# ОКТОНИОНЫ[1]


## Джон С. Баэз

*Математический факультет, Калифорнийский Университет*
*baez@math.ucr.edu*



Октонионы – это наибольшая из четырех нормированных алгебр с делением. Хотя и несколько пренебрегаемые из-за их неассоциативности, они стоят на пересечении многих интересных областей математики. Здесь мы опишем октонионы, их отношение к клиффордовым алгебрам и спинорам, периодичности Ботта, проективной и Лоренцевой геометрии, йордановым алгебрам и исключительным группам Ли. Мы также затронем их приложения в квантовой логике, специальной теории относительности и суперсимметрии.



**Ключевые слова**: октонионы, алгебры с делением, неассоциативность.


## 1 Введение

Существует ровно четыре нормированные алгебры с делением: действительные числа ($\mathbb{R}$), комплексные числа ($\mathbb{C}$), кватернионы ($\mathbb{H}$), и октонионы ($\mathbb{O}$). Действительные числа подобны надежному кормильцу в семье, это полностью упорядоченное поле, которому мы все доверяем. Комплексные числа – это слегка неудавшийся, но все же представительный младший брат: не упорядочены, но алгебраически завершены. Кватернионы, будучи некоммутативными, – эксцентричный кузин, которого отстраняют на важных семейных советах. Октонионы же словно сумасшедший старый дядюшка, никогда не спускающийся со своего чердака: они *неассоциативны*.

Большинство математиков слышали историю про то, как Гамильтон изобрел кватернионы. В 1835, в возрасте 30 лет, он открыл возможность использования комплексных чисел как пар действительных чисел. Очарованный связью между $\mathbb{C}$ и 2-мерной геометрией, он пытался много лет изобрести бóльшую алгебру, которая бы играла сходную роль в 3-мерной геометрии. На современном языке это значит, что он искал 3-мерную нормированную алгебру с делением. Его поиск достиг своей кульминации в октябре 1843. Позже Гамильтон писал своему сыну: «Каждое утро в начале вышеупомянутого месяца, когда я спускался к завтраку, твой младший брат Уильям Эдвин и ты сам спрашивали меня: "Ну как, папа, можешь ли ты *умножать* триплеты?" На что я всегда должен был отвечать, опечаленно качая головой: "Нет, я могу только *складывать* и вычитать их".» Проблема, конечно же, состояла в том, что не существует 3-мерной нормированной алгебры с делением. Гамильтону в действительности нужна была 4-мерная алгебра.

Наконец, 16-го октября 1843 года, прогуливаясь с женой вдоль Королевского Канала в Дублине перед собранием Ирландской королевской академии, Гамильтон совершил свое великое открытие. "Можно сказать, я тогда ощутил короткое замыкание гальванической цепи в своих мыслях; и искры, которые посыпались от него, были *фундаментальными уравнениями между* $i, j, k$; точно такие же, как я их использовал всегда с тех пор." И в порыве прославленного математического вандализма он вырезал эти уравнения на камне Брогамского моста: $[i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1]$.

Одна из причин, по которой эта история хорошо известна, – Гамильтон провел остаток своей жизни, полностью захваченный кватернионами и их приложениями к геометрии [41, 49] [45, 53]. И на время кватернионы стали модными. Они составляли обязательную экзаменационную тему в Дублине, в ряде американских университетов они были единственным современным математическим предметом. Многое из того, что мы сейчас делаем с помощью скаляров и векторов в $\mathbb{R}^3$, было тогда сделано посредством действительных и мнимых кватернионов. Развилась школа

[1] ArXiv:math.RA/0105155 v4 23 Apr 2002, пер. А. Э.

"кватернионистов", которая после смерти Гамильтона воглавлялась Питером Тэйтом из Эдинбурга и Бенжамином Пирсом из Гарварда. Тэйт написал 8 книг по кватернионам, делая акцент на их применении в физике. Когда Гиббс изобрел новую систему обозначения скалярного и векторного произведений, Тэйт забраковал ее как "гермафродитное уродство". Последовала полемическая война, с участием таких светил, как Хевисайд, на стороне векторов. В конце концов кватернионы проиграли, приобрев слабый налет позора, от которого они никогда полностью так и не освободились [27].

Не столь хорошо известно открытие октонионов другом Гамильтона по колледжу Джоном Т. Грейвсом. Именно интерес Грейвса к алгебре натолкнул Гамильтона на раздумия о комплексных числах и триплетах. В тот самый день после своей решающей прогулки Гамильтон послал восьмистраничное письмо Грейвсу с описанием кватернионов. Грейвс ответил 26-го октября, высказав восхищение Гамильтону за смелость идеи, но добавив "Все же в этой системе есть нечто, что приводит меня в замешательство. Пока мне не совсем ясно, до какой степени мы свободны создавать произвольные мнимости и наделять их сверхестественными свойствами." Он спросил: "Если с помощью вашей алхимии вы можете приготовить три фунта золота, стоит ли на этом останавливаться?"

Тогда же Грейвс принялся за работу над своим собственным золотом! 26-го декабря он написал Гамильтону описание новой 8-мерной алгебры, которую он назвал "октавами". Он показал, что они были нормированной алгеброй с делением, и использовал их для выражения произведения двух сумм восьми точных квадратов как другой суммы восьми точных квадратов: "теорема восьми квадратов" [52].

В январе 1844 года Грейвс послал Гамильтону три письма, подробно излагающих его открытие. Он рассмотрел идею общей теории "$2^m$-ионов" и попытался построить 16-мерную нормированную алгебру с делением, но "встретился с неожиданным помехой" и пришел к сомнению относительно возможности этого. Гамильтон предложил опубликовать открытие Грейвса, но будучи занятым работой над кватернионами, постоянно откладывал это. В июле он написал Грейвсу, отмечая, что октонионы неассоциативны: "$A \cdot BC = AB \cdot C = ABC$, если $A, B, C$ – кватернионы, но это не так, вообще говоря, с вашими октавами." Фактически Гамильтон первый ввел понятие "ассоциативности" задолго до других, так что октонионы смогли сыграть роль в разъяснении важности этого понятия.

Тем временем молодой Артур Кэли, новичок из Кембриджа, думал о кватернионах с тех пор как Гамильтон объявил об их существовании. Он полагал, что ищет взаимосвязь между кватернионами и гиперэллиптическими функциями. В марте 1845 года он опубликовал статью в *Философском Журнале*, озаглавленную "Об эллиптических функциях Якоби в ответ преподобному Б. Бронвину; и о кватернионах" [18]. Большая часть этой статьи была попыткой опровергнуть статью, указывающую ошибки в работе Кэли по эллиптическим функциям. Видимо, в последний момент он прикрепил к статье описание октонионов. В действительности, эта работа так изобиловала ошибками, что была исключена из собраний его работ — за исключением части об октонионах [19].

Расстроенный, что его обошли в публикациях, Грейвс приложил послесловие к своей статье, которая появилась в следующем выпуске того же журнала, говоря что он знал об октонионах с Рождества 1843. 14-го июня 1847 Гамильтон поместил краткую заметку в Труды королевской Ирландской академии, удостоверявшую приоритет Грейвса. Но было слишком поздно: октонионы стали известны как "числа Кэли". Что еще хуже, позднее Грейвс обнаружил, что его теорема восьми квадратов была открыта С. Ф. Дегеном в 1818 [28, 30].

Почему же октонионы томились в такой безвестности по сравнению с кватернионами? Кроме их довольно бесславного рождения, еще одна причина состоит в том, что у них не было такого неустанного заступника, каким был Гамильтон. Но конечно, причина этого в том, что октонионы испытывали недостаток в ясных приложениях к геометрии и физике. Единичные кватернионы формируют группу SU(2), которая является двойным накрытием группы вращения SO(3). Это делает их прекрасно подходящими для изучения вращений и угловых моментов, особенно в контексте квантовой механики. Сегодня мы рассматриваем это явление как частный случай теории клиффордовых алгебр. Большинство из нас уже не приписывают кватернионам того космического значения, которого утверждал для них Гамильтон. Но они прекрасно приспособлены для нашего понимания порядка вещей.

Октонионы же, с другой стороны, нет. Их отношение к геометрии было достаточно смутным вплоть до 1925 года, когда Эли Картан описал "тройственность" (triality – триальность), – симметрию между векторами и спинорами в 8-мерном евклидовом пространстве [17]. Их возможное значение в физике было отмечено в 1934 г. в работе Йордана, фон Неймана и Вигнера по основаниям квантовой механики [59]. Однако, попытки Йордана и других применить октонионную квантовую механику к ядерной физике и физике элементарных частиц не привели к большим успехам. Работа по этим направлениям продолжалась довольно медленно до 1980-х годов, когда было осознано, что октонионы объясняют некоторые любопытные особенности теории струн [65]. Лагранжиан для классических суперструн включает соотношение между векторами и спинорами в пространстве-времени Минковского, которое справедливо только в размерностях 3, 4, 6, и 10. Заметьте, что эти числа на 2 больше, чем размерности $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$. Как мы увидим, это не просто совпадение: кратко, изоморфизмы

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) &\cong \mathfrak{so}(2,1) \\
\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\cong \mathfrak{so}(3,1) \\
\mathfrak{sl}(2, \mathbb{H}) &\cong \mathfrak{so}(5,1) \\
\mathfrak{sl}(2, \mathbb{O}) &\cong \mathfrak{so}(9,1)
\end{aligned}$$

позволяют нам трактовать спинор в одной из этих размерностей как пару элементов соответствующей алгебры с делением. Завораживает, что среди этих лагранжианов суперструн 10-размерный октонионный дает наиболее перспективного кандидата для реалистичной теории фундаментальной физики. Однако, все еще не существует *доказательства*, что октонионы пригодны для понимания реального мира. Можно только надеяться, что этот вопрос в конце концов будет разрешен тем или иным путем.

Кроме их возможной роли в физике, октонионы важны еще потому, что они связывают друг с другом некоторые алгебраические структуры, кажущиеся в противном случае изолированными и необъяснимыми исключениями. Как будет объяснено далее, концепция октонионного проективного пространства $\mathbb{OP}^n$ имеет смысл только для $n \leq 2$, в силу неассоциативности $\mathbb{O}$. Это означает, что различные структуры, связанные с действительными, комплексными и кватернионными проективными пространствами, имеют октонионные аналоги только для $n \leq 2$.

Простые алгебры Ли являются прекрасным примером этого феномена. Существует 3 бесконечных семейства "классических" простых алгебр Ли, которые проистекают из групп изометрий проективных пространств $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$ и $\mathbb{HP}^n$. Существуют еще 5 "исключительных" простых алгебр Ли. Они были открыты Киллингом и Картаном в конце 1800-ых. В то время смысл этих исключений был покрыт тайной: они не могли появиться как группы симметрий известных структур. Только позже стала ясной их связь с октонионами. Оказалось, что 4 из них проистекают из групп изометрий проективных плоскостей над $\mathbb{O}$, $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, $\mathbb{O} \otimes \mathbb{H}$ и $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$. Оставшаяся пятая есть группа автоморфизмов октонионов!

Другой хороший пример – классификация простых формально действительных Йордановых алгебр. Кроме нескольких бесконечных семейств этих алгебр, существует "исключительная" Йорданова алгебра, которая состоит из $3 \times 3$ эрмитовых октонионных матриц. Минимальные проекции в этой Йордановой алгебре соответствуют точкам $\mathbb{OP}^2$ и группа автоморфизмов этой алгебры точно та же, как группа изометрий $\mathbb{OP}^2$.

Октонионы также имеют удивительные связи с топологией. В 1957 году Рауль Ботт подсчитал группы гомотопий (homotopy groups) топологической группы $\mathrm{O}(\infty)$, которая является индуктивным пределом ортогональных групп $\mathrm{O}(n)$ при $n \to \infty$. Он доказал, что они повторяются с периодом 8:

$$\pi_{i+8}(\mathrm{O}(\infty)) \cong \pi_i(\mathrm{O}(\infty)).$$

Это известно как "периодичность Ботта". Он также подсчитал первые 8:

$$\begin{aligned} \pi_0(\mathrm{O}(\infty)) &\cong \mathbb{Z}_2 & \qquad \pi_4(\mathrm{O}(\infty)) &\cong 0 \\ \pi_1(\mathrm{O}(\infty)) &\cong \mathbb{Z}_2 & \qquad \pi_5(\mathrm{O}(\infty)) &\cong 0 \\ \pi_2(\mathrm{O}(\infty)) &\cong 0 & \qquad \pi_6(\mathrm{O}(\infty)) &\cong 0 \\ \pi_3(\mathrm{O}(\infty)) &\cong \mathbb{Z} & \qquad \pi_7(\mathrm{O}(\infty)) &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Заметьте, что ненулевые группы гомотопий встречаются здесь в размерностях на 1 меньших, чем размерности $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$. Это не совпадение! В нормированной алгебре с делением левое умножение на элемент с нормой 1 определяет ортогональное преобразование алгебры и таким образом элемент из $\mathrm{O}(\infty)$. Это дает нам отображения сфер $S^0, S^1, S^3$ и $S^7$ на $\mathrm{O}(\infty)$ и эти отображения порождают группы гомотопий в тех размерностях.

Получив это, можно естественным образом догадаться, что повторение с периодом 8 гомотопических групп $\mathrm{O}(\infty)$ в некотором смысле вызвано октонионами. Как мы увидим дальше, это правда. Наоборот, периодичность Ботта тесно связана с проблемой, как много точечных линейно независимых гладких векторных полей могут быть найдены на $n$-сфере [56]. Существует $n$ таких векторных полей только когда $n + 1 = 1, 2, 4$ или 8, и это может быть использовано, чтобы доказать, что алгебры с делением над действительными числами могут возникать только в таких размерностях.

В дальнейшем изложении мы попытаемся объяснить октонионы и их роль в алгебре, геометрии и топологии. В разделе 2 даны четыре построения октонионов: первое – через их таблицу умножения, следующее – используя плоскость Фано, затем – используя конструкцию Кэли-Диксона, и последнее – используя клиффордовы алгебры, спиноры и обобщенную концепцию "тройственности" пропагандируемую Франком Адамсом [2]. Каждый подход имеет свои достоинства. В разделе 3 обсуждается проективные линии и плоскости над нормированными алгебрами с делением – особенно $\mathbb{O}$ – и описывается их отношение к периодичности Ботта, к исключительной Йордановой алгебре и к изоморфизмам алгебр Ли, перечисленным выше. В заключение, в разделе 4 обсуждается октонионные построения исключительных групп Ли, в особенности "магический квадрат".

### 1.1 Предварительные замечания

Перед тем как начать нашу экскурсию, зафиксируем некоторые определения. **Векторное пространство** всегда будет для нас конечномерным модулем над полем действительных чисел. **Алгебра** $A$ будет векторным пространством, которое снабжено билинейным отображением $m\colon A \times A \to A$, называемым "умножением", и элементом $1 \in A$, называемым "единицей", таким что $m(1, a) = m(a, 1) = a$. Как обычно, сокращаем $m(a, b)$ до $ab$. Мы не будем предполагать, что наши алгебры являются ассоциативными! Задав алгебру, мы будем свободно считать действительные числа элементами этой алгебры посредством отображения $\alpha \mapsto \alpha 1$.

Алгебра $A$ является **алгеброй с делением**, если даны $a, b \in A$ с $ab = 0$, тогда либо $a = 0$, либо $b = 0$. Эквивалентно, $A$ есть алгебра с делением, если операции левого и правого умножения на любой ненулевой элемент являются обратимыми. **Нормированная алгебра с делением** есть алгебра $A$, которая является также нормированным векторным пространством со свойством $\|ab\| = \|a\|\|b\|$. Это подразумевает, что $A$ есть алгебра с делением и $\|1\| = 1$.

Мы должны предупредить читателя о некоторых тонкостях. Мы говорим, что алгебра $A$ имеет **инверсии относительно умножения** (multiplicative inverses), если для любого ненулевого $a \in A$ существует элемент $a^{-1} \in A$ с $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Ассоциативная алгебра имеет инверсии умножения, если она является алгеброй деления. Однако, это нарушается для неассоциативных алгебр! В разделе 2.2 мы построим алгебры, которые имеют инверсии умножения, но не являются алгебрами с делением. С другой стороны, можно построить алгебру с делением без инверсий умножения, взяв кватернионы и слегка модифицируя произведение, установив $i^2 = -1 + \epsilon j$ для некоторого малого ненулевого действительного числа $\epsilon$, в то время как остальную часть таблицы умножения оставим неизменной. Элемент $i$ тогда имеет как левую, так и правую обратные величины (inverses), но они не равны. (Мы благодарим Давида Русина за этот пример.)

Существует три уровня ассоциативности. Алгебра является **степенно-ассоциативной**, если подалгебра, порожденная любым одним элементом, является ассоциативной. Она является **альтернативной**, если подалгебра, порожденная любыми двумя элементам, является ассоциативной. Окончательно, если подалгебра, порожденная любыми тремя элементами, является ассоциативной, то алгебра ассоциативна.

Как мы увидим, октонионы не ассоциативны, но они альтернативны. Как можно проверить подобный момент? Согласно теореме Эмиля Артина [84], алгебра $A$ является альтернативной, если для всех $a, b \in A$ имеем

$$(aa)b = a(ab), \qquad (ab)a = a(ba), \qquad (ba)a = b(aa) \tag{1}$$

Фактически любые два из этих уравнений подразумевают оставшееся, так что обычно выбирают первое и последнее в качестве определения "альтернативности". Чтобы убедиться в этом, заметим, что любая алгебра имеет трилинейное отображение

$$[\cdot,\cdot,\cdot]: \quad A^3 \to A$$

называемое **ассоциатором** и задаваемое выражением

$$[a,b,c] = (ab)c - a(bc).$$

Ассоциатор измеряет дефект ассоциативности, точно так же, как коммутатор $[a,b] = ab - ba$ измеряет дефект коммутативности. Коммутатор является антисимметричным (alternating) билинейным отображением, это означает, что он переключает знак всякий раз, когда два аргумента меняются:

$$[a,b] = -[b,a]$$

или, что тоже самое, что он обнуляется, когда они оказываются равными:

$$[a,a] = 0.$$

Отсюда возникает вопрос, является ли ассоциатор тоже антисимметричным (alternating)? В действительности, это выполняется точно, когда $A$ альтернативна! Причина заключается в том, что каждое уравнение в (1) говорит, что ассоциатор обращается в нуль, когда определенная пара аргументов равна, или эквивалентно, он меняет знак в том случае, когда пара аргументов меняется местами. Заметим, однако, что если ассоциатор меняет знак, когда мы переставляем $i$-ый и $j$-ый аргументы, и еще когда переставляем $j$-ый и $k$-ый аргументы, то он должен менять знак, когда мы переключаем $i$-ый и $k$-ый. Таким образом любые два из уравнений (1) предполагают третье.

Теперь мы можем высказать утверждения о выдающихся свойствах $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, и $\mathbb{O}$:

**Теорема 1.** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *и* $\mathbb{O}$ *есть единственные нормированные алгебры с делением.*

**Теорема 2.** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *и* $\mathbb{O}$ *есть единственные альтернативные алгебры с делением.*

Первая теорема возвращает нас к работе Гурвица 1898 г. [55]. Она была впоследствии обобщена по многим направлениям, например, на алгебры над другими полями. Версия второй теоремы появилась в работе Цорна 1930 г. [100] – парня с леммой. Современные доказательства этих теорем можно найти в прекрасной книге Шафера по неассоциативным алгебрам [84]. Мы кратко опишем два доказательства теоремы Гурвица в Разделе 2.3.

Заметим, что мы *не* утверждаем, что $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ являются единственными алгебрами с делением. Это неверно. К примеру, мы уже описали способ получения 4-мерных алгебр с делением, которые не имеют инверсии умножения. Однако, всё же верен такой факт:

**Теорема 3.** *Все алгебры с делением имеют размерность* $1, 2, 4$ *или* $8$.

Это было независимо доказано Кервейром [62] и Боттом–Милнором [11] в 1958. Об этом доказательстве будет немного сказано в Разделе 3.1. Однако, в дальнейшем в фокус нашего взгляда не попадут основные результаты по алгебрам с делением. Вместо этого мы сосредоточимся на особых свойствах октонионов. Начнем с их построения.

## 2 Построение октонионов

Простейший способ построения октонионов дается их таблицей умножения. Октонионы являются 8-мерной алгеброй с базисом $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ и их умножение задано этой таблицей, которая описывает результат перемножения элемента в $i$-ой строке на элемент в $j$-ом столбце:

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $-1$ | $e_4$ | $e_7$ | $-e_2$ | $e_6$ | $-e_5$ | $-e_3$ |
| $e_2$ | $-e_4$ | $-1$ | $e_5$ | $e_1$ | $-e_3$ | $e_7$ | $-e_6$ |
| $e_3$ | $-e_7$ | $-e_5$ | $-1$ | $e_6$ | $e_2$ | $-e_4$ | $e_1$ |
| $e_4$ | $e_2$ | $-e_1$ | $-e_6$ | $-1$ | $e_7$ | $e_3$ | $-e_5$ |
| $e_5$ | $-e_6$ | $e_3$ | $-e_2$ | $-e_7$ | $-1$ | $e_1$ | $e_4$ |
| $e_6$ | $e_5$ | $-e_7$ | $e_4$ | $-e_3$ | $-e_1$ | $-1$ | $e_2$ |
| $e_7$ | $e_3$ | $e_6$ | $-e_1$ | $e_5$ | $-e_4$ | $-e_2$ | $-1$ |

Таблица 1 — Таблица умножения октонионов

К сожалению, эта таблица почти совершенно непрозрачна! Единственные интересные моменты, которые можно узнать из нее, это:

- $e_1, \ldots, e_7$ являются квадратными корнями $-1$,
- $e_i$ и $e_j$ антикоммутируют когда $i \neq j$ : $\quad e_i e_j = -e_j e_i$,
- тождество **цикличности индексов** имеет вид: $\quad e_i e_j = e_k \implies e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$, где мы считаем индексы действующими в $\mathbb{Z}_7$,
- тождество **удваивания индексов** имеет вид: $\quad e_i e_j = e_k \implies e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$.

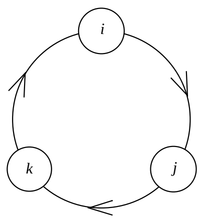
Вместе с одним нетривиальным произведением типа $e_1 e_2 = e_4$, этих фактов достаточно для заполнения всей таблицы умножения. Однако, нам безусловно нужен лучший способ запоминания произведения октонионов. Желательно, чтобы нам стало так же удобно с умножением октонионов, как с умножением матриц! И в конечном счете, нам нужен более концептуальный подход к октонионам, который объяснит их особые свойства и как они согласуются с другими математическими идеями. В дальнейшем мы даём некоторые дополнительные описания умножения октонионов, восходя от хорошего мнемонического описания к нескольким более глубоким и концептуальным.

### 2.1 Плоскость Фано

Кватернионы $\mathbb{H}$ являются 4-мерной алгеброй с базисом $1, i, j, k$. Для описания произведения можно было бы дать таблицу умножения, но легче запомнить что:

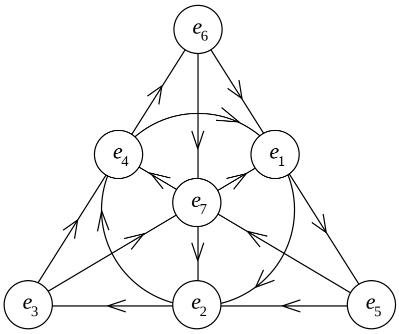
- 1 является единицей по умножению (multiplicative identity),
- $i, j$ и $k$ есть квадратные корни $-1$,
- выполняются $ij = k$, $ji = -k$ и все тождества, полученные из них посредством циклических перестановок $(i, j, k)$.

Можно подытожить последнее правило на рисунке:




Когда мы умножаем два элемента, следуя по часовой стрелке по окружности, мы получим следующий за ними, например, $ij = k$. Но когда мы умножаем два элемента, следуя против часовой стрелки, мы получим *минус* следующий элемент: например, $ji = -k$.

Можно использовать схему того же рода, чтобы запомнить, как умножаются октонионы:




Это – **плоскость Фано**, маленькое приспособление (gadget) с 7 точками и 7 линиями. "Линии" – это стороны (равностороннего) треугольника, его высоты и окружность, содержащая все середины сторон. Каждая пара различных точек лежит на уникальной линии. Каждая линия содержит три точки и каждая из этих троек имеет циклическую упорядоченность, показанную стрелками. Если $e_i, e_j$ и $e_k$ циклически упорядочены этим способом, то

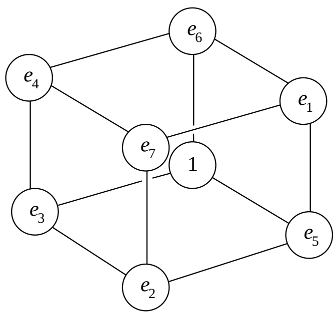
$$e_ie_j = e_k, \qquad e_je_i = -e_k.$$

Вместе со следующими правилами:

- 1 – единица по умножению,
- $e_1, \ldots, e_7$ – квадратные корни $-1$,

плоскость Фано полностью описывает алгебраическую структуру октонионов. Удвоение индексов соответствует вращению картинки на треть полного угла.

Это, конечно, лаконичная мнемоника, но не скрывается ли за этим нечто более глубокое? Да! Плоскость Фано является проективной плоскостью над 2-элементным полем $\mathbb{Z}_2$. Другими словами, она состоит из линий, проходящих сквозь начало координат в векторном пространстве $\mathbb{Z}_2^3$. Поскольку каждая такая линия содержит единственный ненулевой элемент, можно также думать о плоскости Фано, как состоящей из семи ненулевых элементов $\mathbb{Z}_2^3$. Если начало координат в $\mathbb{Z}_2^3$ соответствует $1 \in \mathbb{O}$, мы получим следующую картину октонионов:




Заметим, что плоскости, проходящие через начало координат этого 3-мерного векторного пространства, дают подалгебры $\mathbb{O}$, изоморфные кватернионам; линии, проходящие через начало координат, дают подалгебры, изоморфные комплексным числам, а само начало координат дает подалгебру, изоморфную действительным числам.

Что в действительности мы имеем здесь – это описание октонионов как "закрученной групповой алгебры" (twisted group algebra). Задана любая группа $G$, групповая алгебра $\mathbb{R}[G]$ состоит из всех конечных формальных линейных комбинаций элементов $G$ с действительными коэффициентами. Это – ассоциативная алгебра с произведением, полученным из произведения группы $G$. Можно использовать любую функцию

$$\alpha\colon\ G^2 \to \{\pm 1\}$$

для "кручения" этого произведения, определяющего новое произведение

$$\star\colon\ \mathbb{R}[G] \times \mathbb{R}[G] \to \mathbb{R}[G]$$

посредством:

$$g \star h = \alpha(g,h)\; gh,$$

где $g, h \in G \subset \mathbb{R}[G]$. Можно записать уравнение, включающее $\alpha$, которая обеспечит ассоциативность этого нового произведения. В этом случае назовем $\alpha$ "2-коциклом". Если $\alpha$ удовлетворяет определенному дополнительному уравнению, произведение $\star$ будет также коммутативным и мы назовем $\alpha$ "стабильным 2-коциклом". Например, групповая алгебра $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2]$ изоморфна произведению 2 копий $\mathbb{R}$, но мы можем закрутить (twist) ее посредством стабильного 2-коцикла для получения комплексных чисел. Групповая алгебра $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^2]$ изоморфна произведению 4 копий $\mathbb{R}$, но можно закрутить ее с помощью 2-коцикла и получить кватернионы. Аналогично, групповая алгебра $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^3]$ есть произведение 8 копий $\mathbb{R}$, и что действительно мы сделали в этом разделе, – это описали функцию $\alpha$, которая позволяет закручивать эту групповую алгебру для получения октонионов. Так как октонионы неассоциативны, эта функция не является 2-коциклом. Однако, ее кограница есть "стабильный 3-коцикл", который позволяет определить новый ассоциатор и сплетение (braiding) для категории $\mathbb{Z}_2^3$-градуированных векторных пространств, превратив ее в симметричную моноидальную категорию (monoidal category) [4]. В этой симметричной моноидальной категории октонионы являются коммутативным моноидным объектом. В менее технических терминах: эта категория обеспечивает контекст в котором октонионы *являются* коммутативными и ассоциативными! До сих пор эта идея только начала разрабатываться.

### 2.2 Конструкция Кэли-Диксона

Было бы хорошо иметь конструкцию нормированных алгебр с делением $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, которая объясняла бы, почему каждая алгебра закономерно умещается внутри следующей. Было бы хорошо, если бы эта конструкция проясняла, почему $\mathbb{H}$ некоммутативна и $\mathbb{O}$ неассоциативна. Было бы даже лучше, если бы эта конструкция давала бесконечную последовательность алгебр, каждый раз удваивающихся по размерности, с нормированными алгебрами с делением в качестве первых четырех членов. Фактически такая конструкция существует: она называется конструкцией Кэли-Диксона.

Как заметил Гамильтон, комплексные числа $a + bi$ могут мыслиться как пара $(a, b)$ действительных чисел. Сложение осуществляется покомпонентно, а умножение происходит так:

$$(a, b)(c, d) = (ac - db,\; ad + cb).$$

Можно также определить сопряжение комплексных чисел посредством

$$(a, b)^* = (a, -b).$$

Теперь, поскольку мы имеем комплексные числа, мы можем аналогичным путем определить кватернионы. Кватернионы могут быть рассматриваться как пара комплексных чисел. Сложение выполняется покомпонентно, а умножение проводится так:

$$(a, b)(c, d) = (ac - db^*,\; a^*d + cb). \tag{2}$$

Эта формула совсем подобна нашей формуле умножения комплексных чисел, но с добавлением в нее пары сопряженных. Если мы включим их в предыдущую формулу, ничего не изменится, так как сопряжение действительных чисел – это просто само число. Можно также определить сопряженное кватерниона посредством

$$(a, b)^* = (a^*, -b). \tag{3}$$

Игра продолжается! Теперь мы можем определить октонион как пару кватернионов. Как и прежде, мы будем складывать и умножать их, используя формулы (2) и (3). Этот прием для получения новых алгебр из старых называется **конструкцией Кэли-Диксона**.

Почему действительные числа, комплексные числа, кватернионы и октонионы имеют инверсии умножения? Принимаем это в качестве очевидного факта для действительных чисел. Для комплексных чисел можно проверить, что

$$(a, b)(a, b)^* = (a, b)^*(a, b) = k(1, 0),$$

где $k$ – действительное число, квадрат нормы $(a,b)$. Это означает, что всякий раз, когда $(a,b)$ не равно нулю, ее обратная величина (multiplicative inverse) равна $(a,b)^*/k$. Можно проверить, что то же самое выполняется для кватернионов и октонионов.

Но это, конечно, приводит к вопросу: почему не существует *бесконечной* последовательности алгебр с делением, каждая из которых получается из предыдущей с помощью построения Кэли–Диксона? Ответ состоит в том, что каждый раз, когда мы применяем данное построение, наша алгебра становиться чуть хуже. Сначала мы теряем то, что каждый элемент равен своему сопряженному, затем теряем коммутативность, затем ассоциативность, и в заключение теряем собственно алгебру с делением.

Чтобы ясно понять это, нужно рассуждать чуть более формально. Определим **$*$-алгебру** как алгебру $A$, снабженную **сопряжением**, то есть действительно-линейным отображением $*\colon A \to A$ со свойствами

$$a^{**} = a, \qquad (ab)^* = b^*a^*$$

для всех $a, b \in A$. Будем говорить, что $*$-алгебра является **действительной**, если $a = a^*$ для каждого элемента $a$ алгебры. Назовем $*$-алгебру $A$ **хорошо нормированной**, если $a + a^* \in \mathbb{R}$ и $aa^* = a^*a > 0$ для всех ненулевых $a \in A$. Если $A$ – хорошо нормированная, положим

$$\mathrm{Re}(a) = (a + a^*)/2 \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}(a) = (a - a^*)/2,$$

и определим норму на $A$ посредством

$$\|a\|^2 = aa^*.$$

Если $A$ является хорошо нормированной, она имеет обратные величины, задаваемые так:

$$a^{-1} = a^*/\|a\|^2.$$

Если $A$ хорошо нормирована и альтернативна, $A$ является нормированной алгеброй с делением. Чтобы увидеть это, заметим, что для любых $a, b \in A$ все 4 элемента $a, b, a^*, b^*$ принадлежат ассоциативной алгебре, порожденной посредством $\mathrm{Im}(a)$ и $\mathrm{Im}(b)$, так что

$$\|ab\|^2 = (ab)(ab)^* = ab(b^*a^*) = a(bb^*)a^* = \|a\|^2\|b\|^2.$$

Начиная с любой $*$-алгебры $A$, построение Кэли–Диксона дает новую $*$-алгебру $A'$. Элементы $A'$ являются парами $(a,b) \in A^2$, умножение и сопряжение определяется используя уравнения (2) и (3). Следующие утверждения показывают эффект многократного применения построения Кэли–Диксона:

**Утверждение 1.** *$A'$ никогда не действительна.*

**Утверждение 2.** *$A$ является действительной (и таким образом коммутативной) $\iff$ $A'$ является коммутативной.*

**Утверждение 3.** *$A$ коммутативна и ассоциативна $\iff$ $A'$ ассоциативна.*

**Утверждение 4.** *$A$ ассоциативна и хорошо нормирована $\iff$ $A'$ альтернативна и хорошо нормирована.*

**Утверждение 5.** *$A$ хорошо нормирована $\iff$ $A'$ хорошо нормирована.*

Все эти утверждения следуют из прямых расчетов; доказывать их здесь значило бы лишь лишать читателя удовольствия сделать это самому. Из этих утверждений следует, что:

$\mathbb{R}$ – действительная коммутативная ассоциативная хорошо нормированная $*$-алгебра $\Longrightarrow$
$\mathbb{C}$ – коммутативная ассоциативная хорошо нормированная $*$-алгебра $\Longrightarrow$
$\mathbb{H}$ – ассоциативная хорошо нормированная $*$-алгебра $\Longrightarrow$
$\mathbb{O}$ – альтернативная хорошо нормированная $*$-алгебра

и следовательно, что $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ – нормированные алгебры с делением. Также следует, что октонионы не являются ни действительными, ни коммутативными, ни ассоциативными.

Если мы продолжим применение процесса Кэли-Диксона к октонионам, то получим последовательность $*$-алгебр размерности 16, 32, 64 и т. д. Первая из них называется **седенионы**, по-видимому указывая на то, что она 16-мерная [67]. Из выше перечисленных результатов следует, что все $*$-алгебры из этой последовательности хорошо нормированы, но не являются ни действительными, ни коммутативными, ни альтернативными. Все они имеют обратные величины, поскольку они хорошо нормированы. Но они не являются алгебрами с делением, так как явный расчет демонстрирует, что седенионы, и поэтому все прочие, имеют делители нуля. Фактически [24, 73], делители нуля с единичной нормой в случае седенионов образуют подпространство, гомеоморфное исключительной группе Ли $\mathrm{G}_2$.

Конструкция Кэли-Диксона дает хороший путь для получения последовательности $\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mathbb{C}, \mathbb{O}$ и основных свойств этих алгебр. Но в чем смысл этой конструкции? Для ответа на этот вопрос лучше всего определить $A'$ как алгебру, образованную присоединением к $A$ элемента $i$, удовлетворяющего $i^2 = -1$ вместе со следующими соотношениями:

$$a(ib) = i(a^*b), \qquad (ai)b = (ab^*)i, \qquad (ia)(bi^{-1}) = (ab)^* \tag{4}$$

для всех $a, b \in A$. Преобразуем $A'$ в $*$-алгебру, используя исходное сопряжение на элементах $A$ и устанавливая $i^* = -i$. Просто проверить, что каждый элемент $A'$ может быть записан единственным способом как $a + ib$ для некоторых $a, b \in A$, и что это описание конструкции Кэли-Диксона станет эквивалентным нашему предыдущему, если положить $(a, b) = a + ib$.

В чем смысл соотношений (4)? Это просто: *они выражают сопряжение в понятиях сопряжения!* Это игра слов на двойном понимании слова "сопряжение" (conjugation). На самом деле, я имею в виду, что они выражают $*$-операцию в $A$ как конъюгацию посредством $i$. В частности, имеем

$$a^* = (ia)i^{-1} = i(ai^{-1})$$

для всех $a \in A$. Заметим, что когда $A'$ ассоциативна, любое одно из соотношений в (4) влечет два других. Только когда $A'$ является неассоциативной, действительно требуются все три соотношения.

Эта интерпретация конструкции Кэли-Диксона позволяет легче увидеть, что происходит при многократном применении конструкции начиная с $\mathbb{R}$. В $\mathbb{R}$ $*$-операция не делает ничего, поэтому когда мы проводим конструкцию Кэли-Диксона, сопряжение посредством $i$ не должно влиять на элементы $\mathbb{R}$. Поскольку $\mathbb{R}$ коммутативна, это означает, что $\mathbb{C} = \mathbb{R}'$ коммутативна. Но $\mathbb{C}$ теперь уже не действительна, так как $i^* = -i$.

Теперь применим конструкцию Кэли-Диксона к $\mathbb{C}$. Так как $\mathbb{C}$ коммутативна, $*$-операция в $\mathbb{C}$ является автоморфизмом. Всякий раз когда имеется ассоциативная алгебра $A$, оснащенная автоморфизмом $\alpha$, можно всегда расширить $A$ до большей ассоциативной алгебры посредством присоединения обратимого элемента $x$:

$$\alpha(a) = xax^{-1}$$

для всех $a \in A$. Поскольку $\mathbb{C}$ ассоциативна, это значит, что $\mathbb{C}' = \mathbb{H}$ тоже ассоциативна. Но так как $\mathbb{C}$ не является действительной, $\mathbb{H}$ не может быть коммутативной, поскольку сопряжение посредством нового присоединенного элемента $i$ должно действовать нетривиально.

Наконец, применим конструкцию Кэли-Диксона к $\mathbb{H}$. Поскольку $\mathbb{H}$ некоммутативна, $*$-операция в $\mathbb{H}$ не является автоморфизмом; это только антиавтоморфизм. Это означает, что невозможно выразить ее как конъюгацию посредством некоторого элемента большей ассоциативной алгебры. Таким образом, $\mathbb{H}' = \mathbb{O}$ должна быть неассоциативной.

### 2.3 Клиффордовы Алгебры

Уильям Клиффорд изобрел свои алгебры в 1876 в качестве попытки обобщить кватернионы на высшие размерности, опубликовав работу о них двумя годами позже [23]. Если задано пространство $V$ с действительным скалярным произведением, **клиффордова алгебра** $\mathrm{Cliff}(V)$ является ассоциативной алгеброй, свободно порожденной посредством $V$ по модулю соотношений

$$v^2 = -\|v\|^2$$

для всех $v \in V$. Эквивалентно, она является ассоциативной алгеброй, свободно порожденной посредством $V$ по модулю соотношений

$$vw + wv = -2\langle v, w\rangle$$

для всех $v, w \in V$. Если $V = \mathbb{R}^n$ с его обычным скалярным произведением, назовем его клиффордовой алгеброй $\mathrm{Cliff}(n)$. Конкретно, это ассоциативная алгебра, свободно порожденная $n$ антикоммутирующими квадратными корнями из $-1$. Исходя из этого, легко видно, что

$$\mathrm{Cliff}(0) = \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Cliff}(1) = \mathbb{C}, \qquad \mathrm{Cliff}(2) = \mathbb{H}.$$

До сих пор эта последовательность напоминает итерационное построение Кэли-Диксона – но октонионы *не* являются клиффордовой алгеброй, поскольку они не ассоциативны. Тем не менее, есть глубокая связь между клиффордовыми алгебрами и нормированными алгебрами с делением. Эта взаимосвязь дает хороший путь для доказательства, что $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ являются единственными нормированными алгебрами с делением. Это также ключевой момент для понимания геометрического значения октонионов.

Чтобы увидеть эту связь, во-первых предположим, что $\mathbb{K}$ – нормированная алгебра с делением. Левое умножения на любой элемент $a \in \mathbb{K}$ дает оператор

$$L_a\colon\ \mathbb{K} \ \to\ \mathbb{K}, \qquad x \ \mapsto\ ax.$$

Если $\|a\| = 1$, оператор $L_a$ сохраняет норму, поэтому он отображает единичную сферу $\mathbb{K}$ на себя. Поскольку $\mathbb{K}$ – алгебра с делением, можно найти оператор этой формы, отображающий любую точку на единичной сфере в любую другую точку. Единичная сфера в $\mathbb{K}$ может иметь столь богатую симметрию в единственном случае, если норма на $\mathbb{K}$ возникает из скалярного произведения. Даже лучше, это скалярное произведение является единственным, поскольку можно использовать поляризационное тождество

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

для восстановления произведения из нормы.

Используя это скалярное произведение, будем говорить, что элемент $a \in \mathbb{K}$ **мнимый**, если он ортогонален элементу 1, и пусть $\mathrm{Im}(\mathbb{K})$ будет пространством мнимых элементов $\mathbb{K}$. Можно также представить $\mathrm{Im}(\mathbb{K})$ как касательное пространство единичной сферы в $\mathbb{K}$ в точке 1. Имеется хорошее следствие: поскольку $a \mapsto L_a$ отображает единичную сферу в $\mathbb{K}$ на группу Ли ортогональных преобразований $\mathbb{K}$, оно должно отсылать (send) $\mathrm{Im}(\mathbb{K})$ к алгебре Ли кососопряженных (skew-adjoint) преобразований $\mathbb{K}$. Кратко, $L_a$ кососопряженная всегда, когда $a$ мнимое.

Связь с алгебрами Клиффорда проявляется, когда мы вычисляем квадрат от $L_a$ для $a \in \mathrm{Im}(\mathbb{K})$. Это проще всего сделать, когда $a$ имеет норму 1. Тогда $L_a$ является одновременно ортогональной и кососопряженной. Для любого ортогонального преобразования мы можем найти некоторый ортонормированный базис, в котором его матрица блочно-диагональна и строится из $2 \times 2$ блоков которые выглядят так:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

и возможно из $1 \times 1$ блока вида $(1)$. Такое преобразование может быть кососопряженным только тогда, когда оно состоит целиком из $2 \times 2$ блоков формы

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, его квадрат равен $-1$. Мы, таким образом, имеем $L_a^2 = -1$, когда $a \in \mathrm{Im}(\mathbb{K})$ имеет норму 1. Следовательно,

$$L_a^2 = -\|a\|^2$$

для всех $a \in \mathrm{Im}(\mathbb{K})$. Таким образом, мы получили представление клиффордовой алгебры $\mathrm{Cliff}(\mathrm{Im}(\mathbb{K}))$ на $\mathbb{K}$. Любая $n$-мерная нормированная алгебра с делением, таким образом, даёт $n$-мерное представление $\mathrm{Cliff}(n-1)$. Как мы увидим далее, это накладывает большие ограничения.

Мы уже описали клиффордовы алгебры по $\mathrm{Cliff}(2)$ включительно. Дальнейшие вычисления [54, 78] дают следующую таблицу, в которой мы используем $A[n]$ для обозначения $n \times n$ матриц с элементами из алгебры $A$:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Cliff}(n)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{H}$ | $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ | $\mathbb{H}[2]$ | $\mathbb{C}[4]$ | $\mathbb{R}[8]$ | $\mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$ |

Таблица 2 — Клиффордовы Алгебры

Начиная с размерности 8, происходит нечто изумительное: таблица продолжается следующим образом:

$$\mathrm{Cliff}(n+8) \cong \mathrm{Cliff}(n) \otimes \mathbb{R}[16].$$

Другими словами, $\mathrm{Cliff}(n+8)$ состоит из $16 \times 16$ матриц с элементами из $\mathrm{Cliff}(n)$. Такое 8-периодическое поведение было открыто Картаном в 1908 [16], но мы позволим себе называть это периодичностью Ботта, поскольку она имеет множество далеко идущих топологических приложений, некоторые из которых открыл Ботт.

Поскольку клиффордовы алгебры строятся из матричных алгебр над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$, легко определить их представления. Любое представление является прямой суммой неприводимых представлений. Единственное неприводимое представление $\mathbb{R}[n]$ есть очевидное представление посредством матричного умножения на $\mathbb{R}^n$. Подобным образом, единственным неприводимым представлением $\mathbb{C}[n]$ является очевидное представление на $\mathbb{C}^n$, и единственным неприводимым представлением $\mathbb{H}[n]$ является очевидное представление на $\mathbb{H}^n$.

Взглянув на вышеприведённую таблицу, мы видим что если только $n$ не равно 3 или 7 по модулю 8, $\mathrm{Cliff}(n)$ является действительной, комплексной или кватернионной матричной алгеброй, так что она имеет единственное неприводимое представление. По причинам, разъяснённым ниже, это неприводимое представление известно как пространство **пиноров** и обозначается $P_n$. Когда $n$ равно 3 или 7 по модулю 8, алгебра $\mathrm{Cliff}(n)$ является прямой суммой двух действительных или кватернионных матричных алгебр, так что она имеет два неприводимых представления, которые мы называем **положительными пинорами** $P_n^+$ и **отрицательными пинорами** $P_n^-$. Мы суммируем эти результаты в следующей таблице:

| $n$ | $\mathrm{Cliff}(n)$ | неприводимые представления |
|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{R}$ | $P_0 = \mathbb{R}$ |
| 1 | $\mathbb{C}$ | $P_1 = \mathbb{C}$ |
| 2 | $\mathbb{H}$ | $P_2 = \mathbb{H}$ |
| 3 | $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ | $P_3^+ = \mathbb{H}$, $P_3^- = \mathbb{H}$ |
| 4 | $\mathbb{H}[2]$ | $P_4 = \mathbb{H}^2$ |
| 5 | $\mathbb{C}[4]$ | $P_5 = \mathbb{C}^4$ |
| 6 | $\mathbb{R}[8]$ | $P_6 = \mathbb{R}^8$ |
| 7 | $\mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$ | $P_7^+ = \mathbb{R}^8$, $P_7^- = \mathbb{R}^8$ |

Таблица 3 — Пинорные представления

Исследуя эту таблицу, мы видим, что в пределах размерностей, указанных в таблице, $n$-мерное представление $\mathrm{Cliff}(n-1)$ существует только для $n = 1, 2, 4$, и 8. Как насчёт высших размерностей? Согласно периодичности Ботта, неприводимые представления $\mathrm{Cliff}(n+8)$ получаются при помощи тензорного умножения $\mathrm{Cliff}(n)$ на $\mathbb{R}^{16}$. Это приводит к умножению размерности на 16, так что легко проверить, что для $n > 8$ неприводимые представления $\mathrm{Cliff}(n-1)$ всегда имеют размерность большую $n$.

Следовательно, нормированные алгебры с делением возможны только в размерностях $1, 2, 4$, и 8. Сконструировав $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$, мы также знаем, что нормированные алгебры с делением *существуют* в этих размерностях. Остаётся единственный вопрос, являются ли они *уникальными*. Для этого поможет более глубоко исследовать отношение между нормированными алгебрами с делением и конструкцией Кэли-Диксона. В последующем, мы обрисуем подход, основанный на идеях, изложенных в книге Шпрингера и Фельдкампа [90].

Для начала предположим, что $\mathbb{K}$ – нормированная алгебра с делением. Тогда имеется единственный линейный оператор $*\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ такой, что $1^* = 1$ и $a^* = -a$ для $a \in \mathrm{Im}(\mathbb{K})$. При помощи некоторых вычислений можно доказать, что это превращает $\mathbb{K}$ в хорошо нормированную $*$-алгебру.

Далее, предположим, что $\mathbb{K}_0$ – некоторая подалгебра нормированной алгебры с делением $\mathbb{K}$. Нетрудно убедиться, что $\mathbb{K}_0$ является хорошо нормированной $*$-алгеброй в собственных пределах. Если $\mathbb{K}_0$ не является всей $\mathbb{K}$, можно найти элемент $i \in \mathbb{K}$, который ортогонален любому элементу из $\mathbb{K}_0$. Без потери общности, мы будем полагать, что этот элемент имеет норму, равную единице. Поскольку этот элемент $i$ ортогонален к $1 \in \mathbb{K}_0$, он является мнимым. Из определения $*$-оператора следует, что $i^* = -i$, и из ранее полученных в этой секции результатов мы имеем $i^2 = -1$. Дальнейшими вычислениями можно показать, что для всех $a, a' \in \mathbb{K}_0$ мы имеем

$$a(ia') = i(a^*a'), \qquad (ai)a' = (aa'^*)i, \qquad (ia)(a'i^{-1}) = (aa')^*$$

Первый же взгляд на уравнение (4) обнаруживает, что это есть в точности соотношения, определяющие конструкцию Кэли-Диксона! При небольшом размышлении оказывается, что подалгебра $\mathbb{K}$, порождённая $\mathbb{K}_0$ и $i$, изоморфна (как $*$-алгебра) $\mathbb{K}_0'$ , т. е. $*$-алгебре, полученной из $\mathbb{K}_0$ при помощи конструкции Кэли-Диксона.

Таким образом, всякий раз, когда мы имеем нормированную алгебру с делением $\mathbb{K}$, мы можем найти цепочку подалгебр $\mathbb{R} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_n = \mathbb{K}$ такую, что $\mathbb{K}_{i+1} \cong \mathbb{K}_i'$. Чтобы построить $\mathbb{K}_{i+1}$, нужно всего лишь выбрать элемент единичной нормы из $\mathbb{K}$, который ортогонален любому элементу из $\mathbb{K}_i$. Следовательно, единственными нормированными алгебрами с делением размерности 1, 2, 4 и 8 являются $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$. Это также даёт другое доказательство того, что не существует нормированных алгебр с делением других размерностей: если б такие были, они были бы 16-мерными, а именно $\mathbb{O}'$ – седенионы. Но как упоминалось в разделе 2.2, можно непосредственно убедиться в том, что седенионы не являются алгеброй с делением.

### 2.4 Спиноры и тройственности

Неассоциативная алгебра с делением может показаться слишком странным предметом, чтобы беспокоиться по ее поводу, однако понятие тройственности (triality) позволяет ей выглядеть немного более естественно. Понятие двойственности (дуальности, duality) играет важную роль повсюду в линейной алгебре. Понятие тройственности похоже на него, но значительно хитроумнее (subtler). Пусть даны два векторных пространства $V_1$ и $V_2$, тогда можно определить **двойственность** как билинейное отображение

$$f\colon V_1 \times V_2 \to \mathbb{R},$$

которое не вырождено, в том смысле, что если зафиксировать любой из аргументов на произвольном ненулевом значении, то линейный функционал, порождаемый на другом векторном пространстве, также является ненулевым. Подобным образом, для заданных векторных пространств $V_1, V_2$ и $V_3$, **тройственность** есть трилинейное отображение

$$t\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to \mathbb{R},$$

которое невырождено в том смысле, что если зафиксировать произвольные два аргумента на любых ненулевых значениях, то линейный функционал, индуцированный на третьем пространстве, также является ненулевым.

Двойственности возникают легко. Тройственности возникают гораздо реже. Допустим, у нас есть тройственность

$$t\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to \mathbb{R}.$$

Посредством дуализации мы можем превратить его в билинейное отображение

$$m\colon V_1 \times V_2 \to V_3^*$$

которое мы называем "умножением". Благодаря невырожденности нашей тройственности, левое умножение на любой ненулевой элемент из $V_1$ задаёт изоморфизм из $V_2$ на $V_3^*$. Аналогично, правое умножение на любой ненулевой элемент из $V_2$ определяет изоморфизм из $V_1$ на $V_3^*$. Если мы выберем ненулевые элементы $e_1 \in V_1$ и $e_2 \in V_2$, мы можем тем самым отождествить пространства $V_1$, $V_2$ и $V_3^*$ с одним векторным пространством, скажем $V$. Заметим, что это отождествляет все три вектора $e_1 \in V_1$, $e_2 \in V_2$ и $e_1e_2 \in V_3^*$ с одним и те же вектором $e \in V$. Мы, таким образом, получили произведение

$$m\colon V \times V \to V$$

для которого $e$ является левой и правой единицей. Поскольку левое или правое умножение на любой ненулевой элемент является изоморфизмом, $V$ является теперь алгеброй с делением! Обратно, любая алгебра с делением определяет тройственность.

Из теоремы 3 следует, что тройственности возникают только в размерностях 1, 2, 4 или 8. Это весьма глубокая теорема. Для сравнения, классификация Гурвица *нормированных* алгебр с делением доказывается легко. И не удивительно, поскольку они соответствуют частному виду тройственности, который мы называем "нормированной" тройственностью.

Точнее, **нормированная тройственность** состоит из пространств со скалярным произведением $V_1, V_2, V_3$, снабжённых трилинейным отображением $t\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to \mathbb{R}$ с

$$|t(v_1, v_2, v_3)| \leq \|v_1\|\,\|v_2\|\,\|v_3\|,$$

и таким, что для всех $v_1, v_2$ существует $v_3 \neq 0$, для которого эта грань достигнута (bound is attained) – и аналогично для циклических перестановок $1, 2, 3$. Для заданной нормированной тройственности выбор единичных векторов в любых двух из пространств $V_i$ позволяет отождествить все три пространства и получить нормированную алгебру с делением. Обратно, любая нормированная алгебра с делением дает нормированную тройственность.

Однако, откуда возникают нормированные тройственности? Они приходят из теории спиноров! Из раздела 2.3 мы уже знаем, что любая $n$-мерная нормированная алгебра с делением является представлением $\mathrm{Cliff}(n-1)$, так что имеет смысл поискать нормированные тройственности здесь. На самом деле, представления $\mathrm{Cliff}(n-1)$ дают определённые представления $\mathrm{Spin}(n)$, двойного накрытия группы вращений $n$ измерениях. Они называются "спинорами". Как мы увидим, соотношение между спинорами и векторами даёт прекрасный способ конструирования нормированных тройственностей в размерностях $1, 2, 4$ и 8.

Чтобы понять, как это делается, сначала допустим, что $\mathrm{Pin}(n)$ – группа внутри $\mathrm{Cliff}(n)$, состоящая из всех произведений единичных векторов из $\mathbb{R}^n$. Эта группа является двойным накрытием ортогональной группы $\mathrm{O}(n)$, где для любого заданного единичного вектора $v \in \mathbb{R}^n$, мы отображаем оба $\pm v \in \mathrm{Pin}(n)$ в элемент $\mathrm{O}(n)$, отражающий поперёк (reflects across) гиперплоскости, перпендикулярной к $v$. Поскольку каждый элемент $\mathrm{O}(n)$ является произведением отражений, это на самом деле гомоморфизм.

Далее, пусть $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathrm{Pin}(n)$ – подгруппа, состоящая из всех элементов, являющихся произведениями чётного числа единичных векторов в $\mathbb{R}^n$. Элемент из $\mathrm{O}(n)$ имеет определитель, равный единице, если и только если (iff) он является произведением чётного числа отражений, так что точно так же, как $\mathrm{Pin}(n)$ является двойным накрытием $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{Spin}(n)$ является двойным накрытием $\mathrm{SO}(n)$. Вместе с неприличной французской шуткой, которую мы не будем разъяснять, эта аналогия является источником терминов ‘Pin’ и ‘pinor’.

Поскольку $\mathrm{Pin}(n)$ находится внутри$\mathrm{Cliff}(n)$, неприводимые представления $\mathrm{Cliff}(n)$ ограничиваются представлениями $\mathrm{Pin}(n)$, которые всё еще оказываются неприводимыми. Они опять называются **пинорами**, и мы знаем, чему они равны из Таблицы 3. Подобным образом, $\mathrm{Spin}(n)$ находится внутри подалгебры

$$\mathrm{Cliff}_0(n) \subseteq \mathrm{Cliff}(n),$$

состоящей из всех линейных комбинаций произведений чётного числа векторов из $\mathbb{R}^n$. Таким образом, неприводимые представления $\mathrm{Cliff}_0(n)$ ограничены представлениями $\mathrm{Spin}(n)$, которые всё ещё оказываются неприводимыми. Они называются **спинорами** – но мы предупреждаем читателя, что этот термин уже используется для обозначения многих незначительно различающихся разновидностей этого понятия.

На самом деле, существует изоморфизм

$$\phi\colon \mathrm{Cliff}(n-1) \to \mathrm{Cliff}_0(n),$$

заданный следующим образом:

$$\phi(e_i) = e_i e_n, \qquad 1 \le i \le n-1,$$

где $\{e_i\}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, спиноры в $n$ измерениях – это то же самое, что и пиноры в $n-1$ измерениях! Таблица 3, следовательно, приводит к таблице 4, в которой мы используем аналогичные обозначения, но с '$S$' вместо '$P$':

| $n$ | $\mathrm{Cliff}_0(n)$ | неприводимые представления |
|---|---|---|
| 1 | $\mathbb{R}$ | $S_1 = \mathbb{R}$ |
| 2 | $\mathbb{C}$ | $S_2 = \mathbb{C}$ |
| 3 | $\mathbb{H}$ | $S_3 = \mathbb{H}$ |
| 4 | $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ | $S_4^+ = \mathbb{H}$, $S_4^- = \mathbb{H}$ |
| 5 | $\mathbb{H}[2]$ | $S_5 = \mathbb{H}^2$ |
| 6 | $\mathbb{C}[4]$ | $S_6 = \mathbb{C}^4$ |
| 7 | $\mathbb{R}[8]$ | $S_7 = \mathbb{R}^8$ |
| 8 | $\mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$ | $S_8^+ = \mathbb{R}^8$, $S_8^- = \mathbb{R}^8$ |

Таблица 4 — Спинорные представления

Мы называем $S_n^+$ и $S_n^-$ **правыми** и **левыми** спинорными представлениями. Для $n > 8$ можно вычислить спинорные представления, используя периодичность Ботта:

$$S_{n+8} \cong S_n \otimes \mathbb{R}^{16}$$

и подобным же образом для правых и левых спиноров.

Теперь, кроме своих пинорных представлений, группа $\mathrm{Pin}(n)$ имеет также неприводимое представление, где мы сперва применяем гомоморфизм 2–1 $\mathrm{Pin}(n) \to \mathrm{O}(n)$ и затем используем очевидное представление $\mathrm{O}(n)$ на $\mathbb{R}^n$. Мы называем его **векторным** представлением $V_n$. Как векторное пространство $V_n$ есть просто $\mathbb{R}^n$ и $\mathrm{Cliff}(n)$ порождается $\mathbb{R}^n$, поэтому мы имеем включение (inclusion)

$$V_n \hookrightarrow \mathrm{Cliff}(n).$$

Используя это, мы можем ограничить действие клиффордовой алгебры на пиноры отображением

$$m_n\colon \quad V_n \times P_n^{\pm} \to P_n^{\pm} \qquad n \equiv 3, 7 \bmod 8$$

$$m_n\colon \quad V_n \times P_n \to P_n \qquad \text{в противном случае.}$$

Это отображение на самом деле является сплетающим (intertwining) оператором между представлениями $\mathrm{Pin}(n)$. Если мы ограничим векторное представление подгруппой $\mathrm{Spin}(n)$, оно останется неприводимым. Это не всегда верно для пинорных представлений, но мы всегда можем разложить их в прямую сумму спинорных представлений. Применяя это разложение к отображению $m_n$, мы получаем отображение

$$\begin{array}{ll} m_n\colon\ V_n \times S_n^{\pm} \to S_n^{\mp} & n \equiv 0,4 \bmod 8 \\ m_n\colon\ V_n \times S_n \to S_n & \text{противном случае.} \end{array}$$

Все спинорные представления, встречающиеся здесь, являются самодвойственными (self-dual, самодуальными), так что можно провести дуализацию вышеприведённых отображений и переинтерпретировать их как трилинейные отображения

$$\begin{array}{ll} t_n\colon\ V_n \times S_n^{+} \times S_n^{-} \to \mathbb{R} & n \equiv 0,4 \bmod 8 \\ t_n\colon\ V_n \times S_n \times S_n \to \mathbb{R} & \text{в противном случае.} \end{array}$$

Эти трилинейные отображения являются кандидатами в тройственности! Однако, они могут быть тройственностями лишь когда размерность векторного представления согласована с размерностью подходящего спинорного представления. В пределах, охваченных вышеприведённой таблицей, это имеет место только для $n = 1, 2, 4, 8$. В этих случаях мы на самом деле получаем нормированные тройственности, которые в свою очередь порождают нормированные алгебры с делением:

$$\begin{array}{lll} t_1\colon\ V_1 \times S_1 \times S_1 \to \mathbb{R} & \text{дает} & \mathbb{R}, \\ t_2\colon\ V_2 \times S_2 \times S_2 \to \mathbb{R} & \text{дает} & \mathbb{C}, \\ t_4\colon\ V_4 \times S_4^{+} \times S_4^{-} \to \mathbb{R} & \text{дает} & \mathbb{H}, \\ t_8\colon\ V_8 \times S_8^{+} \times S_8^{-} \to \mathbb{R} & \text{дает} & \mathbb{O}. \end{array}$$

В более высоких размерностях, спинорные представления становятся больше векторных представлений, так что мы больше не получаем новых тройственностей таким способом – и конечно же, их не существует.

Из четырёх нормированных тройственностей та, которая порождает алгебру октонионов, имеет интересное свойство, которого не имеют остальные. Чтобы видеть это свойство, необходимо обратить пристальное внимание на разницу между нормированной тройственностью и нормированной алгеброй с делением. Чтобы построить нормированную алгебру с делением $\mathbb{K}$ из нормированной тройственности $t\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to \mathbb{R}$, необходимо произвольно выбрать единичные вектора в двух из трёх пространств, так что группа симметрии $\mathbb{K}$ меньше, чем группа симметрии $t$. Более точно, определим **автоморфизм** нормированной тройственности $t\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to \mathbb{R}$ как тройку сохраняющих норму отображений $f_i\colon V_i \to V_i$ таких, что

$$t(f_1(v_1), f_2(v_2), f_3(v_3)) = t(v_1, v_2, v_3)$$

для всех $v_i \in V_i$. Эти автоморфизмы образуют группу, которую мы называем $\mathrm{Aut}(t)$. Если мы конструируем нормированную алгебру с делением $\mathbb{K}$ из $t$ выбором единичных векторов $e_1 \in V_1, e_2 \in V_2$, мы имеем

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{K}) \cong \{(f_1, f_2, f_3) \in \mathrm{Aut}(t)\ :\ f_1(e_1) = e_1,\ f_2(e_2) = e_2\}.$$

В частности, оказывается, что

$$\begin{array}{lllllll} 1 & \cong & \mathrm{Aut}(\mathbb{R}) & \subseteq & \mathrm{Aut}(t_1) & \cong & \{(g_1, g_2, g_3) \in \mathrm{O}(1)^3\colon\ g_1 g_2 g_3 = 1\} \\ \mathbb{Z}_2 & \cong & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) & \subseteq & \mathrm{Aut}(t_2) & \cong & \{(g_1, g_2, g_3) \in \mathrm{U}(1)^3\colon\ g_1 g_2 g_3 = 1\} \times \mathbb{Z}_2 \\ \mathrm{SO}(3) & \cong & \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) & \subseteq & \mathrm{Aut}(t_4) & \cong & \mathrm{Sp}(1)^3/\{\pm(1,1,1)\} \\ \mathrm{G}_2 & \cong & \mathrm{Aut}(\mathbb{O}) & \subseteq & \mathrm{Aut}(t_8) & \cong & \mathrm{Spin}(8), \end{array} \tag{5}$$

где

$$\mathrm{O}(1) \cong \mathbb{Z}_2, \qquad \mathrm{U}(1) \cong \mathrm{SO}(2), \qquad \mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{SU}(2)$$

есть единичные сферы в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$ соответственно – единственные сферы, которые являются группами Ли. $G_2$ – просто другое название для группы автоморфизмов алгебры октонионов; мы будем изучать эту группу в разделе 4.1. Более широкая группа Spin(8) действует как автоморфизмы на тройственности, порождающей алгебру октонионов, причём действует интересным образом. Для любого заданного элемента $g \in \mathrm{Spin}(8)$, существуют единственные элементы $g_\pm \in \mathrm{Spin}(8)$ такие, что

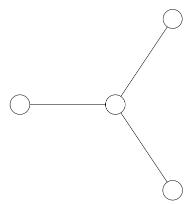
$$t(g(v_1), g_+(v_2), g_-(v_3)) = t(v_1, v_2, v_3)$$

для всех $v_1 \in V_8, v_2 \in S_8^+$, и $v_3 \in S_8^-$. Более того, отображения

$$\alpha_\pm \colon g \to g_\pm$$

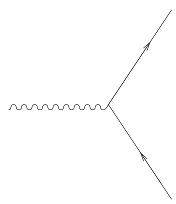
являются внешними автоморфизмами Spin(8). На самом деле, Out(Spin(8)) является группой перестановок трёх символов, и существуют внешние автоморфизмы которые имеют своим результатом перестановку векторного, левого спинорного и правого спинорного представлений каким угодно образом; $\alpha_+$ и $\alpha_-$ входят в их число.

Вообще говоря, внешние автоморфизмы простых групп Ли возникают из симметрий их диаграмм Дынкина. Из всех простых групп Ли Spin(8) имеет самую симметричную диаграмму Дынкина! Она выглядит следующим образом:



Здесь три внешние вершины соответствуют векторному, левому спинорному и правому спинорному представлениям Spin(8), в то время как центральный узел соответствует присоединенному представлению (adjoint representation) – то есть, представлению Spin(8) на её собственной алгебре Ли, более известной как $\mathfrak{so}(8)$. Внешние автоморфизмы, соответствующие симметриям этой диаграммы, были открыты в 1925 году Картаном [17], который назвал эти симметрии **тройственностями**. Более общее понятие "тройственности", которое мы здесь обсуждаем, возникло позже, по-видимому благодаря Адамсу [2].

Конструкция алгебр с делением из тройственностей имеет соблазняющие связи с физикой. В Стандартной модели физики частиц, все частицы, кроме бозона Хиггса, преобразуются как векторы или спиноры. Векторные частицы называются также "калибровочными бозонами"и они служат переносчиками *сил* в Стандартной Модели. Спинорные частицы называются ещё "фермионами", и они соответствуют основным формам *материи*: кваркам и лептонам. Взаимодействие между материей и силами описывается трехлинейной схемой, включающей два спинора и один вектор. Эта схема часто изображается в виде Фейнмановской диаграммы:



где прямые линии обозначают спиноры, а волнистая – вектор. Самым известным примером является процесс поглощения или излучения фотона электроном.

Восхитительно, что математика одного и того же типа может быть использована как для построения нормированных алгебр с делением, так и для описания взаимодействия между материей и силами. Может ли это быть важным для физики? *На первый взгляд*, проблема здесь заключается в том, что в физике используются спиноры, связанные с группой Лоренца, а не с группой вращения, в силу того, что пространство-время имеет лоренцеву, а не евклидову метрику. Однако, в разделе 3.3 мы описываем способ обхода этой проблемы. Точно так же, как октонионы дают спинорное представление Spin(8), пары октонионов дают спинорные представления Spin(9, 1). Это одна из причин, по которой так много физических теорий лучше всего работают в десятимерном пространстве! Примеры включают в себя теорию суперструн [29, 46], суперсимметричные калибровочные теории [35, 65, 85] и расширение Джеффри Диксона Стандартной модели, основанное на алгебре $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$, в которой три силы естественно возникают из трёх множителей в этом тензорном произведении [31].

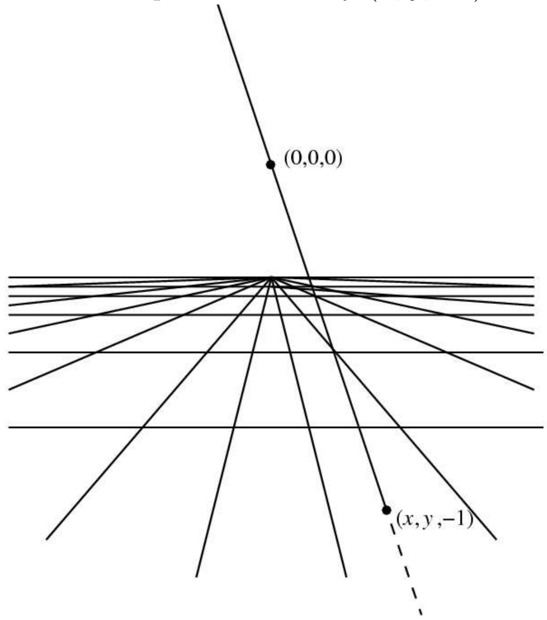
## 3 Октонионная проективная геометрия

Проективная геометрия – освященный веками предмет, восходящий к исследованиям перспективы живописцами Возрождения. Для наших глаз параллельные прямые – например, железнодорожные рельсы – представляются сходящимися на бесконечности. Если сменить точку наблюдения, расстояния и углы оказываются другими, но точки остаются точками и прямые остаются прямыми. Эти факты наводят на мысль о модификации евклидовой планиметрии, основанной на понятиях множества точек, множества прямых и отношении, посредством которого "точка лежит на прямой", и удовлетворяющей следующим аксиомам:

- Для любых двух разных точек имеется единственная прямая, на которой лежат они обе.
- Для любых двух разных прямых имеется единственная точка, лежащая на них обоих.
- Существуют четыре точки такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой.
- Существуют четыре прямые, никакие три из которых не имеют точки, лежащей на всех трёх этих прямых.

Структура, удовлетворяющая таким аксиомам, называется **проективной плоскостью**. Часть обаяния этого определения заключается в том, что оно "самодуально": если мы поменяем друг на друга слова "точка" и "прямая" (и то же сделаем с отношением кто на ком лежит), определение останется тем же самым.

Мы уже встречали один, наименьший из всех, пример проективной плоскости в разделе 2.1: плоскость Фано. Пример, тесно связанный с перспективой, – это вещественная проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$. Здесь точки являются прямыми, проходящими через начало координат в $\mathbb{R}^3$, прямые – это плоскости, проходящие через начало координат в $\mathbb{R}^3$, и отношением "лежать на" является включение (inclusion). Каждая точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ определяет точку в $\mathbb{RP}^2$, а именно прямую в $\mathbb{R}^3$, содержащую начало координат и точку $(x, y, -1)$:




Имеются также и другие точки в $\mathbb{RP}^2$, "точки на бесконечности", соответствующие прямым, проходящим через начало координат в $\mathbb{R}^3$, которые не пересекают плоскость $\{z = -1\}$. Например, любая точка на горизонте на рисунке определяет точку на бесконечности.

Проективная геометрия в высших размерностях также интересна. Можно определить **проективное пространство** при помощи следующих аксиом:

- Для любых двух разных точек $p, q$ имеется единственная прямая $pq$, на которой лежат они обе.
- Для любой прямой имеются как минимум три точки, лежащие на этой прямой.
- Если $a, b, c, d$ являются разными точками и имеется точка, лежащая одновременно на $ab$ и $cd$, то существует точка, лежащая одновременно на $ac$ и $bd$.

Для данного проективного пространства и множества $S$ точек в этом пространстве определим **накрытие** (span) $S$ как наименьшее множество $T$ точек, содержащее $S$, такое, что если $a$ и $b$ лежат в $T$, то в нём же лежат все остальные точки прямой $ab$. **Размерность** проективного пространства по определению на единицу меньше, чем минимальная мощность (cardinality) множества, которое охватывает (натягивает, to span) всё пространство. Читатель может с радостью убедиться, что двумерное проективное пространство – это то же самое, что и проективная плоскость [44].

Если $\mathbb{K}$ – произвольное поле, то существует $n$-мерное проективное пространство, называемое $\mathbb{KP}^n$, где точками являются прямые, проходящие через начало координат в $\mathbb{K}^{n+1}$, прямыми являются плоскости, проходящие через начало координат в $\mathbb{K}^{n+1}$, и отношением "лежать на" является включение. На самом деле, эта конструкция работает даже тогда, когда $\mathbb{K}$ является всего лишь **телом** (skew field): кольцом, таким что каждый ненулевой элемент имеет левый и правый обратный ему элемент относительно умножения. Необходимо всего лишь быть немного аккуратным при определении прямых и плоскостей, проходящих через начало координат в $\mathbb{K}^{n+1}$. Чтобы это проделать, мы обычным образом используем тот факт, что $\mathbb{K}^{n+1}$ есть $\mathbb{K}$-бимодуль. Мы полагаем, что прямой, проходящей через начало, является любое множество

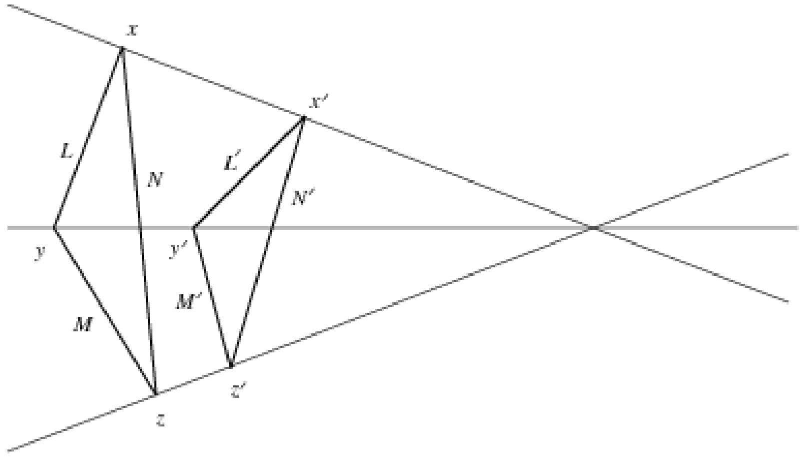
$$L = \{\alpha x : \ \alpha \in \mathbb{K}\},$$

где $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ – не нуль, и что плоскостью, проходящей через начало координат, является любое множество

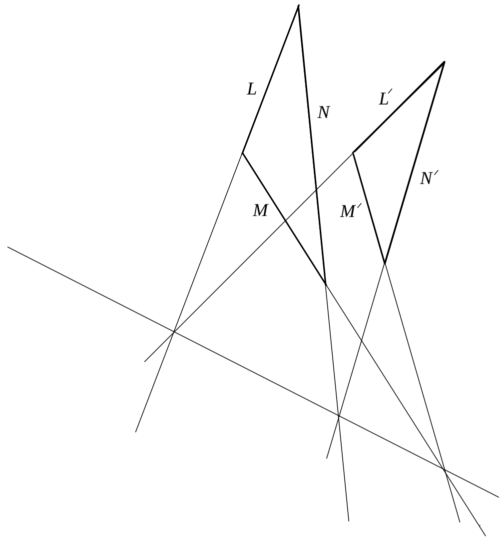
$$P = \{\alpha x + \beta y : \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\},$$

где $x, y \in \mathbb{K}^{n+1}$ – такие элементы, что из $\alpha x + \beta y = 0$ следует $\alpha, \beta = 0$.

Из данного примера возникает естественный вопрос, *любое* ли проективное $n$-мерное пространство представляет собой форму $\mathbb{KP}^n$ для некоторого тела $\mathbb{K}$. Ответ на этот вопрос весьма неожидан: да, но только если $n > 2$. Проективные плоскости являются более хитроумными (subtle) [91]. Проективная плоскость возникает из тела тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет дополнительной аксиоме, т. н. аксиоме Дезарга, которая заключается в следующем. Определим **треугольник** как тройку точек, которые не лежат все сразу на одной прямой. Теперь, предположим, мы имеем два треугольника $xyz$ и $x'y'z'$. Стороны каждого треугольника определяют три прямые скажем $LMN$ и $L'M'N'$. Иногда прямая через $x$ и $x'$, прямая через $y$ и $y'$, и прямая через $z$ и $z'$ будут все пересекаться в одной и той же точке:



**Аксиома Дезарга** утверждает, что всякий раз в таком случае имеет место ещё и следующее: пересечение $L$ и $L'$, пересечение $M$ и $M'$, и пересечение $N$ и $N'$ все лежат на одной прямой:




Эта аксиома автоматически выполняется для проективных пространств размерности 3 и более, но не для проективных плоскостей. Проективные плоскости, удовлетворяющее этой аксиоме, называются **дезарговыми**.

Аксиома Дезарга симпатична, но как она связана с телами? Предположим, мы начнём с проективной плоскости $P$ и попробуем восстановить из неё тело. Мы можем выбрать любую прямую $L$, выбрать на ней три различные точки, назвать их $0, 1$, и $\infty$, и положить $\mathbb{K} = L - \{\infty\}$. Копируя геометрические конструкции, которые работают для $P = \mathbb{RP}^2$, мы можем определить сложение и умножение точек на $\mathbb{K}$. Вообще говоря, полученная структура $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ не будет телом. Даже хуже, она будет зависеть от сделанного нами выбора нетривиальным образом. Однако, если мы примем аксиому Дезарга, эти проблемы исчезают. Мы таким образом получаем однозначное соответствие между классами изоморфизмов тел и классами изоморфизмов дезарговых проективных плоскостей.

Проективная геометрия была модной в 1800-х годах, когда в неё внесли значительный вклад такие знаменитости, как Понселе, Брайансон, Штайнер и фон Штаудт. Позже она была оставлена в тени другими формами геометрии. Однако, работа над этой темой продолжалась, и в 1933 Рут Муфанг сконструировала замечательный пример недезарговой проективной плоскости, используя октонионы [74]. Как мы увидим, эта проективная плоскость заслуживает наименования $\mathbb{OP}^2$.

Тридцатые годы XX столетия выявили другую причину интереса к проективной геометрии: квантовая механика! Квантовая механика мучительно отлична от классической ньютоновой механики, которую мы приучились любить. В классической механике, наблюдаемые величины описываются вещественнозначными функциями. В квантовой механике они часто описываются эрмитовыми $n \times n$ комплексными матрицами. В обоих случаях, наблюдаемые величины замкнуты относительно сложения и умножения на действительные скаляры. Однако, в квантовой механике наблюдаемые величины не образуют ассоциативной алгебры. Тем не менее, можно возводить наблюдаемые величины в степень и из операции возведения в квадрат можно сконструировать коммутативное, но не ассоциативное произведение:

$$a \circ b = \frac{1}{2}((a+b)^2 - a^2 - b^2) = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

В 1932 Паскаль Йордан попытался более глубоко понять эту ситуацию при помощи выделения минимального набора аксиом, которым должна удовлетворять "алгебра наблюдаемых величин" [57]. Он изобрёл определение того, что теперь называется **формально действительной йордановой алгеброй**: коммутативная и степенно-ассоциативная алгебра, удовлетворяющая

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_n = 0$$

для всех $n$. Последнее условие снабжает эту алгебру частичной упорядоченностью: если мы запишем $a \le b$, когда элемент $b - a$ является суммой квадратов, это значит, что из $a \le b$ и $b \le a$ следует $a = b$. Хотя это не очевидно, любая формально действительная йорданова алгебра удовлетворяет тождеству

$$a \circ (b \circ a^2) = (a \circ b) \circ a^2$$

для всех элементов $a$ и $b$. Любая коммутативная алгебра, удовлетворяющая этому тождеству, называется **йордановой алгеброй**. Йордановы алгебры автоматически обладают степенной ассоциативностью.

В 1934 Йордан опубликовал работу вместе с фон Нейманом и Вигнером, в которой дал классификацию всех формально действительных йордановых алгебр [59]. Эта классификация красива и лаконична. **Идеал** в Йордановой алгебре $A$ есть подпространство $B \subseteq A$ такое, что из $b \in B$ следует, что $a \circ b \in B$ для всех $a \in A$. Йорданова алгебра $A$ является **простой**, если её единственными идеалами являются $\{0\}$ и сама $A$. Любая формально действительная йорданова алгебра является прямой суммой простых алгебр. Простые формально действительные йордановы алгебры состоят из четырёх бесконечных семейств и одного исключения.

1. Алгебра $\mathfrak{h}_n(\mathbb{R})$ с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
2. Алгебра $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
3. Алгебра $\mathfrak{h}_n(\mathbb{H})$ с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
4. Алгебра $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ с произведением $(v, \alpha) \circ (w, \beta) = (\alpha w + \beta v, \langle v, w \rangle + \alpha\beta)$.
5. Алгебра $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Здесь мы говорим, что квадратная матрица с элементами из $*$-алгебры $A$ является **эрмитовой**, если она равна своей сопряжённой транспонированной, и что $\mathfrak{h}_n(A)$ обозначает эрмитовы $n \times n$ матрицы с элементами из $A$. Йордановы алгебры четвертого семейства называются **спиновыми факторами** (spin factors), в то время как $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ называется **исключительной йордановой алгеброй**. Эта классификация поднимает ряд очевидных вопросов. Почему природа предпочитает йордановы алгебры $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ всем остальным? И так ли это? Могли бы другие йордановы алгебры – даже исключительная алгебра – играть какую-то роль в квантовой физике? Несмотря на многие исследования, ответов на эти вопросы нет до сих пор.

Кажется, на статью Йордана вместе с фон Нейманом и Вигнером не оказало никакого влияния открытие Муфанг $\mathbb{OP}^2$, но на самом деле они взаимосвязаны. **Проецирование** (проекция, projection) в формально действительной йордановой алгебре определяется как элемент $p$ с $p^2 = p$. В знакомом случае $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$, они соответствуют эрмитовым матрицам с собственными значениями 0 и 1, так что они используются для описания наблюдаемых величин, которые принимают только два значения – например, "истина" и "ложь". Это предполагает трактовку проецирований в формально действительной йордановой алгебре как высказываний (propositions) в своего рода "квантовой логике". Частичная упорядоченность помогает это сделать: для данных проекций $p$ и $q$ говорят, что из $p$ следует $q$, если $p \le q$.

Соотношение между йордановыми алгебрами и квантовой логикой уже интересно [34], но настоящая радость (fun) начинается, когда мы заметим, что проекции в $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ соответствуют подпространствам $\mathbb{C}^n$. Это устанавливает взаимосвязь с проективной геометрией [98], поскольку проекции на 1-мерные подпространства соответствуют точкам в $\mathbb{CP}^n$, в то время как проекции на 2-мерные подпространства соответствуют прямым. Даже лучше, можно вычислить размерность подпространства $V \subseteq \mathbb{C}^n$ из соответствующего проецирования $p\colon \mathbb{C}^n \to V$, используя только частичный порядок в проецированиях: $V$ имеет размерность $d$, если и только если (iff) наидлиннейшая цепь различающихся проецирований

$$0 = p_0 < \cdots < p_i = p$$

имеет длину $i = d$. На деле, это можно использовать в качестве определения **ранга** проецирования в любой формально действительной йордановой алгебре. Мы можем тогда попытаться сконструировать проективное пространство, точками которого являются проекции ранга-1, а прямыми – проекции ранга-2, с отношением "лежать на", задаваемым частичной упорядоченностью $\leq$.

Если мы попытаемся сделать это, начиная с $\mathfrak{h}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{h}_n(\mathbb{H})$, мы добьемся успеха, если $n \geq 2$, и мы получим проективные пространства $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$ и $\mathbb{HP}^n$ соответственно. Если мы попробуем сделать это, начиная со спиновых факторов $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$, у нас получится, если $n \geq 2$, и мы получим ряд одномерных проективных пространств, относящихся к лоренцевой геометрии. Наконец, в 1949 году Йордан [58] открыл, что если мы попробуем эту конструкцию начиная с исключительной йордановой алгебры, мы получим проективную плоскость, открытую Муфанг: $\mathbb{OP}^2$.

В дальнейшем мы опишем октонионную проективную плоскость и исключительную йорданову алгебру более детально. Но сначала рассмотрим октонионную проективную прямую и йорданову алгебру $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$.

### 3.1 Проективные прямые

Одномерное проективное пространство называется **проективной прямой**. Проективные прямые не очень интересны с точки зрения аксиоматической проективной геометрии, поскольку они имеют только одну прямую, на которой лежат все точки. Тем не менее, они могут быть интересны с точки зрения геометрии и топологии. Это в особенности верно для октонионной проективной прямой. Как мы увидим, это пространство имеет глубокую связь с периодичностью Ботта, а также с лоренцевой геометрией 10-мерного пространства-времени.

Предположим, что $\mathbb{K}$ – нормированная алгебра с делением. Мы уже определили $\mathbb{KP}^1$, когда $\mathbb{K}$ ассоциативна, но это определение плохо работает для октонионов: разумнее будет обходной путь через йордановы алгебры. Пусть $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ – пространство $2 \times 2$ эрмитовых матриц с элементами из $\mathbb{K}$. Легко проверить, что оно становится йордановой алгеброй с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Мы можем попытаться построить проективное пространство из этой йордановой алгебры, используя конструкцию предыдущего раздела. Чтобы увидеть, удастся ли это, нам нужно изучить проекции в $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$. Небольшое вычисление показывает, что кроме тривиальных проекций 0 и 1, все они имеют форму

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{pmatrix},$$

где $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ имеет

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1.$$

Все эти нетривиальные проекции имеют ранг 1, так что они являются точками нашего предполагаемого проективного пространства. Наше предполагаемое проективное пространство имеет только одну прямую, соответствующую проекции 1, и все точки лежат на этой прямой. Легко проверить, что аксиомы проективного пространства соблюдаются. Поскольку это проективное пространство одномерно, мы успешно создали **проективную прямую над** $\mathbb{K}$. Мы называем множество точек этой проективной прямой $\mathbb{KP}^1$.

Для произвольного ненулевого элемента $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, мы можем нормировать его и затем использовать вышеприведённую формулу, чтобы получить точку в $\mathbb{KP}^1$, которую мы называем $[(x, y)]$. Это позволяет нам описать $\mathbb{KP}^1$ в терминах прямых, проходящих через начало координат, как следует далее. Определим отношение эквивалентности ненулевых элементов $\mathbb{K}^2$ посредством

$$(x, y) \sim (x', y') \iff [(x, y)] = [(x', y')].$$

Мы называем класс эквивалентности по этому отношению **прямой, проходящей через начало координат** в $\mathbb{K}^2$. Мы можем теперь отождествить точки в $\mathbb{KP}^1$ с прямыми, проходящими через начало координат в $\mathbb{K}^2$.

Будьте осторожны: $\mathbb{K}$ – октонионы, если прямая, проходящая через начало координат, содержащая $(x, y)$ не всегда равна

$$\{(\alpha x, \alpha y) : \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Это верно лишь тогда, когда $\mathbb{K}$ ассоциативно, или когда $x$ или $y$ равны 1. К счастью, $(x, y) \sim (y^{-1}x, 1)$ когда $y \neq 0$ и $(x, y) \sim (1, x^{-1}y)$ когда $x \neq 0$. Таким образом, в обоих случаях мы получаем конкретное описание прямой, проходящей через начало координат и содержащей $(x, y)$: когда $x \neq 0$, она равна

$$\{(\alpha(y^{-1}x), \alpha) : \alpha \in \mathbb{K}\},$$

и когда $y \neq 0$, она равна

$$\{(\alpha, \alpha(x^{-1}y) : \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

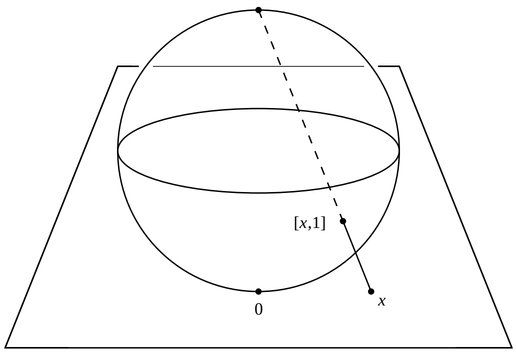
В частности, прямая, проходящая через начало координат и содержащая $(x, y)$, всегда является действительным векторным пространством, изоморфным $\mathbb{K}$.

Мы можем превратить $\mathbb{KP}^1$ в многообразие следующим образом. С помощью вышеизложенных наблюдений, мы можем покрыть его двумя координатными сетками: одна, содержащая все точки вида $[(x, 1)]$, и другая, содержащая все точки вида $[(1, y)]$. Легко проверить, что $[(x, 1)] = [(1, y)]$ если и только если $y = x^{-1}$, так что функция перехода от первых координат ко вторым есть отображение $x \mapsto x^{-1}$. Поскольку эта функция перехода и обратная к ней являются гладкими на пересечении двух систем координат, $\mathbb{KP}^1$ становится гладким многообразием.

Размышляя о геометрии проективных прямых, удобно визуализировать комплексный случай, поскольку $\mathbb{CP}^1$ – просто хорошо знакомая "риманова сфера". В этом случае отображение

$$x \mapsto [(x, 1)]$$

задается стереографической проекцией:




где выбрана сфера единичного диаметра. Это отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{CP}^1$ является взаимно однозначным почти везде за исключением единственной точки на бесконечности, т. е. "северного полюса". Подобным образом, отображение

$$y \mapsto [(1, y)]$$

не определено для южного полюса. Соединяя первое отображение с обратным ко второму, мы получаем отображение $x \mapsto x^{-1}$, которое носит название "конформной инверсии". Южное полушарие римановой сферы состоит из всех точек $[(x, 1)]$ с $\|x\| \leq 1$, в то время как северное полушарие состоит из всех $[(1, y)]$ с $\|y\| \leq 1$. Единичные комплексные числа $x$ дают точки $[(x, 1)] = [(1, x^{-1})]$ на экваторе.

Все эти идеи безболезненно обобщаются на $\mathbb{KP}^1$ для любой нормированной алгебры с делением $\mathbb{K}$. Прежде всего, как гладкое многообразие $\mathbb{KP}^1$ является просто сферой с размерностью, равной размерности $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^1 &\cong S^1 \\ \mathbb{CP}^1 &\cong S^2 \\ \mathbb{HP}^1 &\cong S^4 \\ \mathbb{OP}^1 &\cong S^8. \end{aligned}$$

Мы можем считать ее одноточечной компактификацией (one-point compactification) $\mathbb{K}$. "Южное полушарие", "северное полушарие" и "экватор" $\mathbb{K}$ описываются точно так же, как это было сделано выше для комплексного случая. Также, как и в комплексном случае, отображения $x \mapsto [(x,1)]$ и $y \mapsto [(1,y)]$ сохраняют углы по отношению к обычной евклидовой метрике на $\mathbb{K}$ и к круговой метрике на сфере.

Одной из приятных особенностей $\mathbb{KP}^1$ является то, что она изначально снабжена векторным расслоением (vector bundle), слой (fiber) которого над точкой $[(x,y)]$ является прямой, проходящей через начало координат и соответствующей этой точке. Это расслоение называется **каноническим линейным расслоением** (canonical line bundle), $L_{\mathbb{K}}$. Разумеется, когда мы имеем дело с конкретной алгеброй с делением, "прямая" означает копию этой алгебры с делением, так что если мы считаем их вещественными векторными расслоениями, $L_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{H}}$ и $L_{\mathbb{O}}$ имеют размерности $1, 2, 4$ и $8$, соответственно.

Эти расслоения играют важную роль в топологии, так что лучше понимать их несколькими различными способами. Вообще, любое $k$-мерное вещественное векторное расслоение над $S^n$ может быть сформировано, если взять тривиальные расслоения над северным и южным полушарием и склеить их вместе по экватору посредством отображения $f\colon S^{n-1} \to \mathrm{O}(k)$. Следовательно, необходимо иметь возможность построить канонические линейные расслоения $L_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{H}}$ и $L_{\mathbb{O}}$, используя отображения

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{R}}\colon\ S^0 &\to \mathrm{O}(1) \\ f_{\mathbb{C}}\colon\ S^1 &\to \mathrm{O}(2) \\ f_{\mathbb{H}}\colon\ S^3 &\to \mathrm{O}(4) \\ f_{\mathbb{O}}\colon\ S^7 &\to \mathrm{O}(8). \end{aligned}$$

Что представляют собой эти отображения? Мы можем описать их всех одновременно. Предположим, что $\mathbb{K}$ является нормированной алгеброй с делением размерности $n$. В южном полушарии $\mathbb{KP}^1$ мы можем отождествить любой слой $L_{\mathbb{K}}$ с $\mathbb{K}$ посредстовм отображения точки $(\alpha x, \alpha)$ на прямой $[(x,1)]$ в элемент $\alpha \in \mathbb{K}$. Это тривиализирует каноническое линейное расслоение над южным полушарием. Аналогично, мы можем тривиализовать это расслоение над северным полушарием посредством отображения точки $(\beta, \beta y)$ на прямой $[(1,y)]$ в элемент $\beta \in \mathbb{K}$. Если $x \in \mathbb{K}$ имеет норму 1, то $[(x,1)] = [(1,x^{-1})]$ является точкой экватора, так что мы получаем две тривиализации слоя над этой точкой. Они связаны следующим образом: если $(\alpha x, \alpha) = (\beta, \beta x^{-1})$, то $\beta = \alpha x$. Отображение $\alpha \mapsto \beta$ таким образом является правым умножением на $x$. Вкратце,

$$f_{\mathbb{K}}\colon S^{n-1} \to \mathrm{O}(n)$$

есть просто отображение, отсылающее любой элемент единичной нормы $x \in \mathbb{K}$ на операцию правого умножения на $x$.

Важность отображения $f_{\mathbb{K}}$ становится наиболее ясной, если мы составим индуктивный предел групп $\mathrm{O}(n)$, используя очевидные включения $\mathrm{O}(n) \hookrightarrow \mathrm{O}(n+1)$, при этом получается топологическая группа, называемая $\mathrm{O}(\infty)$. Поскольку $\mathrm{O}(n)$ включена в $\mathrm{O}(\infty)$, мы можем считать $f_{\mathbb{K}}$ отображением из $S^{n-1}$ в $\mathrm{O}(\infty)$. Его гомотопический класс $[f_{\mathbb{K}}]$ имеет следующее изумительное свойство, упомянутое во Введении:

- $[f_{\mathbb{R}}]$ порождает $\pi_0(\mathrm{O}(\infty)) \cong \mathbb{Z}_2$.
- $[f_{\mathbb{C}}]$ порождает $\pi_1(\mathrm{O}(\infty)) \cong \mathbb{Z}$.
- $[f_{\mathbb{H}}]$ порождает $\pi_3(\mathrm{O}(\infty)) \cong \mathbb{Z}$.
- $[f_{\mathbb{O}}]$ порождает $\pi_7(\mathrm{O}(\infty)) \cong \mathbb{Z}$.

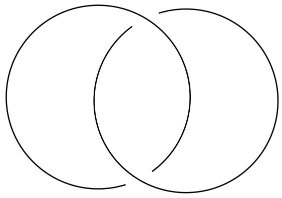
Другой хороший вид на канонические линейные расслоения $L_{\mathbb{K}}$ исходит из взгляда на их расслоения единичных сфер. Любой слой $L_{\mathbb{K}}$ естественным образом является пространством со скалярным произведением, поскольку он является прямой, проходящей через начало координат в $\mathbb{K}^2$. Если взять единичную сферу в каждом слое, мы получим расслоение $(n-1)$-сфер над $\mathbb{KP}^1$, называемое **расслоением Хопфа** (Hopf bundle):

$$p_{\mathbb{K}}\colon E_{\mathbb{K}} \to \mathbb{KP}^1$$

Проекция $p_{\mathbb{K}}$ называется **отображением Хопфа** (Hopf map). Полное пространство $E_{\mathbb{K}}$ состоит из всех единичных векторов в $\mathbb{K}^2$, так что оно является сферой размерности $2n-1$. Вкратце, расслоения Хопфа выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{llll} \mathbb{K}=\mathbb{R}: & S^0 \hookrightarrow & S^1 & \to S^1 \\ \mathbb{K}=\mathbb{C}: & S^1 \hookrightarrow & S^3 & \to S^2 \\ \mathbb{K}=\mathbb{H}: & S^3 \hookrightarrow & S^7 & \to S^4 \\ \mathbb{K}=\mathbb{O}: & S^7 \hookrightarrow & S^{15} & \to S^8 \end{array}$$

Можно лучше понять отображения Хопфа, рассматривая образы инверсии (inverse image) точек. Образ инверсии $p_{\mathbb{K}}^{-1}(x)$ любой точки $x \in S^n$ есть $(n-1)$-сфера в $S^{2n-1}$; образ инверсии любой пары различающихся точек есть пара связанных сфер этого типа. Когда $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ мы получаем связанные окружности в $S^3$, которые образуют знаменитое **сцепление Хопфа** (Hopf link):



Когда $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, мы получаем пару связанных 7-сфер в $S^{15}$.

Для количественной характеристики такого понятия связи можно использовать "инварианты Хопфа". Предположим на время, что $n$ – любое натуральное число, большее единицы, и пусть $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ – любое гладкое отображение. Если $\omega$ – нормализованная форма объёма на $S^n$, то $f^*\omega$ является замкнутой $n$-формой на $S^{2n-1}$. Поскольку $n$-ая когомология $S^{2n-1}$ обращается в нуль, $f^*\omega = d\alpha$ для некоторой $(n-1)$-формы $\alpha$. Определим **инвариант Хопфа** для $f$ как число

$$H(f) = \int_{S^{2n-1}} \alpha \wedge d\alpha.$$

Легко видеть, что оно инвариантно относительно гладких гомотопий отображения $f$.

Чтобы видеть, как инвариант Хопфа связан с сцеплением (linking), можно вычислить его, используя гомологию, а не когомологию. Если взять любые два регулярных значения $f$, скажем $x$ и $y$, инверсные образы этих точек являются компактными ориентированными $(n-1)$-мерными подмногообразиями $S^{2n-1}$. Мы всегда можем найти ориентированное $n$-мерное подмногообразие $X \subset S^{2n-1}$, которое имеет границу, равную $f^{-1}(x)$ и пересекает $f^{-1}(y)$ трансверсально (поперек). Размерности $X$ и $f^{-1}(y)$ добавляются к $2n-1$, так что их индекс пересечения (intersection number) хорошо определен. В силу двойственности между гомологией и когомологией, этот индекс равен инварианту Хопфа $H(f)$. Это показывает, что инвариант Хопфа – целое число. Более того, это показывает, что когда инвариант Хопфа не равен нулю, инверсные образы $x$ и $y$ сцеплены (linked).

Используя любой из этих подходов, можно вычислить инвариант Хопфа для $p_{\mathbb{C}}$, $p_{\mathbb{H}}$ и $p_{\mathbb{O}}$. Оказывается, что для них всех инвариант Хопфа равен единице. Отсюда, например, следует, что обратные образы неодинаковых точек под $p_{\mathbb{O}}$ являются нетривиально сцепленными 7-сферами в $S^{15}$. Из этого также следует, что $p_{\mathbb{C}}$, $p_{\mathbb{H}}$ и $p_{\mathbb{O}}$ дают нетривиальные элементы $\pi_{2n-1}(S^n)$ для $n = 2, 4$ и 8. На самом деле, эти элементы порождают свободную от кручения часть $\pi_{2n-1}(S^n)$.

Глубокое исследование инварианта Хопфа является одним из способов доказать, что любая алгебра с делением должна иметь размерность $1, 2, 4$ или 8. Можно показать, что если существует $n$-мерная алгебра с делением, то $S^{n-1}$ должна быть **параллелизуемой**: она должна допускать $n-1$ поточечно линейно независимых гладких векторных полей. Можно также показать, что для $n > 1$ $S^{n-1}$ параллелизуемо, если (и только если) существует отображение $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ с $H(f) = 1$ [3, 11, 62]. Жёсткая часть показывает, что отображение из $S^{2n-1}$ в $S^n$ может иметь инвариант Хопфа, равный единице, только если $n = 2, 4$, или 8. Это было доказано Адамсом приблизительно в 1958 г. [1].

### 3.2 $\mathbb{OP}^1$ и периодичность Ботта

Мы уже касались периодичности Ботта, когда мы упоминали, что клиффордова алгебра $\mathrm{Cliff}_{n+8}$ изоморфна алгебре $16 \times 16$ матриц с элементами, лежащими в $\mathrm{Cliff}_n$. Это только одно из многих взаимосвязанных "8-периодических" явлений, которые известны под названием периодичности Ботта. Появление числа 8 здесь не является совпадением: все эти явления связаны с октонионами! Поскольку этот изумительный факт в какой-то мере недооценивается, по-видимому стоит немного рассказать о нём. Здесь мы сконцентрируемся на тех аспектах, которые связаны с $\mathbb{OP}^1$ и каноническим октонионным линейным расслоением над этим пространством.

Начнём с К-теории. Это – способ получения информации о топологическом пространстве, исследуя векторные расслоения над ним. Если в этом пространство имеются дыры, то будут нетривиальные векторные расслоения, которые перекручиваются при обходе вокруг дыр. Простейшим примером является расслоение "лента Мёбиуса" над $S^1$, одномерное вещественное векторное расслоение, которое имеет $180°$ перекрут (twist) при обходе по кругу. На самом деле, это просто каноническое линейное расслоение $L_{\mathbb{R}}$. Канонические линейные расслоения $L_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{H}}$ и $L_{\mathbb{O}}$ предоставляют более высоко-размерные аналоги этого примера.

К-теория учит исследовать векторные расслоения над топологическим пространством $X$ с помощью построения абелевой группы следующим образом. Прежде всего, возьмём множество, состоящее изо всех классов изоморфизмов вещественных векторных расслоений над $X$. Возможность вычисления прямых сумм векторных расслоений обеспечивает это множество операцией "сложения", тем самым превращая его в коммутативный моноид. Далее, формально присоединим ко всем элементам этого множества "обратные элементы по сложению"(additive inverses), получив абелеву группу. Эта группа называется $KO(X)$, **вещественной К-теорией** для $X$. Можно было бы начать с комплексных векторных расслоений и получить группу, называемую $K(X)$, но здесь мы будем интересоваться вещественными векторными расслоениями.

Любое вещественное векторное расслоение $E$ над $X$ даёт элемент $[E] \in KO(X)$, и эти элементы порождают данную группу. Если мы выберем точку в $X$, имеется очевидный гомоморфизм $\dim\colon KO(X) \to \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие $[E]$ размерность слоя $E$ в этой точке. Поскольку эта размерность является весьма очевидным и скучным инвариантом векторных расслоений, лучше иметь дело с ядром этого гомоморфизма, которое называется **редуцированной** вещественной К-теорией $X$ и обозначается $\widetilde{KO}(X)$. Это инвариант пунктированных пространств (pointed spaces), т. е. пространств, снабжённых выделенной точкой, или **базисной точкой**.

Любая сфера становится пунктированным пространством, если мы мы выберем северный полюс базисной точкой. Редуцированная действительная К-теория первых восьми сфер выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{KO}(S^1) &\cong \mathbb{Z}_2 \\
\widetilde{KO}(S^2) &\cong \mathbb{Z}_2 \\
\widetilde{KO}(S^3) &\cong 0 \\
\widetilde{KO}(S^4) &\cong \mathbb{Z} \\
\widetilde{KO}(S^5) &\cong 0 \\
\widetilde{KO}(S^6) &\cong 0 \\
\widetilde{KO}(S^7) &\cong 0 \\
\widetilde{KO}(S^8) &\cong \mathbb{Z}
\end{aligned}
\qquad \text{где, как можно догадаться,} \qquad
\begin{array}{lll}
[L_{\mathbb{R}}] & \text{порождает} & \widetilde{KO}(S^1). \\
[L_{\mathbb{C}}] & \text{порождает} & \widetilde{KO}(S^2). \\
[L_{\mathbb{H}}] & \text{порождает} & \widetilde{KO}(S^4). \\
[L_{\mathbb{O}}] & \text{порождает} & \widetilde{KO}(S^8).
\end{array}
$$

Как упоминалось в предыдущем разделе, можно построить любое $k$-мерное вещественное векторное расслоение над $S^n$, используя отображение $f\colon S^{n-1} \to \mathrm{O}(k)$. На самом деле, классы изоморфизмов таких расслоений представляют собой взаимно однозначное соответствие с классами гомотопий таких отображений. Более того, два таких расслоения определяют один и тот же элемент $\widetilde{KO}(X)$ тогда и только тогда, когда соответствующие отображения становятся гомотопически эквивалентными после объединения их с включениями $\mathrm{O}(k) \hookrightarrow \mathrm{O}(\infty)$, где $\mathrm{O}(\infty)$ есть прямой предел групп $\mathrm{O}(k)$. Следовательно,

$$\widetilde{KO}(S^n) \cong \pi_{n-1}(\mathrm{O}(\infty)).$$

Из этого факта следует список групп гомотопий $\mathrm{O}(\infty)$, которые появляются во Введении. Это также значит, что для доказательства периодичности Ботта для следующих групп гомотопий

$$\pi_{i+8}(\mathrm{O}(\infty)) \cong \pi_i(\mathrm{O}(\infty)),$$

достаточно доказать периодичность Ботта для вещественной K-теории.

$$\widetilde{KO}(S^{n+8}) \cong \widetilde{KO}(S^n).$$

Почему периодичность Ботта присутствует в вещественной K-теории? Оказывается, что существует градуированное кольцо $KO$ с

$$KO_n = \widetilde{KO}(S^n).$$

Произведение в этом кольце возникает из возможности вычислять "скрещенные произведения" (smash products) сфер и также вещественных векторных расслоений над этими сферами. Умножение на $[L_{\mathbb{O}}]$ даёт изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{KO}(S^n) & \to & \widetilde{KO}(S^{n+8}) \\ x & \mapsto & [L_{\mathbb{O}}]\, x \end{array}$$

Другими словами, каноническое октонионное линейное расслоение над $\mathbb{OP}^1$ порождает периодичность Ботта!

Можно гораздо больше сказать об этом факте и о том, как он связан с периодичностью Ботта клиффордовых алгебр, но это, увы, уведет нас слишком далеко от темы. Мы рекомендуем заинтересованному читателю обратиться к какому-нибудь начальному руководству по K-теории, например, к работе Дейла Хьюзмоллера [56]. К сожалению, все известные мне книги умаляют роль октонионов. Чтобы выявить её, надо иметь в виду связь между октонионами и клиффордовыми алгебрами, которое обсуждалось выше в разделе 2.3.

### 3.3 $\mathbb{OP}^1$ и лоренцева геометрия

В разделе 3.1 мы наметили систематический подход к проективным прямым над нормированными алгебрами с делением. Самый знаменитый пример – это сфера Римана $\mathbb{CP}^1$. Как подчеркивал Пенроуз, [77], это пространство имеет замечательную взаимосвязь с лоренцевой геометрией – другими словами, со специальной теорией относительности. Все конформные преобразования Римановой сферы возникают из дробных линейных преобразований

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Легко видеть, что группа таких преобразований изоморфна $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$: $2\times 2$ комплексных матриц с определителем, равным 1, по модулю скалярных кратных единицы. Менее очевидно, что она также изоморфна группе Лоренца $\mathrm{SO}_0(3, 1)$: единичной компоненте[2] группы линейных преобразований $\mathbb{R}^4$, которая сохраняет метрику Минковского

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4.$$

Этот факт имеет красивое объяснение в понятиях "небесной сферы". Математически, это 2-сфера, состоящая из всех прямых вида $\{\alpha x\}$, где $x \in \mathbb{R}^4$ имеет $x \cdot x = 0$. В частной теории относительности такие прямые представляют световые лучи, так что небесная сфера – это сфера, на которой как будто лежат звезды, когда вы смотрите на ночное небо. Эта сфера наследует конформную структуру от метрики Минковского на $\mathbb{R}^4$. Это даёт возможность отождествить небесную сферу с $\mathbb{CP}^1$, из чего следует, что группа Лоренца действует как группа конформных преобразований $\mathbb{CP}^1$. Более конкретно это значит, что если вы проноситесь мимо Земли со

[2] identity component, имеется в виду подгруппа с единичным детерминантом.

скоростью, близкой к скорости света, то созвездия на небе будут искажены, но все *углы* будут сохранены.

На самом деле, эти результаты не ограничиваются комплексным случаем: те же идеи столь же хорошо работают для других нормированных алгебр с делением! Алгебры $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ связаны с лоренцевой геометрией в размерностях 3, 4, 6 и 10, соответственно [68–70, 85, 93]. Даже лучше, полное объяснение этого факта приводит к новым взаимоотношениям между нормированными алгебрами с делением и спинорами. В последующем мы объясним, как это работает для всех четырёх нормированных алгебр с делением, уделив особое внимание особенностям октонионного случая.

Чтобы заложить основу, прежде всего вспомним наиболее таинственный из всех четырёх бесконечных рядов йордановых алгебр, перечисленных в начале раздела 3: спиновые множители (spin factors). Мы описали их довольно конкретно, но более абстрактный подход выявляет их родство (kinship) с клиффордовыми алгебрами. Для данного $n$-мерного действительного пространства $V$ со скалярным произведением, примем, что **спиновые множители** $\mathrm{J}(V)$ – йорданова алгебра, свободно порождённая $V$ по модулю отношений

$$v^2 = \|v\|^2.$$

Поляризуя и применяя закон коммутативности, получим

$$v \circ w = \langle v, w \rangle,$$

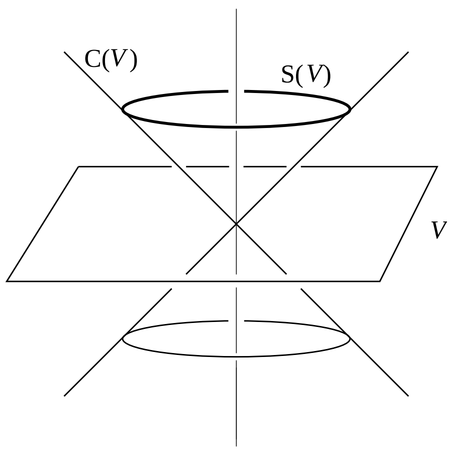
так что $\mathrm{J}(V)$ изоморфно $V \oplus \mathbb{R}$ с произведением

$$(v, \alpha) \circ (w, \beta) = (\alpha w + \beta v, \langle v, w \rangle + \alpha\beta).$$

Хотя йордановы алгебры были изобретены для квантовомеханических исследований, спиновые множители также глубоко связаны с частной теорией относительности. Мы можем считать $\mathrm{J}(V) \cong V \oplus \mathbb{R}$ за **пространство-время Минковского**, с пространством $V$ и временем $\mathbb{R}$. Причина этого в том, что $\mathrm{J}(V)$ естественным образом наделяется симметричной билинейной формой сигнатуры $(n, 1)$, **метрикой Минковского**:

$$(v, \alpha) \cdot (w, \beta) = \langle v, w \rangle - \alpha\beta.$$

Группа линейных преобразований, сохраняющих метрику Минковского, называется $\mathrm{O}(n, 1)$, а её единичная компонента называется **группой Лоренца** $\mathrm{SO}_0(n, 1)$. Мы определяем **световой конус** $\mathrm{C}(V)$ как совокупность всех ненулевых $x \in \mathrm{J}(V)$ с $x \cdot x = 0$. Одномерное подпространство $\mathrm{J}(V)$, порожденное (spanned) элементом светового конуса, называется **световым лучом**, а пространство всех световых лучей называется **небесной сферой** $\mathrm{S}(V)$. Мы можем отождествить небесную сферу с единичной сферой в $V$, поскольку каждый световой луч порождён элементом вида $(v, 1)$, где $v \in V$ имеет норму, равную единице. Здесь дано изображение светового конуса и небесной сферы, когда $V$ двумерно:



Когда $V$ как минимум двумерно, можно построить проективное пространство из йордановой алгебры $\mathrm{J}(V)$. Результат является ничем иным, как небесной сферой! Чтобы убедиться в этом, заметим, что в стороне от элементов 0 и 1 все проекции в $\mathrm{J}(V)$ имеют вид $p = \frac{1}{2}(v, 1)$, где норма $v \in V$ равна единице. Они являются точками нашего проективного пространства, но как мы уже видели, они также соответствуют точкам небесной сферы. Наше проективное пространство имеет лишь одну линию, соответствующую проекции $1 \in \mathrm{J}(V)$. Можно визуализировать эту линию, как и саму небесную сферу.

Как всё это связано с нормированными алгебрами с делением? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим нормированную алгебру с делением $\mathbb{K}$ размерности $n$. Тогда йорданова алгебра $h_2(\mathbb{K})$ скрытым образом является также спиновым множителем! Существует изоморфизм

$$\phi\colon \mathfrak{h}_2(\mathbb{K}) \to J(\mathbb{K} \oplus \mathbb{R}) \cong \mathbb{K} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

заданный соотношением

$$\phi \begin{pmatrix} \alpha + \beta & x \\ x^* & \alpha - \beta \end{pmatrix} = (x, \beta, \alpha), \qquad x \in \mathbb{K},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Более того, определитель матриц из $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ хорошо определён даже тогда, когда $\mathbb{K}$ не коммутативна или не ассоциативна:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha + \beta & x \\ x^* & \alpha - \beta \end{pmatrix} = \alpha^2 - \beta^2 - \|x\|^2,$$

и мы, очевидно, имеем

$$\det(a) = -\phi(a) \cdot \phi(a)$$

для всех $a \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$.

Эти факты имеют целый ряд замечательных следствий. Прежде всего, поскольку йордановы алгебры $\mathrm{J}(\mathbb{K}\oplus\mathbb{R})$ и $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ изоморфны, также изоморфны и ассоциированные с ними проективные пространства. Мы уже видели, что первое пространство является небесной сферой $\mathrm{S}(\mathbb{K} \oplus \mathbb{R})$, и что последнее пространство есть $\mathbb{KP}^1$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{KP}^1 \cong \mathrm{S}(\mathbb{K} \oplus \mathbb{R}).$$

Это даёт другое доказательство того, что мы уже видели в разделе 3.1: $\mathbb{KP}^1$ является $n$-сферой. Но отсюда следует большее. Лоренцева группа $\mathrm{SO}_0(n+1, 1)$ имеет очевидное действие на небесной сфере, и обычная конформная структура на сфере инвариантна относительно этого действия. Используя вышеприведенный изоморфизм, мы можем естественным образом перенести групповое действие и инвариантную конформную структуру на $\mathbb{KP}^1$.

Во-вторых, отсюда следует, что сохраняющие определитель линейные преобразования $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ образуют группу, изоморфную $\mathrm{O}(n+1, 1)$. Как мы можем найти какие-нибудь преобразования такого типа? Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, это легко: когда $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ и $x \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{R})$, мы снова имеем $gxg^* \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{R})$ и

$$\det(gxg^*) = \det(x).$$

Это даёт гомоморфизм из $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ в $\mathrm{O}(2, 1)$. Этот гомоморфизм переводит два элемента в один, поскольку и $g = 1$, и $g = -1$ действуют тривиально, и отображает $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ на единичную компоненту $\mathrm{O}(2, 1)$. Отсюда следует, что $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ является двойным накрытием $\mathrm{SO}_0(2, 1)$. Точно такая же конструкция работает для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, так что $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ является двойным накрытием $\mathrm{SO}_0(3, 1)$.

Для двух других нормированных алгебр с делением вышеприведённые вычисления с определителями не проходят, и даже определение группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ становится весьма хитрым, так что мы начинаем с рассуждений на уровне алгебр Ли. Мы говорим, что $m \times m$ матрица с элементами из нормированной алгебры с делением $\mathbb{K}$ **бесследова**, если сумма её диагональных элементов равна нулю. Любая такая бесследовая матрица действует как действительный линейный оператор на $\mathbb{K}^m$. Когда $\mathbb{K}$ коммутативна или ассоциативна, пространство операторов, возникающее из $m \times m$ бесследовых матриц с элементами из $\mathbb{K}$, замкнуто относительно коммутаторов, а в противном случае – нет. Поэтому определим $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ как алгебру Ли $\mathbb{K}^m$, *порождённую* операторами этого вида. Эта алгебра Ли, в свою очередь, порождает группу Ли действительных линейных операторов на $\mathbb{K}^m$, называемую $\mathrm{SL}(m, \mathbb{K})$. Заметим, что умножение в этой группе задано композицией действительных линейных операторов, которая ассоциативна даже для $\mathbb{K} = \mathbb{O}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ изначально возникает с представлением: её **фундаментальным представлением** как действительных линейных операторов на $\mathbb{K}^m$, заданных соотношением

$$a\colon\ x \mapsto ax, \qquad\qquad x \in \mathbb{K}^m$$

всякий раз, когда $a \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ реально соответствует бесследовой $m \times m$ матрице с элементами из $\mathbb{K}$. Тензорируя (tensoring) фундаментальное представление с дуальным к нему, мы получаем представление $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ на пространстве матриц $\mathbb{K}[m]$, заданных соотношением

$$a\colon\ x \mapsto ax + xa^*, \qquad\qquad x \in \mathbb{K}[m]$$

всякий раз, когда $a$ является бесследовой матрицей с элементами из $\mathbb{K}$. Поскольку $ax+xa^*$ эрмитова всякий раз, когда эрмитова $x$, это представление ограничивается представлением $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ на $\mathfrak{h}_m(\mathbb{K})$. Оно в свою очередь может быть возведено в экспоненту, чтобы получить представление группы $\mathrm{SL}(m, \mathbb{K})$ на $\mathfrak{h}_m(\mathbb{K})$.

Теперь вернёмся к случаю $m = 2$. Можно показать, что представление $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ на $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ сохраняет определитель, просто проверив, что

$$\frac{d}{dt} \det(x + t(ax + xa^*)) \Big|_{t=0} = 0$$

когда $x$ лежит в $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ и $a \in \mathbb{K}[2]$ бесследова. Здесь ключевой момент – удостовериться, что вычисления не испорчены некоммутативностью или неассоциативностью. Отсюда следует, что имеется гомоморфизм

$$\alpha_{\mathbb{K}}\colon\ \mathrm{SL}(2, \mathbb{K}) \to \mathrm{SO}_0(n+1, 1).$$

Можно проверить, что это – гомоморфизм на, и его ядро состоит из матриц $\pm 1$. Таким образом, если мы определим

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{K}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K})/\{\pm 1\},$$

то получим изоморфизмы

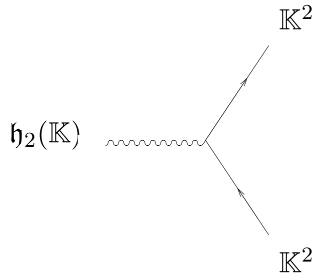
$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) &\cong \mathrm{SO}_0(2, 1) \\ \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) &\cong \mathrm{SO}_0(3, 1) \\ \mathrm{PSL}(2, \mathbb{H}) &\cong \mathrm{SO}_0(6, 1) \\ \mathrm{PSL}(2, \mathbb{O}) &\cong \mathrm{SO}_0(9, 1). \end{aligned}$$

Объединяя это вместе с нашими предыдущими рассуждениями, получим, что $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{K})$ действует как конформные преобразования $\mathbb{KP}^1$.

В заключение несколько слов о том, как всё это связано со спинорами. Аппарат клиффордовых алгебр и спиноров без труда расширяется от случая пространств со скалярным произведением, до векторных пространств, снабжённых неопределенной метрикой. В частности, группа Лоренца $\mathrm{SO}_0(n+1, 1)$ имеет двойное накрытие, называемое $\mathrm{Spin}(n+1, 1)$, и эта группа имеет определённые представления, называемые спинорными представлениями. Когда $n = 1, 2, 4$ или 8, мы на самом деле имеем

$$\mathrm{Spin}(n+1, 1) \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{K}),$$

где $\mathbb{K}$ – нормированная алгебра с делением размерности $n$. Фундаментальное представление $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$ на $\mathbb{K}^2$ является левым спинорным представлением $\mathrm{Spin}(n+1, 1)$. Дуальное к нему является правым спинорным представлением. Более того, взаимодействие между векторами и спинорами, которое является основой теорий суперсимметрии в пространствах-временах размерности $3, 4, 6$ и $10$, является просто действием $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ на $\mathbb{K}^2$ посредством матричного умножения. На диаграмме Фейнмана это выглядит следующим образом:




В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Пенроуз [77] описал замечательный прием для получения точек небесной сферы из спиноров. На самом деле, он также работает и для других нормированных алгебры с делением: если $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ не является нулём, эрмитова матрица

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx^* & xy^* \\ yx^* & yy^* \end{pmatrix}$$

ненулевая, но с нулевым определителем, так что она определяет точку на небесной сфере. Если мы ограничиваемся спинорами единичной нормы, этот прием сводится к отображению Хопфа. Более того, он проясняет любопытную двойную роль $\mathbb{KP}^1$ как одновременно небесной сферы в частной теории относительности и пространства высказываний в квантовой логике, связанным с йордановой алгеброй $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$: любая точка небесной сферы соответствует высказыванию, определяющему состояние спинора!

### 3.4 $\mathbb{OP}^2$ Исключительная Йорданова Алгебра

Октонионы замечательны сами по себе, но подлинное волшебство начинается, когда мы используем их для построения исключительной йордановой алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ и ассоциированного с ним проективного пространства, октонионной проективной плоскости. Группы симметрии этих структур оказываются исключительными группами Ли, и тройственность приобретает сверхестественное всепроникающее влияние на все явления, поскольку элемент $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ состоит из трёх октонионов и трёх вещественных чисел. Используя соотношение между нормированными алгебрами с делением и тройственностями, мы получаем изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) & \cong & \mathbb{R}^3 \oplus V_8 \oplus S_8^+ \oplus S_8^- \\ \begin{pmatrix} \alpha & z^* & y^* \\ z & \beta & x \\ y & x^* & \gamma \end{pmatrix} & \mapsto & ((\alpha, \beta, \gamma), x, y, z), \end{array} \tag{7}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и $x, y, z \in \mathbb{O}$. Исследование йорданова произведения в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ тогда открывает удивительный факт: в то время как поверхностно это произведение определено с использованием структуры $*$-алгебры на $\mathbb{O}$, оно на самом деле может быть определено с использованием только естественных отображений

$$V_8 \times S_8^+ \to S_8^-, \qquad V_8 \times S_8^- \to S_8^+, \qquad S_8^+ \times S_8^- \to V_8$$

вместе со скалярными произведениями этих трёх пространств. Вся эта информация содержится в нормированной тройственности

$$t_8\colon\ V_8 \times S_8^+ \times S_8^- \to \mathbb{R},$$

так что любой автоморфизм этой тройственности даёт автоморфизм $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. В разделе 2.4 мы видели, что $\mathrm{Aut}(t_8) \cong \mathrm{Spin}(8)$. После небольших выкладок отсюда следует, что

$$\mathrm{Spin}(8) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})).$$

Однако, это описание $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ в терминах 8-мерной евклидовой геометрии является всего лишь частью более широкого описания – описания, помещенного в десятимерное пространство-время Минковского! Если считать $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ расположенной в нижнем правом углу $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, мы получим изоморфизм

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \quad &\cong \; \mathbb{R}\oplus\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})\oplus\mathbb{O}^2 \\ \begin{pmatrix} \alpha & \psi^* \\ \psi & a \end{pmatrix} &\mapsto \quad (\alpha, a, \psi)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Мы видели в разделе 3.3, что $a \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ и $\psi \in \mathbb{O}^2$ могут быть отождествлены с вектором и спинором в десятимерном пространстве-времени Минковского соответственно. Подобным образом, $\alpha$ является скаляром.

Это описание даёт представление $\mathrm{Spin}(9,1)$ как линейных преобразований $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. К сожалению, большинство таких преобразований не сохраняют йорданово произведение на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Как мы увидим, они сохраняют только меньшую структуру на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$: *определитель*. Однако, преобразования, возникающие из подгруппы $\mathrm{Spin}(9) \subset \mathrm{Spin}(9,1)$, всё же сохраняют йорданово произведение. Можно убедиться в этом следующим образом. Как представление $\mathrm{Spin}(9)$, $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ расщепляется на "пространство" и "время":

$$\mathfrak{h}_2(\mathbb{O}) \cong V_9 \oplus \mathbb{R}$$

с двумя частями, соответствующими бесследовым элементам $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ и вещественным кратным единицы соответственно. С другой стороны, спинорное представление $\mathfrak{so}(9)$ расщепляется как $S_8^+ \oplus S_8^-$, когда мы ограничиваем его до $\mathfrak{so}(8)$, так что мы имеем

$$\mathbb{O}^2 \cong S_9.$$

Мы, таким образом, получаем изоморфизм

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \qquad &\cong \; \mathbb{R}^2\oplus V_9\oplus S_9 \\ \begin{pmatrix} \alpha & \psi^* \\ \psi & a+\beta \end{pmatrix} &\mapsto \; ((\alpha,\beta), a, \psi), \end{aligned} \tag{9}$$

где $a \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ имеет нулевой след и $\beta$ является вещественным кратным единицы. В этих понятиях можно легко проверить, что йорданово произведение в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ строится из инвариантных операций над скалярами, векторами и спинорами в девяти размерностях. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Spin}(9) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})).$$

Более детально это изложено в книге Харвея [54].

Это не исчерпывает всех симметрий $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, поскольку существуют другие автоморфизмы, возникающие из группы перестановок трёх символов, которые действуют на $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ и $(x,y,z) \in \mathbb{O}^3$ очевидным образом. Также любая матрица $g \in \mathrm{O}(3)$ действует посредством сопряжения (acts by conjugation) как автоморфизм на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$; поскольку элементы матрицы $g$ действительны, здесь нет проблем с отсутствием ассоциативности. Группа $\mathrm{Spin}(9)$ 36-мерна, но полная группа автоморфизмов $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ гораздо больше: она 52-мерна. Как объясняется в разделе 4.2, она носит имя $\mathrm{F}_4$.

Однако, уже с теми автоморфизмами, которые мы имеем, можно делать нечто интересное: их можно использовать для диагонализации любого элемента в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Чтобы увидеть это, прежде всего заметим, что группа вращений, и следовательно $\mathrm{Spin}(9)$, действует транзитивно на единичной сфере в $V_9$. Это значит, что можно использовать автоморфизм в нашей подгруппе $\mathrm{Spin}(9)$ для приведения любого элемента $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ к виду

$$\begin{pmatrix} \alpha & z^* & y^* \\ z & \beta & x \\ y & x^* & \gamma \end{pmatrix},$$

где $x$ действителен. Следующий шаг заключается в применении автоморфизма, который делает $y$ и $z$ действительными, не затрагивая один $x$. Чтобы это проделать, заметим, что подгруппа Spin(9), фиксирующая любой ненулевой вектор в $V_9$, изоморфна Spin(8). Если ограничить представление $S_9$ этой подгруппой, она расщепляется как $S_8^+ \oplus S_8^-$, и после определённых действий [54] можно показать, что Spin(8) действует на $S_8^+ \oplus S_8^- \cong \mathbb{O}^2$ таким образом, что любой элемент $(y, z) \in \mathbb{O}^2$ может быть переведён в элемент, обе компоненты которого действительны. Завершающим шагом является выбор нашего элемента из $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ со всеми реальными компонентами и использовать автоморфизм для его диагонализации. Это можно сделать сопряжением его с подходящей матрицей из O(3).

Чтобы понять $\mathbb{OP}^2$, нам нужно понять проекции в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Это тот случай, когда возможность диагонализации матриц $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ посредством автоморфизмов возникает легко. С точностью до автоморфизма, любая проекция в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ выглядит как одна из этих четырёх:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь след матрицы в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ инвариантен относительно автоморфизмов, потому что его можно определить используя только структуру йордановой алгебры:

$$\mathrm{tr}(a) = \frac{1}{9}\mathrm{tr}(L_a), \qquad a \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}),$$

где $L_a$ – левое умножение на $a$. Отсюда следует, что след любой проекции в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ равен $0, 1, 2$ или 3. Более того, ранг любой проекции $p \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ равен её следу. Чтобы увидеть это, сначала заметим, что $\mathrm{tr}(p) \geq \mathrm{rank}(p)$, поскольку из $p < q$ следует, что $\mathrm{tr}(p) < \mathrm{tr}(q)$, и след увеличивается целочисленными шагами. Таким образом, необходимо лишь показать, что $\mathrm{tr}(p) \leq \mathrm{rank}(p)$. Для этого достаточно рассмотреть четыре проекции, показанные выше, поскольку как след, так и ранг инварианты относительно автоморфизмов. Поскольку $p_0 < p_1 < p_2 < p_3$, ясно, что для этих проекций мы в самом деле имеем $\mathrm{tr}(p) \leq \mathrm{rank}(p)$.

Отсюда следует, что точки октонионной проективной плоскости являются проекциями со следом 1 в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, в то время как прямые являются проекциями со следом 2. Вычисления [54] показывают, что любая проекция со следом 1 имеет вид

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* & y^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx^* & xy^* & xz^* \\ yx^* & yy^* & yz^* \\ zx^* & zy^* & zz^* \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $(x, y, z) \in \mathbb{O}^3$ имеет

$$(xy)z = x(yz), \qquad \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = 1.$$

С другой стороны, любая проекция со следом 2 имеет вид $1-p$, где $p$ имеет след 1. Это устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми в октонионной проективной плоскости. Если мы используем это соответствие, чтобы считать их обеих проекциями следа-1, точка $p$ лежит на прямой $p'$ тогда и только тогда, когда $p < 1 - p'$. Конечно, $p < 1 - p'$, если и только если $p' < 1 - p$. Симметрия этого отношения означает, что октонионная проективная плоскость самодуальна! Это также верно для действительной, комплексной и кватернионной проективных плоскостей. Во всех случаях операция, которая взаимно заменяет точки прямыми и наоборот, соответствует в квантовой логике "отрицанию" (negation) высказываний [98].

Vs используем $\mathbb{OP}^2$ для обозначения множества точек в октонионной проективной плоскости. Для любого заданного элемента $(x, y, z) \in \mathbb{O}^3$ с $(xy)z = x(yz)$, можно нормировать его и тогда применить уравнение (10), чтобы получить точку $[(x, y, z)] \in \mathbb{OP}^2$. Повторяя стратегию, которая работала для $\mathbb{OP}^1$, можно превратить $\mathbb{OP}^2$ в гладкое многообразие, накрыв его тремя системами координат:

- одна система координат, содержащая все точки вида $[(x, y, 1)]$,
- одна система координат, содержащая все точки вида $[(x, 1, z)]$,
- одна система координат, содержащая все точки вида $[(1, y, z)]$.

Это можно проверить простым вычислением. Единственная интересная часть – проверка того, что всякий раз, когда ассоциативный закон может оказаться необходимым, мы можем использовать либо альтернативность октонионов, либо тот факт, что только тройки с $(xy)z = x(yz)$ дают точки $[(x, y, z)] \in \mathbb{OP}^2$.

Мы, таким образом, получили следующую картину октонионной проективной плоскости. Как многообразие, $\mathbb{OP}^2$ 16-мерно. Прямые в $\mathbb{OP}^2$ являются копиями $\mathbb{OP}^1$, и, следовательно, – 8-сферами. Для любых двух разных точек в $\mathbb{OP}^2$ имеется единственная прямая, на которой лежат они обе. Для любых двух разных прямых имеется единственная точка, лежащая на них обеих. Имеется преобразование "двойственности", которое отображает точки в прямые и наоборот, сохраняя это соотношение принадлежности (инцидентности). В частности, поскольку пространство всех точек, лежащих на любой заданной прямой, является копией $\mathbb{OP}^1$, таким же является и пространство всех прямых, содержащих заданную точку!

Чтобы погрузиться (dig) в геометрию $\mathbb{OP}^2$ более глубоко, необходима другая важная структура на исключительной йордановой алгебре: детерминант (определитель). Мы видели в разделе 3.3, что, несмотря на отсутствие коммутативности и ассоциативности, детерминант матрицы из $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ является хорошо определённым и полезным понятием. То же самое верно для $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$! Можно определить **детерминант** матрицы в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ посредством соотношения

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & z^* & y^* \\ z & \beta & x \\ y & x^* & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma - (\alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2) + 2\mathrm{Re}(xyz).$$

Мы можем выразить это в терминах следа и произведения с помощью

$$\det(a) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(a^3) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(a^2)\mathrm{tr}(a) + \frac{1}{6}\mathrm{tr}(a)^3.$$

Это показывает, что определитель инвариантен относительно всех автоморфизмов $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Однако, определитель инвариантен даже относительно более широкой группы линейных преобразований. Как мы увидим в разделе 4.4, эта группа 78-мерна: она является некомпактной действительной формой исключительной группы Ли $\mathrm{E}_6$. Эти дополнительные симметрии побуждают выяснить, как далеко мы можем развить геометрию, исходя только из детерминанта и структуры векторного пространства $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$.

Определитель является кубической формой на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, так что имеется единственная симметричная трилинейная форма

$$(\cdot,\cdot,\cdot)\colon\ \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \to \mathbb{R},$$

такая, что

$$(a, a, a) = \det(a).$$

Дуализируя ее, мы получим так называемое **кросс-произведение** (cross product)

$$\times\colon\ \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \to \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^*.$$

Явным образом, оно задается выражением

$$(a \times b)(c) = (a, b, c).$$

Несмотря на своё название, это произведение коммутативно.

Мы уже видели, что точки $\mathbb{OP}^2$ соответствуют проекциям следа 1 в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Фройденталь [40] заметил, что они являются тем же самым, что и элементы $p \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ с $\mathrm{tr}(p) = 1$ и $p \times p = 0$. Даже лучше, мы можем опустить уравнение $\mathrm{tr}(p) = 1$ до тех пор, пока мы условились оперировать *классами эквивалентности* ненулевых элементов, удовлетворяющих соотношению $p \times p = 0$, где два таких элемента являются эквивалентными, когда один является ненулевым действительным кратным другому. Каждый такой класс эквивалентности $[p]$ соответствует уникальной точке в $\mathbb{OP}^2$, и мы получаем этим способом все точки.

Для двух данных точек $[p]$ и $[q]$, их кросс-произведение $p \times q$ хорошо определено с точностью до ненулевого действительного множителя. Это означает, что мы определяем "прямую" как класс эквивалентности элементов $p \times q \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^*$, где снова два элемента полагаются эквивалентными, если один является ненулевым действительным кратным другого. Фройденталь показал, что мы получим проективную плоскость, изоморфную $\mathbb{OP}^2$, если мы возьмём эти наши определения точек и прямых и постановим, что точка $[p]$ лежит на прямой $[L]$ тогда и только тогда, когда $L(p) = 0$. Заметим, что это уравнение имеет смысл, даже несмотря на то, что $L$ и $p$ определены лишь с точностью до ненулевых действительных множителей.

Одним из следствий всего этого является то, что можно восстановить структуру $\mathbb{OP}^2$ как проективную плоскость, исходя только из определителя на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$: структура йордановой алгебры не требуется! Однако, чтобы получить отображение "двойственности", взаимно заменяющее точки и прямые с сохранением отношение принадлежности, требуется немного больше: необходимо невырожденное спаривание

$$\langle a, b\rangle = \mathrm{tr}(ab)$$

на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Это устанавливает изоморфизм

$$\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \cong \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^*.$$

Оказывается, что этот изоморфизм отображает точки в прямые, и, на самом деле, он устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми. Мы можем использовать это соответствие, чтобы полагать точки и прямые в $\mathbb{OP}^2$ классами эквивалентности элементов $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. В этих терминах точка $p$ лежит на прямой $\ell$, если и только если $\langle \ell, p\rangle = 0$. Эта взаимосвязь симметрична! Отсюда следует, что если мы взаимно заменим друг на друга точки и прямые, используя это соответствие, отношение принадлежности сохранится.

Мы, таким образом, получили весьма изящный инструментарий для работы с $\mathbb{OP}^2$. Если мы используем изоморфизм между $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ и дуальной к ней алгеброй для переинтерпретации кросс-произведения в качестве отображения

$$\times\colon\ \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \to \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}),$$

тогда не только прямая, проходящая через разные точки $[p]$ и $[q]$, задаётся соотношением $[p \times q]$, но также точка, в которой две разные прямые $[\ell]$ и $[m]$ пересекаются, задается посредством $[\ell \times m]$. Тройка точек $[p], [q]$ и $[r]$ лежит на одной прямой (коллинеарна), если и только если $(p, q, r) = 0$, и тройка прямых $[\ell]$, $[m]$, $[n]$ пересекается в точке, если и только если $(\ell, m, n) = 0$. В дополнение к тому, имеется очаровательная связка тождеств, относящихся к йорданову произведению, определителю, кросс-произведению и скалярному произведению в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$.

Для более глубокого ознакомления с октонионной геометрией читателю настоятельно рекомендуется обратиться к оригинальным работам Фройденталя [39–42], Джека Титца [94, 95] и Тони Шпрингера [87–89]. Книга Хельмута Зальцмана и др. также хороша [82]. К сожалению, сейчас мы вынуждены попрощаться с этти предметом и начать нашу экскурсию по исключительным группам. Однако, мы вернёмся к изучению симметрий $\mathbb{OP}^2$ и исключительной йордановой алгебры в разделах 4.2 и 4.4.

## 4 Исключительные Алгебры Ли

18 октября 1887 Вильгельм Киллинг написал письмо Фридриху Энгелю, сообщив, что он закончил классификацию простых алгебр Ли. В следующие три года эта революционная работа была опубликована в серии статей [63]. Кроме того, что сейчас называется "классическими" простыми алгебрами Ли, он заявил о нахождении шести "исключительных" алгебр – новых

математических объектов, о существовании которых никто до тех пор не подозревал. На самом деле, он дал строгое построение только наименьших из них. В своей диссертации в 1894 г. Картан [14] построил все из них и отметил, что две 52-мерные исключительные алгебры Ли, открытые Киллингом, изоморфны, так что на самом деле их только пять.

Классификация Киллинга-Картана простых алгебр Ли ввела значительную часть техники, которая излагается в любом современном вводном курсе этого предмета, например, корни и веса. В дальнейшем мы будем избегать этой техники, поскольку мы хотим вместо этого видеть исключительные алгебры Ли как октонионные родственники классических алгебр – немного эксцентричные, но всё же обладающие близкой связью с *геометрией*, в частности с римановой геометрией проективных плоскостей. Отчасти также по этой причине мы будем фокусировать внимание на компактных действительных формах простых алгебр Ли.

Классические простые алгебры Ли можно упорядочить в три бесконечных семейства:

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(n) &= \{x \in \mathbb{R}[n]\colon\ x^* = -x,\ \mathrm{tr}(x) = 0\}, \\ \mathfrak{su}(n) &= \{x \in \mathbb{C}[n]\colon\ x^* = -x,\ \mathrm{tr}(x) = 0\}, \\ \mathfrak{sp}(n) &= \{x \in \mathbb{H}[n]\colon\ x^* = -x\}. \end{aligned}$$

Соответствующие группы Ли есть:

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) &= \{x \in \mathbb{R}[n]\colon\ xx^* = 1,\ \det(x) = 1\}, \\ \mathrm{SU}(n) &= \{x \in \mathbb{C}[n]\colon\ xx^* = 1,\ \det(x) = 1\}, \\ \mathrm{Sp}(n) &= \{x \in \mathbb{H}[n]\colon\ xx^* = 1\}. \end{aligned}$$

Они естественным образом возникают как группы симметрии проективных пространств над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$ соответственно. Более точно, они возникают как группы **изометрий**: преобразования, сохраняющие определённую риманову метрику. Рассмотрим вкратце эти группы в виде своего рода разогрева перед исключительными группами.

Сначала рассмотрим проективное пространство $\mathbb{RP}^n$. Мы можем представлять его как единичную сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$ с отождествлёнными противоположными точками $x$ и $-x$. Оно наследует от сферы риманову метрику, и очевидное действие группы вращения $\mathrm{O}(n+1)$ как изометрий сферы приводит к действию этой группы как изометрий $\mathbb{RP}^n$ с этой метрикой. На самом деле, группа всех изометрий $\mathbb{RP}^n$ есть просто

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{RP}^n) \cong \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(1),$$

где $\mathrm{O}(1) = \{\pm 1\}$ – подгруппа $\mathrm{O}(n+1)$, тривиально действующая на $\mathbb{RP}^n$. Алгебра Ли этой группы изометрий есть

$$\mathfrak{isom}(\mathbb{RP}^n) \cong \mathfrak{so}(n+1).$$

Случай $\mathbb{CP}^n$ весьма похож. Мы представляем его как единичную сферу в $\mathbb{C}^{n+1}$ с точками $x$ и $\alpha x$, отождествлёнными всякий раз, когда $\alpha$ является единичным комплексным числом. Оно, таким образом, наследует риманову метрику от этой сферы, и унитарная группа $\mathrm{U}(n+1)$ действует как изометрии. Если мы рассматриваем только связную компоненту группы изометрий и игнорируем обращающие ориентацию изометрии, которые возникают из комплексного сопряжения, мы имеем

$$\mathrm{Isom}_0(\mathbb{CP}^n) \cong \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(1),$$

где $\mathrm{U}(1)$ – подгруппа, тривиально действующая на $\mathbb{CP}^n$. Алгебра Ли этой группы изометрий есть

$$\mathfrak{isom}(\mathbb{CP}^n) \cong \mathfrak{su}(n+1).$$

Случай $\mathbb{HP}^n$ является более тонким, поскольку мы должны принять во внимание некоммутативность кватернионов. Мы можем представить $\mathbb{HP}^n$ как единичную сферу в $\mathbb{H}^{n+1}$ с точками $x$ и $\alpha x$, отождествлёнными всякий раз, когда $\alpha$ является единичным кватернионом и, как и ранее,

$\mathbb{HP}^n$ наследует риманову метрику. Группа $\mathrm{Sp}(n+1)$ действует как группа изометрий $\mathbb{HP}^n$, но это действие возникает из *правого* умножения, так что

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{HP}^n) \cong \mathrm{Sp}(n+1)/\{\pm 1\},$$

поскольку не $\mathrm{Sp}(1)$, а только её центр $\{\pm 1\}$ действует тривиально на $\mathbb{HP}^n$ посредством правого умножения. На уровне алгебр Ли это даёт

$$\mathfrak{isom}(\mathbb{HP}^n) \cong \mathfrak{sp}(n+1).$$

Для любителей октонионов заманчиво попытаться провести подобное построение, исходя из $\mathbb{OP}^2$. Несмотря на то, что отсутствие ассоциативности превращает подобные вещи в трюк, мы показываем в разделе 4.2, что на самом деле это может быть сделано. Оказывается, что $\mathrm{Isom}(\mathbb{OP}^2)$ – одна из исключительных групп Ли, а именно $\mathrm{F}_4$. Подобным образом, исключительные группы Ли $\mathrm{E}_6$, $\mathrm{E}_7$ и $\mathrm{E}_8$ в определённом тонком смысле являются группами изометрии проективных плоскостей над алгебрами $\mathbb{C}\otimes\mathbb{O}$, $\mathbb{H}\otimes\mathbb{O}$ и $\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}$. Вместе с $\mathrm{F}_4$ все эти группы могут быть определены посредством построения так называемого "магического квадрата", при котором используется значительная часть той алгебры, которую мы до сих пор описывали. Три версии этой конструкции объясняются в разделе 4.3. Затем мы рассматриваем группы $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ и $\mathrm{E}_8$ по отдельности в последующих разделах. Но прежде всего, нужно ввести $\mathrm{G}_2$: наименьшую из исключительных групп Ли, являющуюся ничем иным, как группой автоморфизмов октонионов.

### 4.1 $\mathrm{G}_2$

В 1914 Эли Картан заметил, что наименьшая из исключительных групп Ли $\mathrm{G}_2$ является группой автоморфизмов октонионов [15]. Её алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ является поэтому $\mathfrak{Der}(\mathbb{O})$, дифференцированием октонионов. Примем эти факты в качестве определения $\mathrm{G}_2$ и её алгебры Ли и выведем некоторые следствия.

Как выглядят автоморфизмы октонионов? Один из способов проанализировать это затрагивает подалгебры октонионов. Любой октонион $e_1$, квадрат которого равен $-1$, порождает подалгебру $\mathbb{O}$, изоморфную $\mathbb{C}$. Если мы затем выберем любой октонион $e_2$, квадрат которого равен $-1$ и который антикоммутирует с $e_1$, элементы $e_1, e_2$ порождают подалгебру, изоморфную $\mathbb{H}$. Наконец, если мы выберем октонион $e_3$, квадрат которого равен $-1$ и который антикоммутирует с $e_1, e_2$ и $e_1e_2$, то элементы $e_1, e_2, e_3$ порождают всю $\mathbb{O}$. Назовем такую тройку октонионов **базисной тройкой**. Для любой заданной базисной тройки существует единственный способ определить $e_4, \ldots, e_7$ таким образом, чтобы была справедлива полная таблица умножения в разделе 2 . На самом деле, это следует из замечаний по конструкции Кэли-Диксона в конце раздела 2.3.

Отсюда следует, что для двух любых заданных базисных троек существует уникальный автоморфизм $\mathbb{O}$, отображающий одну в другую. Обратно, очевидно, что любой автоморфизм отображает базисные тройки в базисные тройки. Это даёт изящное описание группы $\mathrm{G}_2$, описанное далее.

Зафиксируем базисную тройку $e_1, e_2, e_3$. Имеется уникальный автоморфизм октонионов, отображающий её в любую другую базисную тройку, скажем $e_1', e_2', e_3'$. Наше описание базисных троек пока было полностью алгебраическим, но мы можем посмотреть на них более геометрически: базисная тройка есть любая тройка единичных мнимых октонионов, т. е. мнимых октонионов единичной нормы, таких, что каждый из них ортогонален алгебре, порождённой двумя другими. Это значит, что наш автоморфизм может отображать $e_1$ в любую точку $e_1'$ на 6-сфере единичных мнимых октонионов, затем отображать $e_2$ в любую точку $e_2'$ на 5-сфере единичных мнимых октонионов, ортогональных к $e_1'$, и затем отображать $e_3$ в любую точку $e_3'$ на 3-сфере единичных мнимых октонионов, ортогональных к $e_1', e_2'$ и $e_1'e_2'$. Отсюда следует, что

$$\dim \mathrm{G}_2 = \dim S^6 + \dim S^5 + \dim S^3 = 14.$$

Тройственное описание (triality description) октонионов в разделе 2.4 даёт другую картину $\mathrm{G}_2$. Прежде всего, вспомним, что $\mathrm{Spin}(8)$ является группой автоморфизмов тройственности

$t_8 \colon V_8 \times S_8^+ \times S_8^- \to \mathbb{R}$. Чтобы построить октонионы из этой тройственности, необходимо выбрать единичные векторы в любых двух из этих пространств, так что мы можем представлять $\mathrm{G}_2$ как подгруппу $\mathrm{Spin}(8)$, фиксирующую единичные векторы в $V_8$ и $S_8^+$. Подгруппа $\mathrm{Spin}(8)$, фиксирующая единичный вектор в $V_8$, является просто $\mathrm{Spin}(7)$, и когда мы ограничиваем представление $S_8^+$ до $\mathrm{Spin}(7)$, мы получим спинорное представление $S_7$. Таким образом, $\mathrm{G}_2$ есть подгруппа $\mathrm{Spin}(7)$, фиксирующая единичный вектор в $S_7$. Поскольку $\mathrm{Spin}(7)$ действует транзитивно на единичной сфере $S^7$ в этом спинорном представлении [2], мы имеем

$$\mathrm{Spin}(7)/\mathrm{G}_2 = S^7.$$

Отсюда следует, что

$$\dim \mathrm{G}_2 = \dim(\mathrm{Spin}(7)) - \dim S^7 = 21 - 7 = 14.$$

Картина станет несколько более яркой, если мы вспомним, что после выбора единичных векторов в $V_8$ и $S_8^+$, мы можем отождествить оба эти представления с октонионами, с обоими единичными векторами, соответствующими $1 \in \mathbb{O}$. Таким образом, получается следующее: подгруппа $\mathrm{Spin}(8)$, которая фиксирует 1 в векторном представлении на $\mathbb{O}$, есть $\mathrm{Spin}(7)$; подгруппа, фиксирующая 1 в векторном и правом спинорном представлениях одновременно, есть $\mathrm{G}_2$. Эта подгруппа также фиксирует элемент 1 в левом спинорном представлении $\mathrm{Spin}(8)$ на $\mathbb{O}$.

Теперь, используя векторное представление $\mathrm{Spin}(8)$ на $\mathbb{O}$, мы получаем гомоморфизмы

$$\mathrm{G}_2 \hookrightarrow \mathrm{Spin}(8) \to \mathrm{SO}(\mathbb{O}),$$

где $\mathrm{SO}(\mathbb{O}) \cong \mathrm{SO}(8)$ является группой вращений октонионов, рассматриваемых как действительное векторное пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}(x^*y)$. Отображение из $\mathrm{Spin}(8)$ на $\mathrm{SO}(\mathbb{O})$ отображает два элемента в один, но если мы ограничим его до $\mathrm{G}_2$, мы получим взаимно однозначное отображение.

$$\mathrm{G}_2 \hookrightarrow \mathrm{SO}(\mathbb{O}).$$

На уровне алгебр Ли эта конструкция даёт включение

$$\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}(\mathbb{O}),$$

где $\mathfrak{so}(\mathbb{O}) \cong \mathfrak{so}(8)$ является алгеброй Ли косо-сопряжённых (skew-adjoint) действительных линейных преобразований октонионов. Поскольку $\mathfrak{g}_2$ 14-мерна, а $\mathfrak{so}(\mathbb{O})$ 28-мерна, полезно точно понять, откуда берутся дополнительные 14 размерностей. На самом деле, они появляются из двух копий $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$, 7-мерного пространства, состоящего из всех мнимых октонионов.

Более точно, мы имеем:

$$\mathfrak{so}(\mathbb{O}) = \mathfrak{g}_2 \oplus L_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})} \qquad (11)$$

(прямая сумма векторных пространств, а не алгебр Ли), где $L_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}$ – пространство линейных преобразований $\mathbb{O}$, заданных посредством левого умножения на мнимые октонионы, и $R_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}$ – пространство линейных преобразований $\mathbb{O}$, заданных посредством правого умножения на мнимые октонионы [84]. Чтобы увидеть это, сначала проверим, что левое умножение на мнимый октонион является косо-сопряженным. Используя поляризацию, достаточно заметить, что

$$\langle x, ax\rangle = \mathrm{Re}(x^*(ax)) = \mathrm{Re}((x^*a)x) = \mathrm{Re}((a^*x)^*x) = -\mathrm{Re}((ax)^*x) = -\langle ax, x\rangle$$

для всех $a \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ и $x \in \mathbb{O}$. Заметим, что эти вычисления используют только правило альтернативности, а не ассоциативности, поскольку все $x, x^*$ и $a$ лежат в алгебре, порождённой двумя элементами $a$ и $\mathrm{Im}(x)$. Подобная аргументация показывает, что правое умножение на мнимый октонион косо-сопряжено. Отсюда следует, что все $\mathfrak{g}_2$, $L_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}$ и $R_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}$ естественным образом лежат в $\mathfrak{so}(8)$. Далее, с помощью ряда простых вычислений можно проверить, что

$$L_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})} \cap R_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})} = \{0\}$$

и

$$\mathfrak{g}_2 \cap (L_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})} + R_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}) = \{0\}.$$

Из факта, что размерности 3 частей добавляются до 28, следует уравнение (11).

Мы уже видели, что $\mathrm{G}_2$ сидит внутри $\mathrm{SO}(8)$, но можно сказать точнее: она в действительности сидит внутри $\mathrm{SO}(7)$. В заключение, любой автоморфизм октонионов сохраняет единицу, и таким образом сохраняет пространство октонионов, ортогональное единице. Это пространство есть просто $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$, так что мы получаем включение

$$\mathrm{G}_2 \hookrightarrow \mathrm{SO}(\mathrm{Im}(\mathbb{O})),$$

где $\mathrm{SO}(\mathrm{Im}(\mathbb{O})) \cong \mathrm{SO}(7)$ – группа вращений мнимых октонионов. На уровне алгебр Ли это даёт включение

$$\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}(\mathrm{Im}(\mathbb{O})).$$

Поскольку $\mathfrak{g}_2$ 14-мерна, а $\mathfrak{so}(\mathrm{Im}(\mathbb{O}))$ 21-мерна, полезно увидеть, откуда берутся дополнительные семь размерностей. После исследования уравнения (11) ясно, что эти дополнительные размерности должны появляться из преобразований в $L_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}$, которые уничтожают единицу $1 \in \mathbb{O}$. Преобразования, которые делают это, имеют в точности вид

$$\mathrm{ad}_a = L_a - R_a$$

для $a \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$. Мы, таким образом, получаем

$$\mathfrak{so}(\mathrm{Im}(\mathbb{O})) \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathrm{ad}_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}, \tag{12}$$

где $\mathrm{ad}_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}$ есть 7-мерное пространство таких преобразований.

Можно суммировать вышеизложенные результаты следующим образом:

**Теорема 4.** *Компактная действительная форма алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$ задается выражением*

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \subset \mathfrak{so}(\mathrm{Im}(\mathbb{O})) \subset \mathfrak{so}(\mathbb{O})$$

*и мы имеем*

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(\mathrm{Im}(\mathbb{O})) &= \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathrm{ad}_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})} \\ \mathfrak{so}(\mathbb{O}) &= \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus L_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\mathrm{Im}(\mathbb{O})}, \end{aligned}$$

*где скобки Ли в $\mathfrak{so}(\mathrm{Im}(\mathbb{O}))$ и $\mathfrak{so}(\mathbb{O})$ построены из естественных билинейных операций над слагаемыми.*

Как мы уже видели, $\mathrm{G}_2$ имеет 7-мерное представление $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$. В действительности, это наименьшее нетривиальное представление $\mathrm{G}_2$, так что имеет смысл понять его как можно большим числом разных способов. Пространство $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ имеет как минимум три естественные структуры, которые сохраняются преобразованиями в $\mathrm{G}_2$. Они дают больше описаний $\mathrm{G}_2$ как группы симметрий и они также проливают некоторый новый свет на октонионы. Первые две из этих структур, описываемых нами, аналогичны более знакомым, которые существуют в трёхмерном пространстве мнимых кватернионов $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$. Третья явно использует неассоциативность октонионов.

Прежде всего, и $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, и $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ замкнуты относительно коммутатора. В случае $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ коммутатор, разделенный на 2, является знакомым **векторным-произведением** (cross product) в трёх размерностях:

$$a \times b = \frac{1}{2}[a, b].$$

Можно дать такое же определение для $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$, получая семимерный аналог векторного произведения. Как для $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, так и для $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ векторное произведение билинейно и антикоммутативно. Векторное произведение превращает $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ в алгебру Ли, – но не $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$. И для $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, и для $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ векторное произведение имеет два замечательных геометрических свойства. С одной стороны, его норма определяется формулой

$$\|a \times b\|^2 + \langle a, b\rangle^2 = \|a\|^2\,\|b\|^2,$$

или эквивалентно,

$$\|a \times b\| = |\sin\theta|\,\|a\|\,\|b\|,$$

где $\theta$ есть угол между $a$ и $b$. С другой стороны, $a \times b$ ортогонально к $a$ и $b$. Оба эти свойства следуют из простых вычислений. Для $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ эти два свойства достаточны для определения $x \times y$ с точностью до знака. Для $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ они недостаточны – но они становятся достаточными, если мы также используем факт, что $x \times y$ лежит внутри копии $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, содержащей $x$ и $y$.

Ясно, что группа всех действительных линейных преобразований $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, сохраняющая векторное произведение, есть просто $\mathrm{SO}(3)$, которая также является группой автоморфизмов кватернионов. Подобным образом можно показать, что группа вещественно-линейных преобразований на $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$, сохраняющая векторное произведение, есть в точности $\mathrm{G}_2$. Чтобы увидеть это, для начала заметим, что любой элемент $\mathrm{G}_2$ сохраняет векторное произведение на $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$, поскольку векторное произведение определено с использованием октонионного умножения. Чтобы убедиться в обратном, т. е. что любое преобразование, сохраняющее векторное произведение, лежит в $\mathrm{G}_2$, достаточно выразить умножение мнимых октонионов в терминах их векторного произведения. Используя это тождество:

$$a \times b = ab + \langle a, b\rangle,$$

на самом деле достаточно выразить скалярное произведение на $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ через векторное произведение. Здесь работает следующее тождество:

$$\langle a, b\rangle = -\tfrac{1}{6}\mathrm{tr}(a \times (b \times \cdot\,))\,, \tag{13}$$

где правая часть отсылает к следу преобразования

$$a \times (b \times \cdot\,)\colon\ \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{O})\,.$$

Во-вторых, и $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, и $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ снабжены естественной 3-формой, или, другими словами, антисимметричным трилинейным функционалом. Он задается выражением

$$\phi(x, y, z) = \langle x, yz\rangle.$$

В случае $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ это просто обычная форма объёма, и группа действительных линейных преобразований, сохраняющих её, есть $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$. В случае $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ действительные линейные преобразования, сохраняющие $\phi$, являются в точности преобразованиями группы $\mathrm{G}_2$. Доказательство этого, данное Робертом Брайантом, можно найти в книге Риза Харвея [54]. 3-форма $\phi$ играет важную роль в теории "многообразий Джойса" [60], которые являются 7-мерными римановыми многообразиями с группой голономий, равной $\mathrm{G}_2$.

В-третьих, и $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, и $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ замкнуты относительно ассоциатора. Для $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ это скучно, поскольку ассоциатор равен нулю. С другой стороны, для $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ ассоциатор уже интересен. На самом деле, из результатов Харвея [54] следует, что действительное линейное преобразование $T\colon \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ сохраняет ассоциатор тогда и только тогда, когда $\pm T$ лежит в $\mathrm{G}_2$. Таким образом, группа симметрии ассоциатора немного больше, чем $\mathrm{G}_2$: она есть $\mathrm{G}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Теперь необходимо сделать запутывающее признание: все эти три структуры на $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ – почти одно и то же! Исходя из векторного произведения

$$\times\colon\ \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{O})$$

мы можем восстановить обычное скалярное произведение на $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ с помощью уравнения (13). Это скалярное произведение позволяет дуализировать векторное произведение и получить трилинейный функционал, который с точностью до константы равен именно 3-форме

$$\phi\colon\ \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \to \mathbb{R}.$$

Векторное произведение также определяет ориентацию на $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ (доказательство этого мы оставляем читателю в качестве упражнения). Это позволяет вычислить дуальность Ходжа (Hodge dual) от $\phi$, получая 4-форму $\psi$, т. е. антисимметричный тетралинейный функционал

$$\psi\colon\ \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \to \mathbb{R}.$$

Дуализируя ещё раз, получим тернарную операцию, которая с точностью до постоянного множителя, является ассоциатором:

$$[\cdot,\cdot,\cdot]\colon\ \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{O}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{O}).$$

Мы завершаем этот раздел удобной явной формулой для всех дифференцирований октонионов. В ассоциативной алгебре $A$ любой элемент $x$ определяет **внутреннее дифференцирование** (inner derivation) $\mathrm{ad}_x\colon A \to A$ посредством

$$\mathrm{ad}_x(a) = [x, a]\,,$$

где скобка означает коммутатор $xa - ax$. В неассоциативной алгебре эта формула обычно не определяет дифференцирования. Однако, если $A$ альтернативна, любая пара элементов $x, y \in A$ определяет дифференцирование $D_{x,y}\colon A \to A$ посредством

$$D_{x,y}a = [[x, y], a] - 3[x, y, a]\,, \tag{14}$$

где $[a, b, x]$ обозначает ассоциатор $(ab)x - a(bx)$. Более того, когда $A$ – нормированная алгебра с делением, любое дифференцирование есть линейная комбинация дифференцирований этого вида. К сожалению, доказательство этих фактов представляется весьма трудоемким [84].

### 4.2 $\mathrm{F}_4$

Вторая наименьшая из исключительных групп Ли – это 52-мерная группа $\mathrm{F}_4$. Геометрическое значение этой группы было выяснено в целом ряде почти одновременных статей различных математиков. В 1949 Йордан построил октонионную проективную плоскость, используя проекции в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Год спустя Арман Борель [10] заметил, что $\mathrm{F}_4$ является группой изометрий 16-мерной проективной плоскости. На самом деле, эта плоскость – ни что иное, как $\mathbb{OP}^2$. Также в 1950 Клод Шевалье и Ричард Шафер [21] показали, что $\mathrm{F}_4$ является группой автоморфизмов $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. В 1951 Фройденталь [39] начал длинную серию работ, в которых он описал не только $\mathrm{F}_4$, но также и другие исключительные группы Ли, используя октонионную проективную геометрию. Для ознакомления с этими исследованиями до сих пор нет способа лучше, чем прочитать его классическую работу 1964 г. по группам Ли и основаниям геометрии [42].

Примем результат Шевалье и Шафера за определение $\mathrm{F}_4$:

$$\mathrm{F}_4 = \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})).$$

Её алгебра Ли, таким образом, есть

$$\mathfrak{f}_4 = \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})).$$

Как мы видели в разделе 3.4, точки $\mathbb{OP}^2$ соответствуют проекциям следа 1 в исключительной йордановой алгебре. Отсюда следует, что $\mathrm{F}_4$ действует, как преобразования $\mathbb{OP}^2$. На самом деле, мы можем снабдить $\mathbb{OP}^2$ римановой метрикой, для которой $\mathrm{F}_4$ является группой изометрий. В качестве пояснения, опишем $\mathbb{OP}^2$ как частное пространство (quotient space) $\mathrm{F}_4$.

В разделе 3.4 мы видели, что исключительная йорданова алгебра может быть построена с использованием естественных операций на скалярных, векторных и спинорных представлениях $\mathrm{Spin}(9)$. Это означает, что $\mathrm{Spin}(9)$ является подгруппой $\mathrm{F}_4$. Уравнение (9) выявляет то, что $\mathrm{Spin}(9)$ является в точности подгруппой, фиксирующей элемент

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку этот элемент является проекцией следа 1, он соответствует точке $\mathbb{OP}^2$. Мы уже видели, что $\mathrm{F}_4$ действует транзитивно на $\mathbb{OP}^2$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{OP}^2 \cong \mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9). \tag{15}$$

Этот факт имеет различные красивые побочные результаты (nice spinoffs). Во-первых, он даёт лёгкий способ вычислить размерность $\mathrm{F}_4$:

$$\dim(\mathrm{F}_4) = \dim(\mathrm{Spin}(9)) + \dim(\mathbb{OP}^2) = 36 + 16 = 52.$$

Во-вторых, поскольку $\mathrm{F}_4$ компактна, можно выбрать любую риманову метрику на $\mathbb{OP}^2$ и усреднить её относительно действия этой группы. Группа изометрии полученной метрики будет автоматически включать $\mathrm{F}_4$ как подгруппу. При помощи дальнейших вычислений [6], можно показать что на самом деле

$$\mathrm{F}_4 = \mathrm{Isom}(\mathbb{OP}^2)$$

и таким образом

$$\mathfrak{f}_4 = \mathfrak{isom}(\mathbb{OP}^2).$$

Из уравнения (15) также следует, что касательное пространство в выбранной нами точке $\mathbb{OP}^2$ изоморфно $\mathfrak{f}_4/\mathfrak{so}(9)$. Но мы уже знаем, что это касательное пространство является именно $\mathbb{O}^2$, или другими словами, спинорным представлением $\mathfrak{so}(9)$. Мы, таким образом, имеем

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{so}(9) \oplus S_9 \tag{16}$$

как векторные пространства, где $\mathfrak{so}(9)$ является подалгеброй Ли. Скобка в $\mathfrak{f}_4$ построена из скобки в $\mathfrak{so}(9)$, действия $\mathfrak{so}(9) \otimes S_9 \to S_9$ и отображения $S_9 \otimes S_9 \to \mathfrak{so}(9)$, полученного дуализацией этого действия. Мы можем также переписать это описание $\mathfrak{f}_4$ в терминах октонионов следующим образом:

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{R}) \oplus \mathbb{O}^2.$$

Последняя формула подразумевает, что мы разлагаем $\mathfrak{f}_4$ с дальнейшим использованием расщепления $\mathbb{O} \oplus \mathbb{R}$ на $\mathbb{O}$ и $\mathbb{R}$. Легко видеть, глядя на матрицы, что для всех $n, m$ мы имеем

$$\mathfrak{so}(n+m) \cong \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(m) \ \oplus\ V_n \otimes V_m. \tag{17}$$

Более того, когда мы ограничиваем представление $S_9$ до $\mathfrak{so}(8)$, оно расщепляется на прямую сумму $S_8^+ \oplus S_8^-$. Используя эти факты и уравнения (16), мы видим, что

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{so}(8) \oplus V_8 \oplus S_8^+ \oplus S_8^-. \tag{18}$$

Эта формула подчеркивает тесную связь между $\mathfrak{f}_4$ и тройственностью: скобка Ли в $\mathfrak{f}_4$ полностью построена из отображений, относящихся к $\mathfrak{so}(8)$ и её трём 8-мерным неприводимым представлениям! Можно переписать это способом, выявляющим роль октонионов:

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathbb{O}^3.$$

Несмотря на всю элегантность, ни одно из этих описаний $\mathfrak{f}_4$ не даёт удобной картины всех дифференцирований исключительной йордановой алгебры. На самом деле, имеется красивая картина такого рода для $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$ всякий раз, когда $\mathbb{K}$ является нормированной алгеброй с делением. Один из способов получить дифференцирование йордановой алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$ – это получить дифференцирование $\mathbb{K}$ и подействовать ею на каждый элемент матриц из $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$. Другой способ использует элементы

$$\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K}[3]\colon\ x^* = -x,\ \mathrm{tr}(x) = 0\}.$$

Для данного $x \in \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K})$ имеется дифференцирование $\mathrm{ad}_x$ на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$, заданное посредством

$$\mathrm{ad}_x(a) = [x, a].$$

На самом деле, [5], любое дифференцирование $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$ может быть единственным образом выражена в виде линейной комбинации производных этих двух типов, так что мы имеем

$$\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})) \cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}) \tag{19}$$

как векторные пространства. В случае октонионов из такого разложения следует, что

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{O}).$$

В уравнении (19) подпространство $\mathfrak{der}(\mathbb{K})$ всегда является подалгеброй Ли, а $\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K})$ не является, если только $\mathbb{K}$ не коммутативна и ассоциативна – в этом случае $\mathfrak{der}(\mathbb{K})$ равняется нулю. Тем не менее, имеется формула для скобок в $\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}))$, которая применяется в любом случае. [75]. Для заданных $D, D' \in \mathfrak{der}(\mathbb{K})$ и $x, y \in \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K})$, имеем

$$\begin{aligned} [D, D'] &= DD' - D'D \\ [D, \mathrm{ad}_x] &= \mathrm{ad}_{Dx} \\ [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] &= \mathrm{ad}_{[x,y]_0} + \frac{1}{3}\sum_{i,j=1}^{3} D_{x_{ij},y_{ij}}\,, \end{aligned} \tag{20}$$

где $D$ действует на $x$ покомпонентно, $[x, y]_0$ – бесследовая часть коммутатора $[x, y]$, и $D_{x_{ij},y_{ij}}$ является дифференцированием $\mathbb{K}$, определённой с использованием уравнения (14).

Суммируя эти различные описания $\mathfrak{f}_4$, мы имеем:

**Теорема 5.** *Компактная действительная форма $\mathfrak{f}_4$ задается посредством*

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_4 &\cong \mathfrak{isom}(\mathbb{OP}^2) \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{O}) \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{R}) \oplus \mathbb{O}^2 \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathbb{O}^3, \end{aligned}$$

*где в каждом случае скобка Ли построена из естественных билинейных операций над слагаемыми.*

### 4.3 Магический Квадрат

Около 1956 Борис Розенфельд [79] высказал замечательную идею: точно так же, как $\mathrm{F}_4$ является группой изометрии проективной плоскости над октонионами, исключительные группы Ли $\mathrm{E}_6$, $\mathrm{E}_7$ и $\mathrm{E}_8$ являются группами изометрии проективных плоскостей над следующими тремя алгебрами соответственно:

- **биоктонионы**, $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$,
- **кватероктонионы**, $\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$,
- **октооктонионы**, $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$.

В этой идее определённо имеется нечто правильное, поскольку можно было бы ожидать, что эти проективные плоскости имеют размерность $32, 64$ и $128$, и на самом деле существуют компактные римановы многообразия с этими размерностями, имеющими $\mathrm{E}_6$, $\mathrm{E}_7$ и $\mathrm{E}_8$ в качестве своих групп изометрии. Проблема в том, что биоктонионы, кватероктонионы и октооктонионы не являются алгебрами с делением, так что определить проективные плоскости над ними – нетривиальная задача!

Ситуация не так плоха для биоктонионов: $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})$ есть простая йорданова алгебра, хотя она и не является формально действительной, и можно использовать её для определения $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$ способом, смоделированным после одного из построений $\mathbb{OP}^2$. Розенфельд заявил, что подобная конструкция работает для для кватероктонионов и октооктонионов, но оказывается, что это не так. Среди других проблем, $\mathfrak{h}_3(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})$ и $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})$ не становятся йордановыми алгебрами относительно произведения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Можно найти разбросанные по литературе [6, 42, 43] разочарованные комментарии по поводу отсутствия действительно красивых конструкций $(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$ и $(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$. Одна из проблем заключается в том, что эти пространства *не* удовлетворяют обычным аксиомам для проективной плоскости. Титц обращался к этой проблеме в своей теории "зданий", которая позволяет конструировать геометрию, имеющую любую желательную алгебраическую группу в качестве симметрий [97]. Но увы, до сих пор кажется, что скорейший путь добраться до кватрооктонионных и октооктонионных проективных плоскостей заключается в том, чтобы, *стартуя от групп* Ли $\mathrm{E}_7$ и $\mathrm{E}_8$, затем найти факторпространства от деления на подходящие подгруппы.

Вкратце, требуется много работы перед тем, как можно будет объявить о полном выяснении геометрического значения групп Ли $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ и $\mathrm{E}_8$. К счастью, идеи Розенфельда могут быть использованы для изящного построения их алгебр Ли. Это носит имя "магического квадрата". Титц [96] и Фройденталь [41] нашли две совершенно различных версии этого построения около 1958, но мы начнём с представления упрощенной версии, опубликованной Е. Б. Винбергом [99] в 1966.

Сначала рассмотрим проективную плоскость $\mathbb{KP}^2$, когда $\mathbb{K}$ является нормированной алгеброй с делением. Точки этой плоскости являются проекциями ранга-1 в йордановой алгебре $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$, и эта плоскость допускает риманову метрику такую, что

$$\mathfrak{isom}(\mathbb{KP}^2) \cong \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})).$$

Более того, мы видели в уравнении (19), что

$$\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})) \cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}).$$

Вместе с наблюдениями Розенфельда, эти факты могли бы дать повод надеяться, что всякий раз, когда имеется пара нормированных алгебр с делением $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}'$, существует риманово многообразие $(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')\mathbb{P}^2$ с

$$\mathfrak{isom}((\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')\mathbb{P}^2) \cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}'),$$

где для любой $*$-алгебры мы определяем

$$\begin{aligned} \mathfrak{sh}_n(A) &= \{x \in A[n]\colon\ x^* = x,\ \mathrm{tr}(x) = 0\} \\ \mathfrak{sa}_n(A) &= \{x \in A[n]\colon\ x^* = -x,\ \mathrm{tr}(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Это стало мотивом Винберговского определения **магического квадрата** алгебр Ли

$$\mathrm{M}(\mathbb{K}, \mathbb{K}') = \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}').$$

Теперь, когда $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}'$ коммутативно и ассоциативно, $\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')$ является алгеброй Ли с коммутатором в качестве её скобок Ли, но в действительно интересных случаях это не так. Таким образом, чтобы превратить $\mathrm{M}(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$ в алгебру Ли, мы должны снабдить её гораздо более хитроумной скобкой. Мы уже рассматривали частный случай $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ в уравнении (20). В общем случае, скобка Ли в $\mathrm{M}(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$ задаётся следующим образом:

1. $\mathfrak{der}(\mathbb{K})$ и $\mathfrak{der}(\mathbb{K}')$ – коммутирующие подалгебры Ли в $\mathrm{M}(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$.
2. Скобка $D \in \mathfrak{der}(K) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{K}')$ с $x \in \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')$ задаётся применением $D$ к каждому элементу матрицы $x$, используя естественное действие $\mathfrak{der}(K) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{K}')$ как дифференцирований $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}'$.
3. Для данного $X, Y \in \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')$

$$[X, Y] = [X, Y]_0 + \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^{3} D_{X_{ij}, Y_{ij}}\,.$$

Здесь $[X,Y]_0$ – бесследовая часть $3\times 3$ матрицы $[X,Y]$, и для данных $x,y\in\mathbb{K}\otimes\mathbb{K}'$ мы определяем $D_{x,y}\in\mathfrak{der}(\mathbb{K})\oplus\mathfrak{der}(\mathbb{K}')$ следующим образом: $D_{x,y}$ является действительным билинейным по $x$ и $y$, и

$$D_{a\otimes a',b\otimes b'} = \langle a',b'\rangle D_{a,b} + \langle a,b\rangle D_{a',b'}\,,$$

где $a,b\in\mathbb{K}$, $a',b'\in\mathbb{K}'$, и $D_{a,b}, D_{a',b'}$ определены, как в уравнении (14).

С таким построением мы волшебным образом получаем следующий квадрат алгебр Ли:

| | $\mathbb{K}'=\mathbb{R}$ | $\mathbb{K}'=\mathbb{C}$ | $\mathbb{K}'=\mathbb{H}$ | $\mathbb{K}'=\mathbb{O}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ | $\mathfrak{so}(3)$ | $\mathfrak{su}(3)$ | $\mathfrak{sp}(3)$ | $\mathfrak{f}_4$ |
| $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ | $\mathfrak{su}(3)$ | $\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(3)$ | $\mathfrak{su}(6)$ | $\mathfrak{e}_6$ |
| $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ | $\mathfrak{sp}(3)$ | $\mathfrak{su}(6)$ | $\mathfrak{so}(12)$ | $\mathfrak{e}_7$ |
| $\mathbb{K}=\mathbb{O}$ | $\mathfrak{f}_4$ | $\mathfrak{e}_6$ | $\mathfrak{e}_7$ | $\mathfrak{e}_8$ |

Таблица 5 — Магический квадрат алгебр Ли $\mathrm{M}(\mathbb{K},\mathbb{K}')$

Мы будем главным образом интересоваться последним рядом (или столбцом), единственным, в котором участвуют октонионы. В этом случае можно принять конструкцию магического квадрата в качестве *определения* алгебр Ли $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ и $\mathfrak{e}_8$. Это определение оказывается совместимым с нашими предыдущими определениями $\mathfrak{f}_4$.

Начиная с винберговского определения магического квадрата алгебр Ли, можно легко восстановить оригинальное определение Титца. Чтобы это сделать, необходимы два факта. Во-первых,

$$\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}\otimes\mathbb{K}')\cong\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}')\;\oplus\;(\mathrm{Im}(\mathbb{K})\otimes\mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')).$$

Это легко увидеть непосредственной проверкой подходящих матриц. Во-вторых,

$$\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}))\cong\mathfrak{der}(\mathbb{K})\oplus\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K})$$

как векторные пространства. Это просто уравнения (19). Начав с винберговского определения и применив эти два факта, мы получим

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(\mathbb{K},\mathbb{K}') &= \mathfrak{der}(\mathbb{K})\oplus\mathfrak{der}(\mathbb{K}')\oplus\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}\otimes\mathbb{K}')\\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K})\oplus\mathfrak{der}(\mathbb{K}')\oplus\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}')\;\oplus\;(\mathrm{Im}(\mathbb{K})\otimes\mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}'))\\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K})\oplus\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}'))\;\oplus\;(\mathrm{Im}(\mathbb{K})\otimes\mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')).\end{aligned}$$

Последняя строка есть определение Титца магического квадрата алгебр Ли. В отличие от винберговского, оно не является явно симметричным по $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}'$. Это неудачное свойство отчасти обусловлено тем, что $\mathfrak{der}(\mathbb{K})\oplus\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}'))$ является замечательно большой подалгеброй Ли. Эта подалгебра действует на $\mathrm{Im}(\mathbb{K})\otimes\mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')$ очевидным образом, используя факт, что любое дифференцирование $\mathbb{K}$ отображает $\mathrm{Im}(\mathbb{K})$ на себя, и любое дифференцирование $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}')$ отображает $\mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')$ на себя. Однако, скобки двух элементов в $(\mathrm{Im}(\mathbb{K})\otimes\mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}'))$ являются своего рода путаницей.

Ещё одно описание магического квадрата было недавно дано Бартоном и Садбэри, [5]. Оно подчеркивает роль тройственности. Пусть $\mathfrak{tri}(\mathbb{K})$ является алгеброй Ли группы $\mathrm{Aut}(t)$, где $t$ – нормированная тройственность, создающая нормированную алгебру с делением $\mathbb{K}$. Из уравнений (5) мы имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{tri}(\mathbb{R}) &\cong \{0\}\\ \mathfrak{tri}(\mathbb{C}) &\cong \mathfrak{u}(1)^2\\ \mathfrak{tri}(\mathbb{H}) &\cong \mathfrak{sp}(1)^3\\ \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) &\cong \mathfrak{so}(8).\end{aligned}\qquad(21)$$

Чтобы выразить магический квадрат в терминах этих алгебр Ли, необходимы три факта. Во-первых, легко видеть, что

$$\mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{R}^2.$$

Во-вторых, Бартон и Садбэри показали, что как векторные пространства,

$$\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})) \cong \mathfrak{tri}(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}^3.$$

Это следует из уравнения (21) для каждого случая по отдельности, но они дали унифицированное доказательство, охватывающее все варианты. В-третьих, они показали, что векторные пространства

$$\mathfrak{tri}(\mathbb{K}) \cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{K})^2.$$

Теперь, начиная с определения магического квадрата Титца, применяя первые два факта, перегруппировывая члены, и применяя третий факт, мы получаем магический квадрат по версии Бартона и Садбэри:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(\mathbb{K},\mathbb{K}') &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}')) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{K}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')) \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{K}') \oplus \mathbb{K}'^3 \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{K}) \otimes (\mathbb{K}'^3 \oplus \mathbb{R}^2) \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{K})^2 \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{K}') \oplus (\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')^3 \\ &\cong \mathfrak{tri}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{K}') \oplus (\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')^3. \end{aligned}$$

В следующих трёх разделах мы используем все эти разные версии магического квадрата, чтобы получить ряд октонионных описаний $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ и $\mathfrak{e}_8$. Для экономии места мы обычно опускаем формулы для скобок Ли в этих описаниях. Однако, терпеливый читатель может восстановить их с помощью статьи Бартона и Садбэри, которая переполнена полезными формулами.

Продолжая экскурс в исключительные алгебры Ли, мы установим связь с работой Адамса [2], построив $\mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7$, и $\mathfrak{e}_8$ с помощью спиноров и алгебр Ли групп вращений:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_4 &\cong \mathfrak{so}(9) \oplus S_9 \\ \mathfrak{e}_6 &\cong \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus S_{10} \\ \mathfrak{e}_7 &\cong \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus S_{12}^+ \\ \mathfrak{e}_8 &\cong \mathfrak{so}(16) \oplus S_{16}^+ \end{aligned}$$

как векторные пространства. Заметим, что числа 9, 10, 12 и 16 на 8 больше, чем размерности $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$. Как обычно, это не простое совпадение! В терминах октонионов, периодичность Ботта означает, что

$$S_{n+8} \cong S_n \otimes \mathbb{O}^2.$$

Это даёт следующее описание спиноров в размерностях $\leq 16$:

| | |
|---|---|
| $S_1 = \mathbb{R}$ | $S_9 = \mathbb{O}^2$ |
| $S_2 = \mathbb{C}$ | $S_{10} = (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})^2$ |
| $S_3 = \mathbb{H}$ | $S_{11} = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2$ |
| $S_4^{\pm} = \mathbb{H}$ | $S_{12}^{\pm} = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2$ |
| $S_5 = \mathbb{H}^2$ | $S_{13} = (\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{O})^2$ |
| $S_6 = \mathbb{C}^4$ | $S_{14} = (\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{O})^2$ |
| $S_7 = \mathbb{O}$ | $S_{15} = (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2$ |
| $S_8^{\pm} = \mathbb{O}$ | $S_{16}^{\pm} = (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2$ |

Таблица 6 – Спинорные представления (переработанные)

Поскольку спиноры в размерностях $1, 2, 4$ и $8$ изоморфны алгебрам деления $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$, спиноры в размерностях, на 8 больших, изоморфны "плоскостям" $\mathbb{O}^2, (\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})^2, (\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})^2$ и $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})^2$ – и таким образом тесно связаны с $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ и $\mathfrak{e}_8$ благодаря магическому квадрату.

### 4.4 $\mathrm{E}_6$

Мы начинаем с 78-мерной исключительной группы Ли $\mathrm{E}_6$. Как мы отмечали в разделе 3.4, имеется красивое описание определённой некомпактной действительной формы $\mathrm{E}_6$ как группы коллинеаций $\mathbb{OP}^2$, или, что эквивалентно, группы линейных преобразований $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, сохраняющих детерминант. Но перед тем, как в них углубиться, мы рассмотрим построения магических квадратов алгебры Ли $\mathfrak{e}_6$. Винберговская конструкция даёт

$$\mathfrak{e}_6 = \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O}).$$

Конструкция Титца, которая асимметрична, даёт

$$\mathfrak{e}_6 \cong \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})$$

и также

$$\mathfrak{e}_6 \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{C})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O})\otimes\mathfrak{sh}_3(\mathbb{C})).$$

Конструкция Бартона-Садбэри даёт

$$\mathfrak{e}_6 \cong \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})^3.$$

Можно использовать любую из них для определения размерности $\mathfrak{e}_6$. К примеру, мы имеем

$$\dim(\mathfrak{e}_6) = \dim(\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}))) + \dim(\mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})) = 52 + 26 = 78.$$

Начиная с конструкции Бартона-Садбэри и используя конкретные описания $\mathfrak{tri}(\mathbb{O})$ и $\mathfrak{tri}(\mathbb{C})$ из уравнения (21), мы получаем

$$\mathfrak{e}_6 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})^3$$

Используя уравнение (17), мы можем переписать это в виде

$$\mathfrak{e}_6 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}\oplus\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})^2$$

и оказывается, что слагаемое $\mathfrak{so}(\mathbb{O}\oplus\mathbb{C})\oplus\mathrm{Im}(\mathbb{C})$ на самом деле является подалгеброй Ли $\mathfrak{e}_6$. Этот результат можно также найти в книге Адамса [2], сформулированный следующим образом:

$$\mathfrak{e}_6 \cong \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus S_{10}$$

На самом деле, он описывает скобки в $\mathfrak{e}_6$ в терминах естественных операций, относящихся к $\mathfrak{so}(10)$ и её спинорному представлению $S_{10}$. Забавно выглядящий множитель $\mathfrak{u}(1)$ возникает из того факта, что спинорное представление является комплексным. Скобка элемента $\mathfrak{u}(1)$ и элемента $S_{10}$ является другим элементом $S_{10}$, определённым посредством очевидного действия $\mathfrak{u}(1)$ на этом комплексном пространстве.

Если мы определим $\mathrm{E}_6$ как односвязную группу с алгеброй Ли $\mathfrak{e}_6$, из результатов Адамса следует, что подгруппа, порождённая подалгеброй Ли $\mathfrak{so}(10)\oplus\mathfrak{u}(1)$ изоморфна $(\mathrm{Spin}(10)\times\mathrm{U}(1))/\mathbb{Z}_4$. Это позволяет определить **биоктонионную проективную плоскость** посредством

$$(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2 = \mathrm{E}_6 \,/\, ((\mathrm{Spin}(10)\times\mathrm{U}(1))/\mathbb{Z}_4)$$

и сделать вывод, что касательная плоскость в любой точке этого многообразия изоморфна $S_{10} \cong (\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})^2$.

Поскольку $\mathrm{E}_6$ компактна, мы можем задать $\mathrm{E}_6$-инвариантную риманову метрику на биоктонионной проективной плоскости усреднением любой метрики по отношению к действию этой группы. Оказывается [6], что группа изометрий этой метрики в точности является $\mathrm{E}_6$, так что мы имеем

$$\mathrm{E}_6 \cong \mathrm{Isom}((\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2).$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{e}_6 \cong \mathfrak{isom}((\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2).$$

Суммируя, мы имеем шесть октонионных описаний $\mathrm{e}_6$:

**Теорема 6.** *Компактная действительная форма* $\mathrm{e}_6$ *задается посредством*

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_6 &\cong \mathfrak{isom}((\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2)\\
&\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{C})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O})\otimes\mathfrak{sh}_3(\mathbb{C}))\\
&\cong \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})\\
&\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\\
&\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}\oplus\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})^2\\
&\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})^3,
\end{aligned}$$

*где в каждом случае скобка Ли в* $\mathrm{e}_6$ *строится из естественных билинейных операций над слагаемыми.*

Наименьшие нетривиальные представления $\mathrm{E}_6$ 27-мерны: на самом деле она имеет два неэквивалентных представления этой размерности, которые дуальны друг к другу. Но исключительная йорданова алгебра также 27-мерна, и в 1950 эта улика (clue) привела Шевалье и Шафера [21] к замечательному описанию $\mathrm{E}_6$ как симметрий этой алгебры. Эти симметрии не сохраняют произведения, а только детерминант.

Более точно, группа линейных преобразований $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, сохраняющая определитель, оказывается некомпактной действительной формой $\mathrm{E}_6$. Эта действительная форма иногда называется $\mathrm{E}_{6(-26)}$, поскольку её форма Киллинга имеет сигнатуру $-26$. Чтобы в этом убедиться, заметим, что любой автоморфизм $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ сохраняет определитель, так что мы получаем включение

$$\mathrm{F}_4 \hookrightarrow \mathrm{E}_{6(-26)}.$$

Это значит, что $\mathrm{F}_4$ есть компактная подгруппа $\mathrm{E}_{6(-26)}$. На самом деле, это максимальная компактная подгруппа, поскольку если бы существовали б**о**льшие подгруппы, можно было бы усреднить риманову метрику на $\mathbb{OP}^2$ по отношению к этой группе и получить метрику с группой изометрии, большей, чем $\mathrm{F}_4$, но такой метрики не существует. Отсюда следует, что форма Киллинга на алгебре Ли $\mathrm{e}_{6(-26)}$ отрицательно определена на её 52-мерной максимальной компактной алгебре Ли $\mathfrak{f}_4$, и положительно определена на дополнительном к нему 26-мерном подпространстве, и сигнатура, следовательно, равна $26 - 52 = -26$.

Мы видели в разделе 3.4, что структура проективной плоскости $\mathbb{OP}^2$ может быть построена, исходя только из функции определителя на векторном пространстве $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Отсюда следует, что $\mathrm{E}_{6(-26)}$ действует как **коллинеации** на $\mathbb{OP}^2$, т. е. преобразования, сохраняющие прямые. На самом деле, группа коллинеаций $\mathbb{OP}^2$ есть в точности $\mathrm{E}_{6(-26)}$:

$$\mathrm{E}_{6(-26)} \cong \mathrm{Coll}(\mathbb{OP}^2).$$

Более того, точно так же, как группа изометрий $\mathbb{OP}^2$, фиксирующая избранную точку, является копией $\mathrm{Spin}(9)$, группа коллинеаций, фиксирующая избранную точку, есть $\mathrm{Spin}(9,1)$. Этот факт следует из определённых выкладок, начинающихся с уравнения (8), и даёт коммутативный квадрат включений:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spin}(9) & \longrightarrow & \mathrm{Isom}(\mathbb{OP}^2) \cong \mathrm{F}_4\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathrm{Spin}(9,1) & \longrightarrow & \mathrm{Coll}(\mathbb{OP}^2) \cong \mathrm{E}_{6(-26)},
\end{array}$$

где группы вверху являются максимальными компактными подгруппами групп внизу. Таким образом в очень реальном смысле $\mathrm{F}_4$ относится к 9-мерной евклидовой геометрии так же, как $\mathrm{E}_{6(-26)}$ относится к 10-мерной лоренцевой геометрии.

### 4.5 $\mathrm{E}_7$

Теперь мы обратимся к 133-мерной исключительной группе Ли $\mathrm{E}_7$. В 1954 Фройденталь [41] описал эту группу как группу автоморфизмов 56-мерной октонионной структуры, теперь называемой "тройной системой Фройденталя". Мы кратко описываем эту идею ниже, но сначала дадим несколько конструкций магических квадратов. Винберговская версия магического квадрата дает

$$\mathrm{e}_7 = \mathfrak{der}(\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}).$$

Версия Титца дает

$$\mathrm{e}_7 \cong \mathfrak{der}(\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})). \qquad (22)$$

и также

$$\mathrm{e}_7 \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{H})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{H})).$$

По версии Бартона-Садбери:

$$\mathrm{e}_7 \cong \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{H}) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^3. \qquad (23)$$

Начиная с уравнения (22) и пользуясь тем, что $\mathfrak{der}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 3-мерна, получаем элегантную формулу:

$$\mathrm{e}_7 \cong \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \;\oplus\; \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^3.$$

Это предоставляет блестящую возможность вычислить размерность $\mathrm{e}_7$:

$$\dim(\mathrm{e}_7) = \dim(\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}))) + 3\dim(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) = 52 + 3 \cdot 27 = 133.$$

Начиная с уравнения (23) и пользуясь конкретными описаниями $\mathfrak{tri}(\mathbb{H})$ и $\mathfrak{tri}(\mathbb{O})$ из уравнения (21), мы получаем

$$\mathrm{e}_7 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^3.$$

Используя уравнение (17), можно переписать это в виде

$$\mathrm{e}_7 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{H}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2.$$

Хотя из проделанных нами вычислений это не очевидно, прямое слагаемое $\mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{H}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ здесь на самом деле является подалгеброй Ли $\mathrm{e}_7$. Этот результат также можно найти в книге Адамса на менее октонионном языке [2]:

$$\mathrm{e}_7 \cong \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus S_{12}^+$$

Он описывает скобку в $\mathrm{e}_7$ в терминах естественных операций, затрагивающих $\mathfrak{so}(12)$ и её спинорное представление $S_{12}^+$. Множитель забавного вида $\mathfrak{sp}(1)$ появляется потому, что это представление – кватернионное. Скобки элемента $\mathfrak{sp}(1)$ и элемента $S_{12}^+$ являются элементом $S_{12}^+$, определённым с использованием естественного действия $\mathfrak{sp}(1)$ в этом пространстве.

Если принять, что $\mathrm{E}_7$ – односвязная группа с алгеброй Ли $\mathrm{e}_7$, из результата Адамса [2] следует, что подгруппа, порождённая подалгеброй Ли $\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, изоморфна $(\mathrm{Spin}(12) \times \mathrm{Sp}(1))/\mathbb{Z}_2$. Это позволяет определить **кватероктонионную проективную плоскость** посредством

$$(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2 = \mathrm{E}_7 \,/\, ((\mathrm{Spin}(12) \times \mathrm{Sp}(1))/\mathbb{Z}_2)$$

и сделать вывод, что касательная плоскость в любой точке этого многообразия изоморфна $S_{12}^+ \cong (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2$. Можно определить $\mathrm{E}_7$-инвариантную риманову метрику на этом многообразии методом усреднения по групповому действию. Тогда оказывается [6], что

$$\mathrm{E}_7 \cong \mathrm{Isom}((\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2)$$

и таким образом

$$\mathrm{e}_7 \cong \mathfrak{isom}((\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2).$$

Суммируя, имеем следующие семь октонионных описаний $\mathrm{e}_7$:

**Теорема 7.** *Компактная действительная форма* $\mathfrak{e}_7$ *задается выражением*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_7 &\cong \mathfrak{isom}((\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2)\\
&\cong \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}))\oplus\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^3\\
&\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O})\oplus\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{H}))\oplus(\mathrm{Im}(\mathbb{O})\otimes\mathfrak{sh}_3(\mathbb{H}))\\
&\cong \mathfrak{der}(\mathbb{H})\oplus\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}))\oplus(\mathrm{Im}(\mathbb{H})\otimes\mathfrak{sh}_3(\mathbb{O}))\\
&\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O})\oplus\mathfrak{der}(\mathbb{H})\oplus\mathfrak{sa}_3(\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})\\
&\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}\oplus\mathbb{H})\oplus\mathrm{Im}(\mathbb{H})\oplus(\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})^2\\
&\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O})\oplus\mathfrak{so}(\mathbb{H})\oplus\mathrm{Im}(\mathbb{H})\oplus(\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})^3,
\end{aligned}$$

*где в каждом случае скобка Ли в* $\mathfrak{e}_7$ *строится из естественных билинейных операций над слагаемыми.*

Перед тем, как был изобретён магический квадрат, Фройденталь [41] использовал другую октонионную конструкцию для исследования $\mathrm{E}_7$. Наименьшее нетривиальное представление этой группы 56-мерно. Фройденталь показал, что можно определить 56-мерное пространство

$$F=\{\begin{pmatrix}\alpha & x\\ y & \beta\end{pmatrix}:\ x,y\in\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

и снабдить это пространство симплектической структурой

$$\omega\colon F\times F\to\mathbb{R}$$

и трилинейным произведением

$$\tau\colon F\times F\times F\to F$$

таким, что группа линейных преобразований, сохраняющих обе эти структуры, является определённой некомпактной действительной формой $\mathrm{E}_7$, а именно $\mathrm{E}_{7(-25)}$. Симплектическая структура и трилинейное произведение на $F$ удовлетворяют некоторым соотношениям, и алгебраисты сделали их определением "Фройденталевской" тройной системы [13,36,72]. Геометрическое значение этого, весьма сложного, рода структур недавно было прояснено некоторыми физиками, работающими в теории струн. В конце предыдущего раздела мы упомянули связь между между 9-мерной эвклидовой геометрией и $\mathrm{F}_4$, и соответствующую связь между 10-мерной лоренцевой геометрией и $\mathrm{E}_{6(-26)}$. Мурат Гюнайдин [48] расширил его до соотношения между 10-мерной *конформной* геометрией и $\mathrm{E}_{7(-25)}$, и в работе с Килианом Кёпселем и Германом Николаи [49] явно указал, как оно связано с тройными системами Фройденталя.

### 4.6 $\mathrm{E}_8$

С 248 размерностями $\mathrm{E}_8$ является наибольшей из исключительных групп Ли и в некоторых отношениях наиболее загадочной. Легче всего понять группу, представляя её как симметрии структуры, которая уже понятна. Из всех простых групп Ли, $\mathrm{E}_8$ единственная, наименьшее нетривиальное представление которой является сопряжённым представлением. Это значит, что в контексте линейной алгебры $\mathrm{E}_8$ наиболее просто описывается как группа симметрий её собственной алгебры Ли! Одним из выходов из этого порочного круга могло бы стать описание $\mathrm{E}_8$ как изометрий риманова многообразия. Как уже упоминалось, $\mathrm{E}_8$ является группой изометрий 128-мерного многообразия, называемого $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$. Но увы, кажется, никто не знает, как определить $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$ без предшествующего определения $\mathrm{E}_8$. Таким образом, эта группа остаётся немного таинственной.

На данный момент, чтобы подойти к $\mathrm{E}_8$, необходимо начинать с её алгебры Ли. Можно определить её, используя одну из трёх эквивалентных конструкций магического квадрата, объяснённых в разделе 4.3. Конструкция Винберга даёт

$$\mathfrak{e}_8=\mathfrak{der}(\mathbb{O})\oplus\mathfrak{der}(\mathbb{O})\oplus\mathfrak{sa}_3(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}).$$

Конструкция Титца даёт

$$\mathrm{e}_8 \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})).$$

Конструкция Бартона-Садбэри даёт

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_8 &\cong \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^3 \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^3. \end{aligned} \tag{24}$$

Можно использовать любую из них, чтобы подсчитать размерность $\mathrm{e}_8$; например, последняя даёт

$$\dim \mathrm{e}_8 = 28 + 28 + 3 \cdot 8^2 = 248.$$

Чтобы подчеркнуть важность тройственности, мы можем переписать уравнение (24) в виде:

$$\mathrm{e}_8 \cong \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8) \oplus (V_8 \otimes V_8) \oplus (S_8^+ \otimes S_8^+) \oplus (S_8^- \otimes S_8^-). \tag{25}$$

Здесь скобка Ли строится из естественных отображений, относящихся к $\mathfrak{so}(8)$ и её трем 8-мерным неприводимым представлениям. В частности, $\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$ является подалгеброй Ли, и первая копия $\mathfrak{so}(8)$ действует на первый множитель в $V_8 \otimes V_8$, $S_8^+ \otimes S_8^+$, и $S_8^- \otimes S_8^-$, в то время, как вторая копия действует на второй множитель в каждом из них. Читателю предлагается сравнить это с описанием $\mathfrak{f}_4$ в уравнении (18).

Теперь, из уравнения (17) следует, что

$$\mathfrak{so}(16) \cong \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8) \oplus (V_8 \otimes V_8).$$

Вместе с уравнением (25) это подразумевает, что $\mathrm{e}_8$ содержит $\mathfrak{so}(16)$ в качестве подалгебры Ли. Это действительно так! Даже лучше: если ограничить правое спинорное представление $\mathfrak{so}(16)$ до $\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$, оно разлагается как

$$S_{16}^+ \cong (S_8^+ \otimes S_8^+) \oplus (S_8^- \otimes S_8^-),$$

так что мы получаем

$$\mathrm{e}_8 \cong \mathfrak{so}(16) \oplus S_{16}^+ \tag{26}$$

или на более октонионном языке

$$\mathrm{e}_8 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2,$$

где мы используем $\mathfrak{so}(V)$ для обозначения алгебры Ли кососопряжённых (skew-adjoint) действительных линейных преобразований линейного пространства с действительным скалярным произведением $V$.

Действительно замечательный факт относительно уравнения (26) заключается в том, что скобка Ли в $\mathrm{e}_8$ целиком строится из естественных отображений, относящихся к $\mathfrak{so}(16)$ и $S_{16}^+$:

$$\mathfrak{so}(16) \otimes \mathfrak{so}(16) \to \mathfrak{so}(16), \qquad \mathfrak{so}(16) \otimes S_{16}^+ \to S_{16}^+, \qquad S_{16}^+ \otimes S_{16}^+ \to \mathfrak{so}(16).$$

Первая из них является скобкой Ли в $\mathfrak{so}(16)$, вторая является действием $\mathfrak{so}(16)$ на её правом спинорном представлении и третья получается из второй с помощью двойственности, используя естественное скалярное произведение на $\mathfrak{so}(16)$ и $S_{16}^+$ для отождествления этих пространств с дуальными им. На самом деле, это очень эффективный способ *определения* $\mathrm{e}_8$. Если мы принимаем этот подход, мы должны проверить соблюдение тождества Якоби:

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]].$$

Когда все три $a, b, c$ лежат в $\mathfrak{so}(16)$, это всего лишь тождество Якоби для $\mathfrak{so}(16)$. Когда два из них лежат в $\mathfrak{so}(16)$, оно сводится к тому факту, что спиноры действительно образуют представление $\mathfrak{so}(16)$. Благодаря двойственности, то же самое справедливо, когда только одно из них лежит в $\mathfrak{so}(16)$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $a, b, c$ все лежат в $S_{16}^{+}$. Это единственный случай, который использует какие-то специфические свойства числа 16. К сожалению, здесь по-видимому не обойтись без вычислений методом грубой силы. Два подхода, позволяющие уменьшить муки (pain), можно найти в книгах Адамса [2] и Грина, Шварца и Виттена [46]. Было бы прекрасно найти более концептуальный подход.

Отправляясь от $\mathrm{e}_8$, можно определить $\mathrm{E}_8$ как односвязную группу Ли с этой алгеброй Ли. Как было показано Адамсом [2], подгруппа $\mathrm{E}_8$, порождённая подалгеброй Ли $\mathfrak{so}(16) \subset \mathrm{e}_8$, есть $\mathrm{Spin}(16)/\mathbb{Z}_2$. Это позволяет определить **октооктонионную проективную плоскость** посредством

$$(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2 = \mathrm{E}_8 \,/\, (\mathrm{Spin}(16)/\mathbb{Z}_2).$$

Согласно уравнению (26), касательное пространство в любой точке этого многообразия изоморфно $S_{16}^{+} \cong (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2$. Это частично оправдывает имя "октооктонионная проективная плоскость", хотя она, по-видимому, не удовлетворяет обычным аксиомам проективной плоскости.

Можно ввести $\mathrm{E}_8$-инвариантную риманову метрику на октооктонионной проективной плоскости методом усреднения по групповому действию. Оказывается [6], что

$$\mathrm{E}_8 \cong \mathrm{Isom}((\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2)$$

и, таким образом

$$\mathrm{e}_8 \cong \mathfrak{isom}((\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2).$$

Суммируя, мы имеем следующее октонионное описание $\mathrm{E}_8$:

**Теорема 8.** *Компактная действительная форма* $\mathrm{e}_8$ *задается посредством*

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_8 &\cong \mathfrak{isom}((\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2) \\
&\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})) \\
&\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}) \\
&\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2 \\
&\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^3
\end{aligned}$$

*где в каждом случае скобка Ли на* $\mathrm{e}_8$ *строится из естественных билинейных операций над слагаемыми.*

## 5 Заключение и выводы

Теперь должно быть ясно, что октонионы, кроме того, что являются удивительными математическими объектами сами по себе, также соединяют между собой много важных явлений, взаимосвязи которых иначе были бы совершенно непостижимы. На самом деле, полная картина этих взаимосвязей глубже и тщательнее проработана, чем автор мог объяснить здесь! Он также включает в себя:

- Попытки создать октонионный аналог теории аналитических функций (см. [51] и библиографию к этой работе).
- Роль йордановых пар, йордановых тройных систем и тройных систем Фройденталя в конструкции исключительных групп Ли [13, 36, 37, 49, 51, 71, 72].
- Конструкции $\mathrm{E}_8$-решётки и решётки Лича, использующие интегральные октонионы [26, 33].
- Тензорно-категорные (tensor-categorical) подходы к нормированным алгебрам деления и инвариант решетчатых трехвалентных графов (framed trivalent graphs), происходящих из квантовой группы, связанной с $\mathrm{G}_2$ [9, 12, 64, 81].
- Октонионные конструкции алгебр вертексных (вершинных) операторов [38].
- Октонионные конструкции исключительных простых супералгебр Ли [92].
- Октонионные конструкции симметрических пространств [6].

- Октонионы и геометрия "мятых (squashed) 7-сфер", т. е. однородных пространств Spin(7)/$G_2$, Spin(6)/SU(3), и Spin(5)/SU(2), все из которых диффеоморфны $S^7$ с её обычной гладкой структурой [22].
- Теория "многообразий Джойса", т. е. 7-мерных римановых многообразий с группой голономии $G_2$ [60].
- Октонионное отображение Хопфа и инстантонные решения уравнений Янга-Миллса в 8 размерностях [47].
- Октонионные аспекты 10-мерной теории суперструн и 10-мерной теории супер-Янга-Миллса [25, 29, 35, 65, 85, 86].
- Октонионные аспекты 11-мерных теорий супергравитации и супермембран, и роль многообразий Джойса в компактификации 11-мерной супергравитации для получения физических теорий в 4-х мерном пространстве [32].
- Расширение Джеффри Диксона Стандартной Модели, основанное на алгебре $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ [31].
- Другие попытки использования октонионов в физике [20, 51, 67, 76].

Автор рекомендует читателю исследовать эти вопросы с помощью приведённых ссылок.

**Благодарности**

Автор благодарен Джону Барретту, Тоби Бартельсу, Роберту Брайанту, Джеффри Диксону, Джеймсу Долану, Тевиану Дрею, Бертраму Константу, Линусу Крамеру, Пертти Лоунесто, Коринне Маноге, Джону Мак-Кэю, Давиду Русину, Тони Смиту, Антони Садбэри, и Мэттью Винеру за полезные обсуждения.

## Литература

[1] John F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Ann. Math.* **72** (1960), 20–104.

[2] John F. Adams, *Lectures on Exceptional Lie Groups*, eds. Zafer Mahmud and Mamoru Mimira, University of Chicago Press, Chicago, 1996.

[3] Michael Atiyah and Friedrich Hirzebruch, Bott periodicity and the parallelizability of the spheres. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **57** (1961), 223–226.

[4] Helena Albuquerque and Shahn Majid, Quasialgebra structure of the octonions, preprint math.QA/9802116.

[5] Chris H. Barton and Anthony Sudbery, Magic squares of Lie algebras, preprint math.RA/0001083.

[6] Arthur L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, Berlin, 1987, pp. 313–316.

[7] F. van der Blij, History of the octaves, *Simon Stevin* **34** (1961), 106–125.

[8] F. van der Blij and Tonny A. Springer, Octaves and triality, *Nieuw Arch. v. Wiskunde* **8** (1960), 158–169.

[9] Dominik Boos, *Ein tensorkategorieller Zugang zum Satz von Hurwitz*, Diplomarbeit, ETH Zurich, March 1998.

[10] Armand Borel, Le plan projectif des octaves et les sphéres commes espaces homogènes, *Compt. Rend. Acad. Sci.* **230** (1950), 1378–1380.

[11] Raoul Bott and John Milnor, On the parallelizability of the spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958) 87–89.

[12] Murray Bremner, Quantum octonions, *Comm. Alg.* **27** (1999), 2809–2831.

[13] Robert B. Brown, Groups of type $E_7$, *Jour. Reine Angew. Math.* **236** (1969), 79–102.

[14] Élie Cartan, *Sur la structure des groupes de tranformations finis et continus*, Thèse, Paris, Nony, 1894.

[15] Élie Cartan, Les groupes réels simples finis et continus, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **31** (1914), 255–262.

[16] Élie Cartan, Nombres complexes, in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, **1**, ed. J. Molk, 1908, 329–468.

[17] Élie Cartan, Le principe de dualité et la théorie des groupes simple et semi-simples, *Bull. Sci. Math.* **49** (1925), 361–374.

[18] Arthur Cayley, On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions, *Philos. Mag.* **26** (1845), 208–211.

[19] Arthur Cayley, On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions (appendix only), in *The Collected Mathematical Papers*, Johnson Reprint Co., New York, 1963, p. 127.

[20] Sultan Catto, Carlos J. Moreno and Chia-Hsiung Tze, *Octonionic Structures in Physics*, to appear.

[21] Claude Chevalley and Richard D. Schafer, The exceptional simple Lie algebras $\mathrm{F}_4$ and $\mathrm{E}_6$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **36** (1950), 137–141.

[22] Yvonne Choquet-Bruhat and Cécile DeWitt-Morette, *Analysis, Manifolds and Physics*, part II, Elsevier, Amsterdam, 2000, pp. 263–274.

[23] William K. Clifford, Applications of Grassmann's extensive algebra, *Amer. Jour. Math.* **1** (1878), 350–358.

[24] Frederick R. Cohen, On Whitehead squares, Cayley–Dickson algebras and rational functions, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **37** (1992), 55–62.

[25] E. Corrigan and T. J. Hollowood, The exceptional Jordan algebra and the superstring, *Comm. Math. Phys.* **122** (1989), 393–410.

[26] Harold Scott MacDonald Coxeter, Integral Cayley numbers, *Duke Math. Jour.* **13** (1946), 561–578.

[27] Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1967.

[28] C. W. Curtis, The four and eight square problem and division algebras, in *Studies in Modern Algebra*, ed. A. Albert, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963, pp. 100–125.

[29] Pierre Deligne *et al*, eds., *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, 2 volumes, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1999.

[30] Leonard E. Dickson, On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem, *Ann. Math.* **20** (1919), 155–171.

[31] Geoffrey M. Dixon, *Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics*, Kluwer, Dordrecht, 1994.

[32] M. J. Duff, ed., *The World in Eleven Dimensions: Supergravity, Supermembranes and M-Theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1999.

[33] Noam Elkies and Benedict H. Gross, The exceptional cone and the Leech lattice, *Internat. Math. Res. Notices* **14** (1996), 665–698.

[34] Gerard G. Emch, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1972.

[35] J. M. Evans, Supersymmetric Yang–Mills theories and division algebras, *Nucl. Phys.* **B298** (1988), 92–108.

[36] John R. Faulkner, A construction of Lie algebras from a class of ternary algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **155** (1971), 397–408.

[37] John R. Faulkner and Joseph C. Ferrar, Exceptional Lie algebras and related algebraic and geometric structures, *Bull. London Math. Soc.* **9** (1977), 1–35.

[38] Alex J. Feingold, Igor B. Frenkel, and John F. X. Ries, *Spinor Construction of Vertex Operator Algebras, Triality, and* $\mathrm{E}_8^{(1)}$, Contemp. Math. 121, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.

[39] Hans Freudenthal, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, mimeographed notes, 1951. Also available in *Geom. Dedicata* **19** (1985), 7–63.

[40] Hans Freudenthal, Zur ebenen Oktavengeometrie, *Indag. Math.* **15** (1953), 195–200.

[41] Hans Freudenthal, Beziehungen der $e_7$ und $e_8$ zur Oktavenebene, I, II, *Indag. Math.* **16** (1954), 218–230, 363–368. III, IV, *Indag. Math.* **17** (1955), 151–157, 277–285. V — IX, *Indag. Math.* **21** (1959), 165–201, 447–474. X, XI, *Indag. Math.* **25** (1963) 457–487.

[42] Hans Freudenthal, Lie groups in the foundations of geometry, *Adv. Math.* **1** (1964), 145–190.

[43] Hans Freudenthal, Bericht über die Theorie der Rosenfeldschen elliptischen Ebenen, in *Raumtheorie*, Wege Der Forschung, CCLXX, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978, pp. 283–286.

[44] Lynn E. Garner, *An Outline of Projective Geometry*, North Holland, New York, 1981.

[45] Robert Perceval Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 volumes, Arno Press, New York, 1975.

[46] Michael B. Green, John H. Schwarz and Edward Witten, *Superstring Theory*, volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, pp. 344–349.

[47] B. Grossman, T. E. Kephart, and James D. Stasheff, Solutions to Yang-Mills field equations in eight dimensions and the last Hopf map, *Comm. Math. Phys.* **96** (1984), 431–437.

[48] Murat Günaydin, Generalized conformal and superconformal group actions and Jordan algebras, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993), 1407–1416.

[49] Murat Günaydin, Kilian Koepsell, and Hermann Nicolai, Conformal and quasiconformal realizations of exceptional Lie groups, preprint hep-th/0008063.

[50] Murat Günaydin, C. Piron and H. Ruegg, Moufang plane and octonionic quantum mechanics, *Comm. Math. Phys.* **61** (1978), 69–85.

[51] Feza Gürsey and Chia-Hsiung Tze, *On the Role of Division, Jordan, and Related Algebras in Particle Physics*, World Scientific, Singapore, 1996.

[52] William Rowan Hamilton, Four and eight square theorems, in Appendix 3 of *The Mathematical Papers of William Rowan Hamilton*, vol. 3, eds. H. Halberstam and R. E. Ingram, Cambridge University Press, Cambridge, 1967, pp. 648–656.

[53] Thomas L. Hankins, *Sir William Rowan Hamilton*, John Hopkins University Press, Baltimore, 1980.

[54] F. Reese Harvey, *Spinors and Calibrations*, Academic Press, San Diego, 1990.

[55] Adolf Hurwitz, Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1898) 309–316.

[56] Dale Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer, Berlin, 1994.

[57] Pascual Jordan, Über eine Klasse nichtassociativer hyperkomplexer Algebren, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1932), 569–575.

[58] Pascual Jordan, Über eine nicht-desarguessche ebene projektive Geometrie, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **16** (1949), 74–76.

[59] Pascual Jordan, John von Neumann, Eugene Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Ann. Math.* **35** (1934), 29–64.

[60] Dominic Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford U. Press, Oxford, 2000.

[61] I. L. Kantor and A. S. Solodovnikov, *Hypercomplex Numbers — an Elementary Introduction to Algebras,* Springer, Berlin, 1989.

[62] Michel Kervaire, Non-parallelizability of the $n$ sphere for $n > 7$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **44** (1958), 280–283.

[63] Wilhelm Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I, *Math. Ann.* **31** (1888), 252–290. II, **33** (1889) 1–48. III, **34** (1889), 57–122. IV **36** (1890), 161–189.

[64] Greg Kuperberg, Spiders for rank 2 Lie algebras, *Comm. Math. Phys.* **180** (1996), 109–151.

[65] T. Kugo and P.–K. Townsend, Supersymmetry and the division algebras, *Nucl. Phys.* **B221** (1983), 357–380.

[66] J. M. Landsberg and L. Manivel: The projective geometry of Freudenthal's magic square, preprint math.AG/9908039.

[67] Jaak Lohmus, Eugene Paal, and Leo Sorgsepp, *Nonassociative Algebras in Physics*, Hadronic Press, Palm Harbor, Florida, 1994.

[68] Corinne A. Manogue and Tevian Dray, Octonionic Möbius transformations, *Mod. Phys. Lett.* **A14** (1999), 1243–1256.

[69] Corinne A. Manogue and Jörg Schray, Finite Lorentz transformations, automorphisms, and division algebras, *Jour. Math. Phys.* **34** (1993), 3746–3767.

[70] Corinne A. Manogue and Jörg Schray, Octonionic representations of Clifford algebras and triality, *Found. Phys.* **26** (1996), 17–70.

[71] Kevin McCrimmon, Jordan algebras and their applications, *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 612–627.

[72] K. Meyberg, Eine Theorie der Freudenthalschen Tripelsysteme, I, II, *Indag. Math.* **30** (1968), 162–190.

[73] R. Guillermo Moreno, The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers, preprint q-alg/9710013.

[74] Ruth Moufang, Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **9** (1933), 207–222.

[75] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg, eds., *Lie Groups and Lie Algebras III*, Springer, Berlin, 1991, pp. 167–178.

[76] Susumu Okubo, *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[77] Roger Penrose and Wolfgang Rindler, *Spinors and Space-Time*, 2 volumes, Cambridge U. Press, Cambridge, 1985–86.

[78] Ian R. Porteous, *Topological Geometry*, Cambridge U. Press, 1981.

[79] Boris A. Rosenfeld, Geometrical interpretation of the compact simple Lie groups of the class E (Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* (1956) **106**, 600-603.

[80] Boris A. Rosenfeld, *Geometry of Lie Groups*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[81] Markus Rost, On the dimension of a composition algebra, *Doc. Math.* **1** (1996), 209–214.

[82] Helmut Salzmann *et al*, *Compact Projective Planes: With an Introduction to Octonion Geometry*, de Gruyter, Berlin, 1995.

[83] Richard D. Schafer, On algebras formed by the Cayley–Dickson process, *Amer. Jour. of Math.* **76** (1954) 435–446.

[84] Richard D. Schafer, *Introduction to Non-Associative Algebras*, Dover, New York, 1995.

[85] Jörg Schray, *Octonions and Supersymmetry*, Ph.D. thesis, Department of Physics, Oregon State University, 1994.

[86] G. Sierra, An application of the theories of Jordan algebras and Freudenthal triple systems to particles and strings, *Class. Quant. Grav.* **4** (1987), 227–236.

[87] Tonny A. Springer, The projective octave plane, I–II, *Indag. Math.* **22** (1960), 74–101.

[88] Tonny A. Springer, Characterization of a class of cubic forms, *Indag. Math.* **24** (1962), 259–265.

[89] Tonny A. Springer, On the geometric algebra of the octave planes, *Indag. Math.* **24** (1962), 451–468.

[90] Tonny A. Springer and Ferdinand D. Veldkamp, *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*, Springer, Berlin, 2000.

[91] Frederick W. Stevenson, *Projective Planes*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1972.

[92] Anthony Sudbery, Octonionic description of exceptional Lie superalgebras, *Jour. Math. Phys.* **24** (1983), 1986–1988.

[93] Anthony Sudbery, Division algebras, (pseudo)orthogonal groups and spinors, *Jour. Phys.* **A17** (1984), 939–955.

[94] Jacques Tits, Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels, *Bull. Acad. Roy. Belg. Sci.* **39** (1953), 309–329.

[95] Jacques Tits, Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels $E_6$ et $E_7$, *Bull. Acad. Roy. Belg. Sci.* **40** (1954), 29–40.

[96] Jacques Tits, Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles, *Indag. Math.* **28** (1966), 223–237.

[97] Jacques Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs,* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 386, Springer, Berlin, 1974.

[98] V. S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[99] E. B. Vinberg, A construction of exceptional simple Lie groups (Russian), *Tr. Semin. Vektorn. Tensorn. Anal.* **13** (1966), 7–9.

[100] Max Zorn, Theorie der alternativen Ringe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **8** (1930), 123–147.

[101] Max Zorn, Alternativkörper und quadratische Systeme, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **9** (1933), 395–402.

## The Octonions

**John C. Baez**

*Department of Mathematics, University of California*
*baez@math.ucr.edu*

The octonions are the largest of the four normed division algebras. While somewhat neglected due to their nonassociativity, they stand at the crossroads of many interesting fields of mathematics. Here we describe them and their relation to Clifford algebras and spinors, Bott periodicity, projective and Lorentzian geometry, Jordan algebras, and the exceptional Lie groups. We also touch upon their applications in quantum logic, special relativity and supersymmetry.

**Key-words**: octonions, division algebras, nonassociativity.