ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ФИНСЛЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия
gri9z@mail.ru

Предлагается строить лагранжиан поля (полей), исходя только из метрической функции финслерова пространства, а именно как единица, деленная на объем, который зачерчивает единичный вектор, пробегающий все точки индикатрисы в касательном пространстве, если считать, что касательное пространство является евклидовым. Для пространства, конформно связанного с пространством Минковского, в предположении экспоненциальной зависимости от времени и сферически симметричной зависимости от координат получено космологическое уравнение, из которого при расстояниях от начала координат много меньших размеров Вселенной следует выполнение закона Хаббла. Записано космологическое уравнение для поля, описывающее Вселенную с геометрией, конформно связанной с геометрией поличисел H_4, которая обладает метрикой Бервальда-Моора.

Введение

Наиболее удобный способ получения уравнений поля как в классической теории [1], так и в теории квантованных полей [2] связан с понятиями лагранжиана, действия и принципа стационарного (или наименьшего) действия. При этом однозначно устанавливается связь [3] между непрерывными преобразованиями, относительно которых инвариантно действие, и физическими законами сохранения, которые могут быть проверены экспериментально.

Если x^0, x^1, x^2, x^3 – координаты, $f(x) \equiv f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ – скалярное поле в пространстве Минковского, а

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}\left(f(x); \frac{\partial f}{\partial x^0}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right), \tag{1}$$

– лагранжиан, то интеграл от лагранжиана по некоторому четырехмерному объему V пространства-времени,

$$I[f] = \int\limits_V^4 \mathfrak{L}\; dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{2}$$

принято называть действием. Считая, что вариации функции поля δf равны нулю на границе объема интегрирования, и требуя стационарности действия, то есть

$$\delta I[f] = 0\,, \tag{3}$$

с помощью известной математической процедуры получим уравнение Лагранжа-Эйлера, которое и есть уравнение поля:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f} = 0\,. \tag{4}$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или строят, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение качественно новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы является, в известном смысле, искусством.

Функционалу (2) можно придать чисто геометрический смысл и считать его не интегралом в пространстве Минковского от лагранжиана $\mathfrak{L}$, а объемом в некотором более сложном пространстве, в котором элемент объема имеет вид:

$$dV = \mathfrak{L}\; dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \,. \tag{5}$$

Рассмотрим финслерово пространство $x^1, x^2, ..., x^n$ [4] с метрической функцией

$$L(dx; x) \equiv L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{6}$$

В таком пространстве элемент длины ds по определению есть

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{7}$$

Более наглядно метрические свойства финслерова пространства можно описать с помощью понятия индикатрисы, которая определяется в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства в соответствующем касательном центроаффинном пространстве $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ как геометрическое место концов единичных радиус-векторов $\xi_{(1)}$. Такая гиперповерхность описывается уравнением

$$L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n) = 1\,. \tag{8}$$

Задание системы индикатрис в каждой точке основного пространства, или, что тоже самое, задание множеств единичных векторов, полностью определяет финслерову геометрию. Для того, чтобы вычислить длину вектора $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$, надо найти сонаправленный вектору dx единичный вектор $\xi_{(1)}$, тогда числовой коэффициент ds в формуле

$$dx^i = ds \cdot \xi^i_{(1)} \tag{9}$$

и есть длина вектора dx. Из этой формулы следует, что элемент длины

$$ds = \frac{|dx|_{\text{ев}}}{|\xi_{(1)}|_{\text{ев}}}\,, \tag{10}$$

где $|dx|_{\text{ев}}$, $|\xi_{(1)}|_{\text{ев}}$ – длины векторов $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ и $(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$, вычисляемые так, как если бы пространства $dx^1, dx^2, ..., dx^n$ и $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ были евклидовы, а системы координат в них – декартовы прямоугольные.

Если при выполнении последних предположений можно вычислить объем индикатрисы, то есть n-мерный объем, который зачерчивает единичный вектор $\xi_{(1)}$ в касательном пространстве $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$, пробегая всю индикатрису, то в финслеровом пространстве можно (аналогично (10)) определить элемент объема dV по формуле

$$dV = const \cdot \frac{dx^1 dx^2 ... dx^n}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{11}$$

где $(V_{ind})_{ev}$ – объем индикатрисы, вычисленный в предположении, что касательное пространство евклидово, а координаты декартовы прямоугольные. Совершенно очевидно, что таким образом определенный элемент объема инвариантен относительно преобразования координат.

Рассмотрим n-мерное риманово пространство, метрическая функция в этом случае имеет вид

$$L(dx;x) = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}\,, \tag{12}$$

а уравнение индикатрисы соответственно –

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = 1\,. \tag{13}$$

Это уравнение определяет гиперповерхность второго порядка, а именно, эллипсоид. Если считать пространство $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ евклидовым, то, как известно, объем такого эллипсоида есть

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{det(g_{ij})}}\,. \tag{14}$$

Подставляя это выражение в формулу (11), получим элемент объема в произвольном римановом пространстве

$$dV = const \cdot \sqrt{det(g_{ij})} \quad dx^1 dx^2 ... dx^n\,, \tag{15}$$

что совпадает с обычным определением инвариантного элемента объема в римановом пространстве.

Для псевдоримановых пространств без специальных дополнительных условий на индикатрису

$$(V_{ind})_{ev} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad dV = 0 \cdot dx^1 dx^2 ... dx^n\,, \tag{16}$$

но можно провести цепочку рассуждений, которые позволяют и для псевдоримановых пространств предложить инвариантный элемент объема в виде формулы, аналогичной формуле (15). Точно такие же рассуждения приходится приводить и для получения инвариантного элемента объема в финслеровых пространствах, в которых имеет место проблема (16). Следует исходить из некоторого плоского пространства, близкого к пространству, элемент объема которого мы хотим определить.

Проведем эти рассуждения для конкретного примера: псевдориманового пространства с сигнатурой $(+, -, -, -)$. В этом случае рассмотрим вначале пространство Минковского x^0, x^1, x^2, x^3, в котором метрическая функция имеет вид

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \equiv \sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\; dx^i dx^j}\,, \tag{17}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 1 \tag{18}$$

является уравнением второго порядка и определяет гиперповерхность, которая является двуполостным гиперболоидом, поэтому проблема определения объема индикатрисы имеет место. Так как и метрическая функция, и уравнение индикатрисы не зависят от точки пространства, то каким бы образом мы ни регуляризовали соответствующий интеграл, мы получим действительное число, одно и то же во всех точках пространства. Обозначим это число $(V_{ind})_{ev}$. Для того, чтобы в пространстве Минковского получить инвариантный элемент объема по формуле (11) величину $(V_{ind})_{ev}$ следует записать в виде

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{-det\left(\overset{o}{g}_{ij}\right)}}\,. \tag{19}$$

Перейдем от координат x^0, x^1, x^2, x^3 к некоторым криволинейным координатам $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$, тогда $\overset{o}{g}_{ij}$ перейдет в $g(x')_{i'j'}$, а значит элемент объема в пространстве Минковского в криволинейных координатах $x^{0'}$, $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$ будет определяться формулой

$$dV = const \cdot \sqrt{-det\,(g(x')_{i'j'})} \quad dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}\,, \tag{20}$$

но все же пока мы остались в том же самом пространстве Минковского.

Рассмотрим псевдориманово пространство, конформно связанное [4] с пространством Минковского,

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\; dx^i dx^j}\,, \tag{21}$$

где $\kappa(x) > 0$, которое никаким преобразованием координат не может быть переведено в пространство Минковского. Уравнение индикатрисы для такого псевдориманово пространства можно записать следующим образом:

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = \frac{1}{\kappa^2(x)}\,. \tag{22}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (18), видим, что гиперповерхность, определяемая уравнением (22), получается из гиперповерхности, определяемой (18), общим масштабным преобразованием с коэффициентом $\frac{1}{\kappa(x)}$, поэтому если индикатрисе (18) мы приписывали объем (19), то индикатрисе (22) следует приписать объем

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\kappa^4(x)\sqrt{-det\left(\overset{o}{g}_{ij}\right)}} = \frac{const'}{\sqrt{-det\,(g(x)_{ij})}}\,, \tag{23}$$

где

$$g(x)_{ij} \equiv \kappa^2(x)\;\overset{o}{g}_{ij}\;\;. \tag{24}$$

Из выше проведенных рассуждений следует, что псевдориманову пространству с метрическим тензором $g(x)_{ij}$ и сигнатурой $(+,-,-,-)$ можно приписать инвариантный элемент объема вида

$$dV = const \cdot \sqrt{-det\,(g(x)_{ij})} \quad dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,, \tag{25}$$

что и принято в ОТО [1].

К проблеме (16) в псевдоримановых пространствах можно подойти более строго (в данной работе мы этого делать не будем), но при этом приходится переходить к пространствам более общим, чем псевдоримановы пространства. Поясним это на примере пространства Минковского. Если вместо пространства Минковского с метрической функцией (17) взять финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0 \tag{26}$$

и условием $dx^0 \geq 0$, где $q_0 > 0$, то у такого пространства объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ – конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 и стремящееся к ∞, когда параметр q_0 стремится к 0.

Итак, будем считать, что в любом финслеровом пространстве, в котором имеет место проблема (16), она может быть разрешена тем или иным способом. Тогда можно утверждать, что из самой геометрии финслерова пространства, если в метрической функции содержатся некоторые поля, автоматически получается лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \frac{const}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{27}$$

из которого затем получаются уравнения для полей.

Замечание. Ниже постоянные, которые фигурируют в формулах (11), (14),..., (27), мы будем опускать, так как они не входят в полевые уравнения.

1 Пространства, конформно связанные с евклидовыми пространствами

Пространство, конформно связанное с n-мерным евклидовым пространством, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2}\,, \tag{28}$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{det(g_{ij})} = \kappa^n(x)\,, \tag{29}$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x)\,. \tag{30}$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля. Как это сделать, показано в работах [5], [6].

Обобщенные импульсы в пространстве (28) определяются формулой

$$p_i = \kappa(x)\frac{dx^i}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2}}\,, \tag{31}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{32}$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ определяет нормальную конгруенцию геодезических и которую в классической механике принято называть действием как функцией координат, а в работе [5] функцию $S(x)$ предложено называть Мировой функцией, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2 = \kappa^2(x)\,. \tag{33}$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\,, \tag{34}$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} = 0\,. \tag{35}$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Запишем для пространства, конформно связанного с двумерной евклидовой плоскостью (x, y), уравнение (35)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0\,, \tag{36}$$

то есть функция $S(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа, а значит она является компонентой аналитической функции комплексной переменной. Тогда

$$\kappa(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2} \tag{37}$$

есть коэффициент конформного преобразования элемента длины евклидового пространства

$$ds' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \kappa(x, y)\sqrt{x^2 + y^2} \tag{38}$$

при конформном преобразовании

$$x' = u(x, y)\,, \qquad y' = \pm v(x, y)\,, \tag{39}$$

когда функция S является одной из компонент аналитической функции $u + iv$ комплексной переменной $x + iy$.

Найдем решение уравнения (35) в предположении, что функция S зависит только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2}\,. \tag{40}$$

Это удобнее сделать, записав элемент объема в сферических координатах и проинтегрировав по всем углам,

$$dV_r = r^{n-1}\left|\frac{dS}{dr}\right|^n dr \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{L}_r = r^{n-1}\left|\frac{dS}{dr}\right|^n\,. \tag{41}$$

Тогда уравнение поля запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\left|\frac{dS}{dr}\right|^{n-1}\right] = 0\,. \tag{42}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS}{dr} = \frac{C}{r}\,, \qquad S = C\ln\frac{r}{r_0}\,, \tag{43}$$

$C \neq 0$, $r_0 > 0$ – действительные числа, тогда

$$\kappa(x) = \left|\frac{dS}{dr}\right| = \frac{|C|}{r}\,. \tag{44}$$

Геодезические в таком пространстве определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = \frac{dS}{dx^i}\cdot\lambda(x)\,, \tag{45}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i$ – производная x^i по параметру вдоль геодезической τ. Выберем $\lambda(x) = r$, тогда из (45) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i\,. \tag{46}$$

Пусть $j > 1$, тогда

$$\frac{dx^j}{dx^1} = \frac{x^j}{x^1} \qquad \Rightarrow \qquad x^j = C^j x^1\,, \tag{47}$$

то есть геодезические в таком пространстве – это прямые линии, проходящие через начало координат с направляющим вектором $(1, C^2, C^3, ..., C^n)$.

2 Пространства, конформно связанные с псевдоевклидовыми пространствами с сигнатурой $(+,-,-,...,-)$

Пространство, конформно связанное с n-мерным псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+,-,-,...,-)$, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x)\cdot\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-...-(x^{n-1})^2}\,, \tag{48}$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{(-1)^{n-1} det\,(g_{ij})} = \kappa^n(x)\,, \tag{49}$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x)\,. \tag{50}$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля [5], [6].

Обобщенные импульсы в пространстве (48) определяются формулами

$$p_0 = \frac{\kappa(x)\;dx^0}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-...-(x^{n-1})^2}},\quad p_\mu = -\frac{\kappa(x)\;dx^\mu}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-...-(x^{n-1})^2}}, \tag{51}$$

$\mu = 1, 2, ..., (n-1)$, а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_0^2 - p_1^2 - ... - p_{n-1}^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{52}$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ определяет нормальную конгруенцию геодезических, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = \kappa^2(x)\,. \tag{53}$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}, \tag{54}$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^0}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} - \\ -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} = 0\,.\end{gathered} \tag{55}$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка и это уравнение выполняется, если функция S удовлетворяет уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = 0\,.$$

Для того, чтобы уравнение поля (55) являлось волновым уравнением, функция S одновременно должна быть решением еще одного уравнения:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = const\,.$$

Для пространства, конформно связанного с двумерной псевдоевклидовой плоскостью (x, y), уравнение (55) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0\,, \tag{56}$$

то есть в двумерном случае уравнение поля (55) – это волновое уравнение.

Найдем решение уравнения (55) в предположении, что функция S зависит только от интервала

$$s = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - ... - (x^{n-1})^2}\,. \tag{57}$$

Запишем для этого элемент объема, выделив в качестве одной из переменных интервал s, при интегрировании по гиперболическим углам возникнут трудности, которые аналогичны проблеме (16) и которые аналогично решаются, тогда

$$dV_s = s^{n-1}\left|\frac{dS}{ds}\right|^n ds \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{L}_s = s^{n-1}\left|\frac{dS}{ds}\right|^n\,, \tag{58}$$

а уравнение поля приобретает вид:

$$\frac{d}{ds}\left[s^{n-1}\left|\frac{dS}{ds}\right|^{n-1}\right] = 0\,. \tag{59}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS}{ds} = \frac{C}{s}\,, \qquad S = C\ln\frac{s}{s_0}\,, \tag{60}$$

$C \neq 0$, $s_0 > 0$ – действительные числа, тогда

$$\kappa(x) = \left|\frac{dS}{ds}\right| = \frac{|C|}{s}\,. \tag{61}$$

Геодезические в таком пространстве определяются уравнениями

$$\dot{x}^0 = \frac{dS}{dx^0}\cdot\lambda(x)\,, \qquad \dot{x}^\mu = -\frac{dS}{dx^\mu}\cdot\lambda(x)\,, \tag{62}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i$ – производная x^i по параметру эволюции τ, $\mu = 1, 2, ..., n-1$. Выберем $\lambda(x) = \dfrac{s^2}{|C|}$, тогда из (62) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i\,, \tag{63}$$

или

$$\frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{x^\mu}{x^0} \qquad \Rightarrow \qquad x^\mu = C^\mu x^0 \,, \tag{64}$$

то есть геодезические (экстремали) в таком пространстве – это прямые линии, проходящие через начало координат с направляющим вектором $(1, C^2, C^3, ..., C^n)$. Интервал при этом изменяется тоже линейно относительно координаты x^0,

$$s = \sqrt{1 - (C^1)^2 - ... - (C^{n-1})^2} \cdot x^0 \,, \qquad x^0 > 0. \tag{65}$$

Так как пространство, конформно связанное с пространством Минковского, мы будем ниже использовать для построения космологического уравнения, выпишем ряд формул этого раздела для $n = 4$, используя в них метрический тензор пространства Минковского $\overset{o}{g}_{ij}$:

связь между функцией $S(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$ –

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \, \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} = \kappa^2(x) \,, \tag{66}$$

лагранжиан –

$$\mathfrak{L} = \left(\overset{o}{g}{}^{ij} \, \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} \right)^2 , \tag{67}$$

уравнение поля –

$$\overset{o}{g}{}^{kl} \, \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial S}{\partial x^l} \left(\overset{o}{g}{}^{ij} \, \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} \right) \right] = 0 \,. \tag{68}$$

3 Модельное космологическое уравнение в пространстве, конформно связанном с пространством Минковского

Запишем уравнение (68) в предположении, что функция S имеет вид

$$S(x^0, r) = S_0 e^{-\gamma x^0} \psi(r) \,, \tag{69}$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, а γ и S_0 постоянные. Более просто получить уравнение поля такого вида, если в элементе объема перейти от пространственных координат x^1, x^2, x^3 к сферической системе координат и проинтегрировать по сферическим углам, тогда, опять же опуская постоянную, получим выражение для лагранжиана

$$\mathfrak{L} = r^2 \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right]^2 , \tag{70}$$

а уравнение поля запишется следующим образом:

$$r^2 \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} = 0 \,. \tag{71}$$

Подставляя в это уравнение функцию $S(x^0, r)$ (69), получим

$$3\gamma^2 r^2 \psi \left[\gamma^2 \psi^2 - \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] - \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\psi}{dr} \left[\gamma^2 \psi^2 - \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] \right\} = 0 \,. \tag{72}$$

Введем безразмерную переменную $\xi \equiv \gamma r$, тогда данное уравнение перепишется следующим образом:

$$3\xi^2\psi\left[\psi^2-\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right]-\frac{d}{d\xi}\left\{\xi^2\frac{d\psi}{d\xi}\left[\psi^2-\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right]\right\}=0\,. \tag{73}$$

Так как это уравнение однородно по искомой функции, то будем ее искать в виде

$$\psi(\xi)=\psi_0\exp\left(\int\limits_0^\xi\varphi(\xi)d\xi\right), \tag{74}$$

ψ_0 – постоянная, которая при составлении функции S перемножается с постоянной S_0, поэтому положим ее равной единице, $\psi_0=1$. Подставляя (74) в (73), имеем

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\varphi(1-\varphi^2)\right]-3\xi^2(1-\varphi^2)^2=0\,, \tag{75}$$

или

$$\xi(1-3\varphi^2)\frac{d\varphi}{d\xi}+2\varphi(1-\varphi^2)-3\xi(1-\varphi^2)^2=0\,. \tag{76}$$

Не удалось получить аналитическое решение этого уравнения.

В области $\xi\ll 1$ будем искать решение в виде степенного ряда

$$\varphi\simeq A\xi+B\xi^2+C\xi^3+O(\xi^4)\,. \tag{77}$$

Подставим это разложение в уравнение (76), приведем подобные и получим

$$\varphi\simeq\xi-\frac{1}{5}\xi^3+O(\xi^4)\,. \tag{78}$$

Движение пробных тел (звезд) происходит по геодезическим (экстремалям) пространства с элементом длины

$$ds=\kappa(x^0,r)\sqrt{(dx^0)^2-(dr)^2} \tag{79}$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$p_0^2-p_r^2=\kappa^2(x^0,r)\,. \tag{80}$$

Для поля S (69), (74) коэффициент расширения-сжатия вычисляется по формуле

$$\kappa(x^0,r)=\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2}=\gamma\cdot\sqrt{1-\varphi^2}\cdot S(x^0,r)\,. \tag{81}$$

Из этой формулы следует, что $|\varphi|<1$. Уравнения движения в данном случае принимают вид

$$\dot{x}^0=\frac{\partial S}{\partial x^0}\lambda=-\gamma S\lambda\,,\qquad \dot{r}=-\frac{\partial S}{\partial r}\lambda=-\gamma S\varphi(\gamma r)\lambda\,, \tag{82}$$

где точка означает полную производную по некоторому параметру эволюции τ, а произвольная функция $\lambda\neq 0$. Тогда

$$\frac{dr}{dx^0}=\varphi(\gamma r)\qquad\Rightarrow\qquad\frac{dr}{dt}=c\varphi(\gamma r)\,. \tag{83}$$

Так как $|\varphi| < 1$, то

$$\left|\frac{dr}{dx^0}\right| < 1 \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{dr}{dt}\right| < c\,.$$

Посмотрим, как ведет себя скорость пробного тела в области $\xi \ll 1$, для этого подставим (78) в полученную формулу:

$$\frac{dr}{dt} = c\gamma\left(1 - \frac{1}{5}\gamma^2 r^2\right)\cdot r\,. \tag{84}$$

Если обозначить постоянную Хаббла через H_0, то полученная формула дает нам хорошее выполнение закона Хаббла при $\gamma r < \frac{1}{10}$, причем $H_0 = c\gamma$, и тенденцию того, как первоначально должна изменяться "постоянная Хаббла" $H(r)$ с увеличением расстояния от центра:

$$\frac{dr}{dt} = H(r)\cdot r\,, \qquad H(r) = H_0\cdot\left[1 - \frac{1}{5}\left(\frac{H_0}{c}\right)^2\cdot r^2\right]. \tag{85}$$

В области $\xi \ll 1$ она уменьшается с увеличением расстояния от начала координат.

Для того, чтобы сказать что-то о размерах Вселенной и зависимости $H(r)$ во всей области возможных значений переменной r, необходимо вначале исследовать поведение решения $\varphi(\xi)$ уравнения (76), которое (решение) при $\xi \to 0$ имеет вид (78). Ни аналитически, ни численно нам не удалось этого сделать, так как при приближении к значению $\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ поведение такого решения становится весьма сложным (неустойчивым). Если предположить, что решение уравнения (76) будет получено и исследовано, то общий вид величины $H(r)$ можно будет записать следующим образом:

$$H(r) = H_0\cdot\left[\frac{\varphi\left(\frac{H_0}{c}r\right)}{\frac{H_0}{c}r}\right]. \tag{86}$$

Если рассмотреть траектории движения в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 с Мировой функцией S (69), они (траектории) будут определяться уравнениями

$$\frac{dx^\mu}{dx^0} = \varphi(\gamma r)\,\frac{x^\mu}{r}\,,$$

т. е. движение происходит по лучам, исходящим из начала координат, а значит пробные частицы движутся прямолинейно, но, конечно, движение является неравномерным.

Так как пространство с элементом длины (79) является псевдоримановым с метрическим тензором

$$g_{ij}(x^0, r) = \kappa^2(x^0, r)\cdot \overset{o}{g}_{ij}\,, \tag{87}$$

где $\overset{o}{g}_{ij}$ – метрический тензор пространства Минковского и

$$\kappa(x^0, r) = \gamma S\sqrt{1 - \varphi^2}\,, \tag{88}$$

то для него можно найти тензор кривизны и его свертки, а также непосредственно из уравнений Эйнштейна можно получить тензор энергии-импульса материи T_{km}, который фигурирует в уравнениях Эйнштейна и который соответствует пространству с метрическим тензором (87). Заметим, что уравнения гравитационного поля, конечно, при таком тензоре энергии-импульса материи выполняются автоматически, но с тензором T_{km} нельзя, вообще говоря, связывать законы сохранения энергии и импульса.

Введем удобное обозначение

$$a = \ln(\kappa^2/const)\,. \tag{89}$$

Тогда, используя известные классические формулы, получим выражения:

для объекта связности –

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x^l}\delta^i_k + \frac{\partial a}{\partial x^k}\delta^i_l - \overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial a}{\partial x^s}\,\overset{o}{g}_{kl}\right)\,, \tag{90}$$

тензора кривизны –

$$R^i_{klm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^k}\,\delta^i_m - \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m}\,\delta^i_l - \overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^s}\,\overset{o}{g}_{km} + \overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^m \partial x^s}\,\overset{o}{g}_{kl}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial a}{\partial x^m}\frac{\partial a}{\partial x^k}\,\delta^i_l - \frac{\partial a}{\partial x^l}\frac{\partial a}{\partial x^k}\,\delta^i_m - \overset{o}{g}{}^{ns}\,\frac{\partial a}{\partial x^n}\frac{\partial a}{\partial x^s}\,\delta^i_l\,\overset{o}{g}_{km} + \right. \tag{91}$$

$$\left. + \frac{\partial a}{\partial x^l}\,\overset{o}{g}_{km}\overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial a}{\partial x^s} + \overset{o}{g}{}^{ns}\,\frac{\partial a}{\partial x^n}\frac{\partial a}{\partial x^s}\,\delta^i_m\,\overset{o}{g}_{kl} - \frac{\partial a}{\partial x^m}\,\overset{o}{g}_{kl}\overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial a}{\partial x^s}\right)\,,$$

тензора Риччи –

$$R_{km} \equiv R^l_{klm} = \frac{1}{2}\left(-2\frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} - \overset{o}{g}{}^{ns}\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^n \partial x^s}\,\overset{o}{g}_{km} + \frac{\partial a}{\partial x^k}\frac{\partial a}{\partial x^m} - \overset{o}{g}{}^{ns}\,\frac{\partial a}{\partial x^n}\frac{\partial a}{\partial x^s}\,\overset{o}{g}_{km}\right)\,, \tag{92}$$

скалярной кривизны пространства –

$$R \equiv g^{km}R_{km} = \frac{1}{\kappa^2}\,\overset{o}{g}{}^{km}\,R_{km} = -\frac{3}{\kappa^2}\left(2\,\overset{o}{g}{}^{km}\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} + \overset{o}{g}{}^{km}\,\frac{\partial a}{\partial x^k}\frac{\partial a}{\partial x^m}\right)\,, \tag{93}$$

тензора энергии-импульса материи –

$$T_{km} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R_{km} - \frac{1}{2}\kappa^2\,\overset{o}{g}_{km}\,R\right)\,, \tag{94}$$

где k – гравитационная постоянная, тогда

$$T \equiv g^{km}T_{km} = \frac{1}{\kappa^2}\,\overset{o}{g}{}^{km}\,T_{km} = -\frac{c^4}{8\pi k}R\,. \tag{95}$$

Но так как мы "независимы" от уравнений гравитационного поля Эйнштейна, то мы можем вычислить полный тензор энергии-импульса $\hat{T}_{km}$. Для лагранжиана поля $\mathfrak{L}$ (67) получим

$$\hat{T}^k_m = \frac{\partial S}{\partial x^m}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \frac{\partial S}{\partial x^k}} - \delta^k_m \mathfrak{L} = 4\,\overset{o}{g}{}^{ks}\,\frac{\partial S}{\partial x^s}\frac{\partial S}{\partial x^m}\left(\overset{o}{g}{}^{rs}\,\frac{\partial S}{\partial x^r}\frac{\partial S}{\partial x^s}\right) - \delta^k_m\left(\overset{o}{g}{}^{rs}\,\frac{\partial S}{\partial x^r}\frac{\partial S}{\partial x^s}\right)^2\,, \tag{96}$$

свернув по имеющимся двум индексам, получим

$$\hat{T}^k_k \equiv 0\,. \tag{97}$$

Итак, тензоры T_{km} и $\hat{T}_{km}$ качественно различаются.

4 Пространство, конформно связанное с четырехмерным пространством Бервальда-Моора

Элемент длины в таком пространстве в специальном изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \qquad (98)$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,. \qquad (99)$$

Если $\eta^1,\eta^2,\eta^3,\eta^4$ – координаты касательного центроаффинного пространства в точке $M(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)$ основного пространства, то уравнение индикатрисы запишется

$$\eta^1\eta^2\eta^3\eta^4 = \frac{1}{\kappa^4(\xi)}\,, \qquad (100)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,. \qquad (101)$$

Тогда функция S, определяющая нормальную конгруенцию геодезических, удовлетворяет следующему нелинейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,. \qquad (102)$$

Из формулы (100) следует, что

$$(V_{ind})_{ev} = const\cdot\frac{1}{\kappa^4}\,, \qquad (103)$$

а значит, лагранжиан скалярного поля S запишется следующим образом:

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4}\,. \qquad (104)$$

Соответственно уравнение поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^4}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^4}\left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\right)=0\,. \qquad (105)$$

Любая функция S, зависящая не от всех координат ξ^1,ξ^2,ξ^3,ξ^4 удовлетворяет этому уравнению.

Пусть поле S зависит только от одной величины

$$s = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}\,. \qquad (106)$$

Подставляя $S(s)$ в уравнение поля (105) и используя формулу

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^i} = \frac{1}{4}\frac{s}{\xi^i}\,. \qquad (107)$$

получим

$$\frac{d}{ds}\left(s\frac{dS}{ds}\right) = 0\,. \qquad (108)$$

Это же уравнение можно получить более просто, если записать элемент объема

$$dV = \mathfrak{L}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4\,, \tag{109}$$

выделив переменную s и три угловые переменные, а затем "проинтегрировать" по углам

$$dV_s = s^3 \left(\frac{dS}{ds}\right)^4 ds\,. \tag{110}$$

Интегрируя уравнение (108), получим

$$S(s) = S_0 \ln \frac{s}{s_0} \tag{111}$$

(S_0, s_0 – постоянные интегрирования), а также выражение для коэффициента растяжения-сжатия κ,

$$\kappa = \frac{|A|}{s}\,. \tag{112}$$

Интересно сравнить последние две формулы с формулами (43), (44) и (60), (61).

Найдем траектории движения пробных частиц в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора, если функция S, определяющая конгруенцию геодезических, имеет вид (111), то есть коэффициент растяжения-сжатия определяется формулой (112). Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^i}} \lambda(\xi)\,, \tag{113}$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$ – некоторая скалярная функция. С учетом формулы (107) и при соответствующем выборе $\lambda(\xi)$, уравнения движения принимают более простой вид

$$\dot{\xi}^i = \xi^i\,. \tag{114}$$

Введем переменную

$$x^0 = \xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4\,, \tag{115}$$

которая в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора играет ту же роль, что и координата x^0 в пространстве Минковского, тогда

$$\frac{d\xi^i}{dx^0} = \frac{\xi^i}{x^0} \qquad \Rightarrow \qquad \xi^i = \xi^i_0 \cdot x^0\,, \tag{116}$$

где ξ^i_0 – постоянные. Таким образом, все траектории движения – прямые линии, проходящие через начало координат, причем движение пробных тел является равномерным и прямолинейным относительно временно́й переменной x^0.

Заключение

Предложенный новый подход однозначного построения лагранжиана полей по метрической функции финслерова пространства требует представления полей, которые входят в лагранжиан без своих частных производных по координатам, через другие поля так, чтобы частные производные по координатам от новых полей обязательно входили в лагранжиан, иначе не получить полевые уравнения как дифференциальные уравнения в частных производных. Таким образом, искусство построения лагранжианов заменяется искусством представления физических полей через некоторые другие поля.

Для n-мерных римановых или псевдоримановых пространств с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \sqrt{|det(g_{ij}(x))|}\,.$$

Метрический тензор $g_{ij}(x)$ можно представить, например, следующим образом:

$$g_{ij}(x) = \sum_{a=1}^{N} \varepsilon_{(a)} \frac{\partial f_{(a)}}{\partial x^i} \frac{\partial f_{(a)}}{\partial x^j}\,,$$

где $\varepsilon_{(a)} = \pm 1$ – независимые знаковые множители, $f_{(a)}(x)$ – скалярные функции, причем $N \geq n$. Если $N < n$, то $det\,(g_{ij}(x)) = 0$.

Литература

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., "Наука", 1967.

[2] Боголюбов Н. Н, Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., "Наука", 1973.

[3] Нетер Э., Инвариантные вариационные задачи: Вариационные принципы механики, сб. статей под ред. Полака Л. С., М., "ГИФМЛ", 1959, стр. 611– 630.

[4] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

[5] Гарасько Г. И., О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 3 – 18.

[6] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г., Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3 (2006), стр. 19 – 27.

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2006 г.