_1c_1 + a_3b_1c_1 + a_1b_2c_2 + a_3b_2c_2 + a_1b_3c_3 + a_2b_3c_3);\\
(A,B,C) = \;& 1/6\,(a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_3b_2c_1),
\end{aligned}$$

но записанных не для компонент векторов, а для компонент симметрической матрицы $3 \times 3 \times 3$:

$$\begin{aligned}
(A,B,C) = \;& a_{111}b_{111}c_{111} + a_{222}b_{222}c_{222} + a_{333}b_{333}c_{333};\\
(A,B,C) = \;& 1/3\,(a_{112}b_{112}c_{221} + a_{112}b_{221}c_{112} + a_{221}b_{112}c_{112}+\\
& +a_{113}b_{113}c_{331} + a_{113}b_{331}c_{113} + a_{331}b_{113}c_{113}+\\
& +a_{221}b_{221}c_{122} + a_{221}b_{112}c_{221} + a_{112}b_{221}c_{221}+\\
& +a_{223}b_{223}c_{332} + a_{223}b_{332}c_{223} + a_{332}b_{223}c_{223}+\\
& +a_{331}b_{331}c_{113} + a_{331}b_{113}c_{331} + a_{113}b_{331}c_{331}+\\
& +a_{332}b_{332}c_{223} + a_{332}b_{223}c_{332} + a_{223}b_{332}c_{332});\\
(A,B,C) = \;& 1/6\,(a_{123}b_{231}c_{312} + a_{123}b_{312}c_{231} + a_{231}b_{123}c_{312}+\\
& +a_{231}b_{312}c_{123} + a_{312}b_{123}c_{231} + a_{312}b_{231}c_{123}).
\end{aligned}$$

Глядя на это, определим тернарную операцию над тремя симметрическими матрицами $3 \times 3 \times 3$ следующим образом:

$$[A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}] = D_{ijk},$$

где:

$$\begin{aligned}
d_{111} &= a_{111}b_{111}c_{111}\\
d_{222} &= a_{222}b_{222}c_{222}\\
d_{333} &= a_{333}b_{333}c_{333}\\
d_{112} &= 1/3\,(a_{112}b_{112}c_{221} + a_{112}b_{221}c_{112} + a_{221}b_{112}c_{112})\\
d_{113} &= 1/3\,(a_{113}b_{113}c_{331} + a_{113}b_{331}c_{113} + a_{331}b_{113}c_{113})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_{221} &= 1/3\,(a_{221}b_{221}c_{122} + a_{221}b_{112}c_{221} + a_{112}b_{221}c_{221})\\
d_{223} &= 1/3\,(a_{223}b_{223}c_{332} + a_{223}b_{332}c_{223} + a_{332}b_{223}c_{223})\\
d_{331} &= 1/3\,(a_{331}b_{331}c_{113} + a_{331}b_{113}c_{331} + a_{113}b_{331}c_{331})\\
d_{332} &= 1/3\,(a_{332}b_{332}c_{223} + a_{332}b_{223}c_{332} + a_{223}b_{332}c_{332})\\
d_{123} &= a_{123}b_{123}c_{123}.
\end{aligned}
$$

Достоинство предлагаемого метода заключается в том, что теперь мы можем легко его распространить на матрицы $4 \times 4 \times 4 \times 4$ и на большее число измерений.

Если у матриц A, B, C отлична от нуля только компонента с $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$, их тернарная алгебра изоморфна бинарной алгебре действительных чисел. Если у матриц A, B, C отличны от нуля только диагональные элементы, их тернарная алгебра сводится к бинарной алгебре от поличисел H_3. Это обстоятельство позволяет нам строить совершенно новые объекты и операции над ними, не отказываясь от того капитала, что мы накопили по финслеровым пространствам с метрикой Бервальда-Моора. Но в этой новой алебре, похоже, содержится в качестве подалгебры и алгебра тензоров второго ранга. Операции этой алгебры тернарны и возможно, сосредоточившись на них и подробно изучив их свойства, мы сможем приблизиться к такому пока еще не очень отчетливому понятию геометрии, как множество симметрий, основанных не на бинарных, а на тернарных отношениях. Таким образом, мы уже оказываемся не на хорошо исследованной территории, где царствуют группы симметрий, а переходим в область, где тон задают их более сложные n-арные обобщения. К каким глобальным последствиям приведет такое расширение роли симметрий не только в геометрии, но и в теснейшем образом с ней связанной физике – сейчас можно только догадываться.

Список литературы

1. Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Трехмерные расстояния и модуль скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3, Vol. 2, 2005.

2. Пименов Р. И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987.

3. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа"), в кн.: Об основаниях геометрии. М., 1956.

4. Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, Vol. 1, 2004.

5. Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 5, Vol. 3, 2006.

6. Takhtajan L. A. On Foundation of the Generalized Nambu Mechanics, Comm. Math. Phys. 160.

7. Кецарис А. А. Алгебраические основы физики. М., УРСС, 1997.

8. Павлов Д. Г. Хронометрия трехмерного времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, Vol. 1, 2004.

9. Чернов В. М. Об определяющих уравнениях для элементов ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр и ассоциированных метрических формах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 4, Vol. 2, 2005.