ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА НАД АЛГЕБРАМИ КЭЛИ-ДИКСОНА

Людковский С. В.

Кафедра прикладной математики Моск. Гос. Технич. Универс. МИРЕА
sludkowski@mail.ru

Настоящая статья посвящена некоммутативной версии преобразования Лапласа. Исследованы новые типы прямого и обратного преобразований типа Лапласа над общими алгебрами Кэли-Диксона, в частности, также телом кватернионов и алгеброй октонионов. Приведены примеры. Доказаны теоремы о свойствах образов таких преобразований, а также теоремы об образах и оригиналах в сочетании с операциями умножения, дифференцирования, интегрирования, свертки, сдвига и гомотетии.

1 Введение

Классическое преобразование Лапласа играет очень важную роль в комплексном анализе и имеет многочисленные применения, включая дифференциальные уравнения [3, 10, 17]. В данной статье определены и исследованы некоммутативный классический аналог преобразования Лапласа, а также новые типы преобразования Лапласа над алгеброй Кэли-Диксона. Для этого использованы предыдущие результаты автора о голоморфных и мероморфных функциях чисел Кэли-Диксона [12, 14, 15].

Как хорошо известно, кватернионы и действия над ними впервые были определены и исследованы У. Р. Гамильтоном в третьей четверти 19 века [6]. Впоследствии Кэли и Диксон ввели обобщения кватернионов, известные теперь как алгебры Кэли-Диксона [1, 7, 9, 19, 22]. Они, в частности кватернионы и октонионы, нашли применения в физике, например, использовались Максвеллом, Янгом и Миллсом при выводе своих уравнений, которые они потом переписали в вещественной форме из-за недостаточно развитого в то время математического анализа над такими алгебрами [4, 5, 11]. Это актуально, так как неабелевы калибровочные поля широко используются в теоретической физике [20]. В своих трудах Гамильтон, Кэли и Диксон указывали на необходимость развития анализа над кватернионами, октонионами и т. д. для последующего использования в механике и теории поля. В последнее время также исследовался суперматематический анализ над градуированными алгебрами [2, 8, 16], однако он, как правило, может быть охарактеризован как суперкоммутативный, например, над алгебрами Грассмана, в то время как случай алгебр Кэли-Диксона (соответствующий супернекоммутативному анализу) не исследовался другими авторами.

Напомним, что алгебра Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ над полем $\mathbf{R}$ имеет 2^r генераторов $\{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ таких, что $i_0 = 1$, $i_j^2 = -1$ для любого $j = 1, 2, ..., 2^r - 1$, $i_j i_k = -i_k i_j$ для любых $1 \le k \ne j \le 2^r - 1$, где $r \ge 1$. При этом алгебра $\mathcal{A}_{r+1}$ получается из алгебры $\mathcal{A}_r$ с помощью процедуры удвоения с помощью генератора i_{2^r}, в частности, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$ совпадает с полем комплексных чисел, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – тело кватернионов, $\mathcal{A}_3$ – алгебра октонионов, $\mathcal{A}_4$ – алгебра седенионов. Тело кватернионов ассоциативно, а алгебра октонионов альтернативна. Алгебра $\mathcal{A}_r$ ассоциативна со степенями, то есть, $z^{n+m} = z^n z^m$ для любых $n, m \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathcal{A}_r$, неассоциативна и неальтернативна для любого $r \ge 4$.

В начале данной статьи определено преобразование Лапласа. Далее исследованы новые виды прямого и обратного преобразований типа Лапласа над общими алгебрами Кэли-Диксона, в частности, телом кватернионов и алгеброй октонионов. Приведены примеры. Также доказаны необходимые теоремы об интегрировании функций $\mathcal{A}_r$ переменных. При этом выяснены особенности некоммутативного преобразования Лапласа, например, связанные с тем, что в алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ имеется $2^r - 1$ мнимых генераторов $\{i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ в отличии от одного для поля комплексных чисел, так что мнимое подпространство в $\mathcal{A}_r$ имеет размерность $2^r - 1$. Доказаны теоремы о свойствах образов таких преобразований, а также теоремы об образах и оригиналах в сочетании с операциями умножения, дифференцирования, интегрирования, свертки, сдвига и гомотетии. Приведено также расширение некоммутативного преобразования Лапласа для обобщенных функций; рассмотрено применение некоммутативного интегрального преобразования для решения дифференциальных уравнений. Все результаты данной статьи получены впервые.

2 Некоммутативные интегральные преобразования.

1. Определения. Функцию $f : \mathbf{R} \to \mathcal{A}_r$ назовем функцией-оригиналом, где $\mathcal{A}_r$ – алгебра Кэли-Диксона, которая может быть, в частности, $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ телом кватернионов или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ алгеброй октонионов, если она удовлетворяет следующим условиям $(1 - 3)$:

(1) $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера: $|f(t+h) - f(t)| \le A|h|^\alpha$, где $0 < \alpha \le 1$, $A = const > 0$, всюду на $\mathbf{R}$ может быть кроме точек разрыва первого рода. На каждом конечном интервале в $\mathbf{R}$ функция f может иметь только конечное число точек разрыва и только первого рода. Напомним, что точка t_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы слева и справа $\lim_{t\to t_0, t<t_0} f(t) =: f(t_0 - 0) \in \mathcal{A}_r$ и $\lim_{t\to t_0, t>t_0} f(t) =: f(t_0 + 0) \in \mathcal{A}_r$.

(2) $f(t) = 0$ для любого $t < 0$.

(3) $f(t)$ возрастает не быстрее, чем экспоненциальная функция, то есть, существуют постоянные $C = const > 0$, $s_0 = s_0(f) \in \mathbf{R}$, так что $|f(t)| < C\exp(s_0 t)$ для любого $t \in \mathbf{R}$.

Отметим, что для ограниченного оригинала можно взять $s_0 = 0$.

Если существует оригинал

(4) $F(p;\zeta) := \int_0^\infty f(t)e^{-pt-\zeta}dt$,

тогда $F(p)$ называется преобразованием Лапласа в точке $p \in \mathbf{K}$ функции-оригинала $f(t)$, где $\zeta \in \mathcal{A}_r$ – параметр.

Пусть $\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathcal{A}_r$ – путь такой, что ограничение $\gamma_l := \gamma|_{[-l,l]}$ спрямляемо для любого $0 < l \in \mathbf{R}$ и положим по определению

(5) $\int_\gamma f(z)dz = \lim_{l\to\infty} \int_{\gamma_l} f(z)dz$,

где $\mathcal{A}_r$ обозначает алгебру Кэли-Диксона, $2 \le r$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – тело кватернионов, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ – алгебра октонионов, а интегралы по спрямляемым путям были определены в §2.5 [14]. Они тогда определены вдоль кривых тоже, которые являются классами эквивалентности путей относительно возрастающих кусочно-гладких отображений $\tau : [a,b] \to [a_1, b_1]$, осуществляющих перепараметризацию путей. Тогда будем говорить, что несобственный интеграл (5) сходится.

Рассмотрим теперь функцию $f(z,\zeta)$ определенную для всех z из области U и для любых ζ в окрестности V кривой γ в $\mathcal{A}_r$. Интеграл $G(z) := \int_\gamma f(z,\zeta)d\zeta$ сходится равномерно в области U, если для любого $\epsilon > 0$ существует $l_0 > 0$ такое, что

(6) $|\int_\gamma f(z,\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_l} f(z,\zeta)d\zeta| < \epsilon$ для любых $z \in U$ и $l > l_0$. Аналогично рас-

сматривается случай γ неограниченной в одну сторону с $[0,\infty)$ вместо $(-\infty,\infty)$.

2. Замечание. Ниже рассматриваются теоремы о существовании преобразования Лапласа $F(p)$ и обратного к нему. В определении 1 определен некоммутативный аналог обыкновенного преобразования Лапласа, но можно рассмотреть более общее некоммутативное интегральное преобразование, так как $\mathbf{H}$ имеет 3, а $\mathbf{O}$ имеет 7 чисто мнимых генераторов, а в общем $\mathcal{A}_r$ имеет 2^r-1 мнимых генераторов, тогда как в поле комплексных чисел имеется лишь одна мнимая единица. Для определения $F(p)$ была использована $\exp(-u)$, где

(1) $u := pt$ линейно зависит от t и p. Но можно рассмотреть также нелинейную функцию $u = u(p,t)$, принимая в расчет некоммутативность алгебры $\mathcal{A}_r$.

3. Определение. Пусть $\{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ – это стандартные генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$ с $r \ge 2$. Положим

(1) $u(p,t) := p_0 t + M(p,t) + \zeta_0$, где $p = p_0 i_0 + p_1 i_1 + ... + p_{2^r-1} i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, $p_0, p_1, ..., p_{2^r-1} \in \mathbf{R}$,

(2) $M(p,t) = M(p,t;\zeta) = (p_1 t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 t + \zeta_2)\cos(p_3 t + \zeta_3) + i_3 \sin(p_2 t + \zeta_2)\sin(p_3 t + \zeta_3)]$ для кватернионов;

(3) $M(p,t) = M(p,t;\zeta) = (p_1 t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 t + \zeta_2)\cos(p_3 t + \zeta_3) + ... + i_6 \sin(p_2 t + \zeta_2) ... \sin(p_6 t + \zeta_6)\cos(p_7 t + \zeta_7) + i_7 \sin(p_2 t + \zeta_2) ... \sin(p_6 t + \zeta_6)\sin(p_7 t + \zeta_7)]$ для октонионов,

(3′) $M(p,t) = M(p,t;\zeta) = (p_1 t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 t + \zeta_2)$
$\cos(p_3 t + \zeta_3) + ... + i_{2^r-2} \sin(p_2 t + \zeta_2) ... \sin(p_{2^r-2} t + \zeta_{2^r-2})\cos(p_{2^r-1} t + \zeta_{2^r-1})$
$+ i_{2^r-1} \sin(p_2 t + \zeta_2) ... \sin(p_{2^r-2} t + \zeta_{2^r-2})\sin(p_{2^r-1} t + \zeta_{2^r-1})]$
для общей алгебры Кэли-Диксона с $2 \le r < \infty$, где $\zeta - \zeta_0 = \zeta_1 i_1 + ... + \zeta_{2^r-1} i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$ – параметр начальной фазы, $\zeta_j \in \mathbf{R}$ для любого $j = 0, 1, ..., 2^r - 1$. Более общим образом, пусть

(4) $u(p,t) = u(p,t;\zeta) = (p_0 t + v(p,t)) + \zeta_0$, где $v(p,t)$ является локально аналитической функцией, $Re(v(p,t)) = 0$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ и $t \in \mathbf{R}$, $Re(z) := (z + \tilde{z})/2$, $\tilde{z} = z^*$ – сопряженное число для $z \in \mathcal{A}_r$. Тогда общее некоммутативное преобразование Лапласа над $\mathcal{A}_r$ определяется формулой:

(5) $F_u(p;\zeta) := \int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t))dt$
для всех чисел $p \in \mathcal{A}_r$, для которых интеграл существует. В то же время компоненты p_j числа p и ζ_j для ζ в $v(p,t)$ мы запишем в p- и ζ-представлениях соответственно, так что

(6) $h_j = (-h i_j + i_j (2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k (h i_k^*)\})/2$ для любого $j = 1, 2, ..., 2^r - 1$,
$h_0 = (h + (2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k (h i_k^*)\})/2$,
где $2 \le r \in \mathbf{N}$, $h = h_0 i_0 + ... + h_{2^r-1} i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, $h_j \in \mathbf{R}$ для любого j, $h^* = \tilde{h}$ обозначает сопряженное число для h, $h \in \mathcal{A}_r$. Обозначим $F_u(p;\zeta)$ через $\mathcal{F}(f,u;p;\zeta)$.

Далее используются $u(p,t)$, задаваемые 2(1) или $3(1-3,3')$, если иная форма 3(4) не выделена.

4. Замечание. Использование функции $M(p,t)$, задаваемой формулами $(2,3)$ из определения 3 естественно возникает при рассмотрении сферических координат в базисе генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$, а также при рассмотрении итерированных экспоненциальных функций. Пусть $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$ – стандартные генераторы алгебры кватернионов $\mathbf{H}$, где $i_0 = 1$, $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1$, $i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3$, $i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1$, $i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$, тогда
$\exp(i_1(p_1 t + \zeta_1)\exp(-i_3(p_2 t + \zeta_2)\exp(-i_1(p_3 t + \zeta_3)))) = \exp(i_1(p_1 t + \zeta_1)\exp(-(p_2 t + \zeta_2)(i_3 \cos(p_3 t + \zeta_3) - i_2 \sin(p_3 t + \zeta_3))))$

$= \exp(i_1(p_1t+\zeta_1)(\cos(p_2t+\zeta_2) - \sin(p_2t+\zeta_2)(i_3\cos(p_3t+\zeta_3) - i_2\sin(p_3t+\zeta_3))))$
$= \exp((p_1t+\zeta_1)(i_1\cos(p_2t+\zeta_2)+i_2\sin(p_2t+\zeta_2)\cos(p_3t+\zeta_3)+i_3\sin(p_2t+\zeta_2)\sin(p_3t+\zeta_3)))$.

Далее по индукции выполняется равенство:

$\exp({}_{r+1}M(p,t;\zeta)) = \exp\{{}_rM((i_1p_1+...+i_{2^r-1}p_{2^r-1}),t;(i_1\zeta_1+...+i_{2^r-1}\zeta_{2^r-1})$ $\exp(-i_{2^r+1}(p_{2^r}t + \zeta_{2^r})\exp(-{}_rM((i_1p_{2^r+1} + ... + i_{2^r-1}p_{2^{r+1}-1}),t;(i_1\zeta_{2^r+1} + ... + i_{2^r-1}\zeta_{2^{r+1}-1})))\}$,
где i_{2^r} – генератор удвоения алгебры $\mathcal{A}_{r+1}$ из алгебры $\mathcal{A}_r$, так что $i_ji_{2^r} = i_{2^r+j}$ для любых $j = 0,...,2^r-1$, функция $M(p,t;\zeta)$ из определения 3 над $\mathcal{A}_r$ записана с нижним индексом ${}_rM$.

Запишем изображение в виде $F_u(p;\zeta) := \sum_{s=0}^{2^r-1} F_{u,s}(p;\zeta)i_s$, где функция f разложена в виде $f(t) = \sum_{s=0}^{2^r-1} f_s(t)i_s$, $f_s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ для любого $s = 0,1,...,2^r-1$, $F_{u,s}(p;\zeta)$ обозначает изображение функции-оригинала f_s.

Можно взять автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_r$ и вместо стандартных генераторов $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$ использовать новые генераторы $\{N_0,...,N_{2^r-1}\}$, а также задать $M(p,t;\zeta) = M_N(p,t;\zeta)$ относительно новых базисных генераторов, где $2 \le r \in \mathbf{N}$. В этом более общем случае изображение обозначим ${}_NF_u(p;\zeta)$ для оригинала $f(t)$ или более подробно обозначим его через ${}_N\mathcal{F}(f,u;p;\zeta)$.

Если $p = (p_0,p_1,0,...,0)$, то преобразования Лапласа 1(4) и 2(3,5) сводятся к комплексному случаю, то есть, данные выше определения для кватернионов, октонионов и общих алгебр Кэли-Диксона оправданы.

5. Теорема. *Если V – ограниченная окрестность спрямляемой кривой γ в $\mathcal{A}_r$, а последовательность функций $f_n : V \to \mathcal{A}_r$ равномерно сходится на V, где $2 \le r < \infty$, то существует предел*

$(i)\quad \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz.$

Доказательство. Для данного $\epsilon > 0$ в силу равномерной сходимости последовательности f_n существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/l$ для любых $n > n_0$, где $0 < l < \infty$ – длина спрямляемой кривой γ, $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$. В силу неравенства 2.7(4) [14] существуют две положительные постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что $|\int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_n(z)dz| < (\epsilon/l)lC_1\exp(C_2R^s) = \epsilon C_1\exp(C_2R^s)$, где $s = 2^r+2$, $0 < R < \infty$, так что V содержится в шаре $B(\mathcal{A}_r,z_0,R)$ в $\mathcal{A}_r$ радиуса R с центром в некоторой точке $z_0 \in \mathbf{K}$. Это означает справедливость равенства (i).

6. Теорема. *Если функция $f(z,\zeta)$ голоморфна по z и кусочно-непрерывна по ζ для любых z из односвязной (открытой) области U в $\mathcal{A}_r$ с $2 \le r < \infty$ и для всех ζ из окрестности V пути γ, где γ_l спрямляемы для любых $0 < l < \infty$, а интеграл $G(z) := \int_\gamma f(z,\zeta)d\zeta$ равномерно сходится в области U, то он является голоморфной в U функцией.*

Доказательство. Для любого $0 < l < \infty$ функция $\int_{\gamma_l} f(z,\zeta)d\zeta =: G_l(z)$ непрерывна по z в силу теоремы 5, что вместе с 1(6) в силу неравенства треугольника дает непрерывность функции $G(z)$ на U. В силу теорем 2.16 и 3.10 [14] интегральная голоморфность функции $G(z)$ влечет ее голоморфность. Но интегральную голоморфность достаточно установить во внутренности $Int(B(\mathcal{A}_r,z_0,R))$ любого шара $B(\mathcal{A}_r,z_0,R)$ содержащегося в U. Пусть ψ – спрямляемый путь такой, что $\psi \subset Int(B(\mathcal{A}_r,z_0,R))$. Поэтому $\int_\psi G(z)dz = \int_\psi(\int_\gamma f(z,\zeta)d\zeta)dz$. С помощью доказательства теоремы 2.7 [14] эти интегралы можно переписать в действительных координатах и с генераторами $i_0,...,i_{2^r-1}$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$. В силу равномерной сходимости $G(z)$ и теоремы Фубини можно изменить порядок интегрирования и тогда $\int_\psi G(z)dz = \int_\gamma(\int_\psi f(z,\zeta)dz)d\zeta = 0$, так как $\int_\psi f(z,\zeta)dz = 0$.

7. Теорема. *Для любого оригинала $f(t)$ его изображение $F_u(p;\zeta)$ определено в полупространстве $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > s_0\}$, где $2 \le r \in \mathbf{N}$, а показатель роста функции $f(t)$ не превосходит s_0, причем $F_u(p;\zeta)$ голоморфна по p в этом полупространстве, а также голоморфна по $\zeta \in \mathcal{A}_r$.*

Доказательство. Интеграл 1(4) или 3(5) абсолютно сходится при $Re(p) > s_0$, так как он мажорируется сходящимся интегралом

$|\int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t))dt| \le \int_0^\infty C\exp(-(s-s_0)t-\zeta_0)dt = C(s-s_0)^{-1}e^{-\zeta_0}$,

поскольку $|e^z| = \exp(Re(z))$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$ в силу следствия 3.3 [14]. При этом интеграл, получающийся из интеграла 1(4) или 3(5) дифференцированием по p, сходится также равномерно:

(i) $|\int_0^\infty f(t)[\partial\exp(-u(p,t))/\partial p]\,hdt| \le |h|\int_0^\infty Ct\exp(-(s-s_0)t-\zeta_0)dt = |h|C(s-s_0)^{-2}e^{-\zeta_0}$

для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как каждое $z \in \mathcal{A}_r$ можно записать в виде $z = |z|\exp(M)$, где $|z|^2 = z\tilde{z} \in [0,\infty) \subset \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) := (M+\tilde{M})/2 = 0$ согласно предложению 3.2 [14]. В силу уравнений 3(6)

$\partial(\int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt)/\partial\tilde{p} = 0$ и

$\partial(\int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt)/\partial\tilde{\zeta} = 0$, причем

$|\int_0^\infty f(t)[\partial\exp(-u(p,t;\zeta))/\partial\zeta].hdt| \le |h|\int_0^\infty C\exp(-(s-s_0)t-\zeta_0)dt = |h|C(s-s_0)^{-1}e^{-\zeta_0}$

для любого $h \in \mathcal{A}_r$. В силу сходимости интегралов выше $F_u(p;\zeta)$ (супер)дифференцируема по p и ζ, причем $\partial F_u(p;\zeta)/\partial\tilde{p} = 0$ и $\partial F_u(p;\zeta)/\tilde{\zeta} = 0$ в рассматриваемом (p,ζ)-представлении, следовательно, $F_u(p;\zeta)$ голоморфна по $p \in \mathbf{K}$ с $Re(p) > s_0$ и $\zeta \in \mathcal{A}_r$ в силу теоремы 6.

8. Замечание. В силу формулы 7(i), если p стремится к бесконечности так, что $Re(p) =: s$ стремится к $+\infty$, то $\lim_{s\to+\infty} F_u(p;\zeta) = 0$. Запишем p в полярном виде $p = \rho e^{M\theta}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, $|\theta| < \pi/2 - \delta$, где $\rho \ge 0$, а постоянная δ такая, что $0 < \delta < \pi/2$, тогда $F_u(p;\zeta)$ стремится к нулю равномерно по таким θ и M при p стремящемся к бесконечности, то есть, при ρ стремящемся к бесконечности, так как $e^{M\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)M$.

9. Определения и обозначения.

1. Пусть $\mathbf{1}$ обозначает единичный оператор на $\mathcal{A}_r$, то есть, $\mathbf{1}(h) = h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, где $\mathcal{A}_r$ обозначает алгебру Кэли-Диксона с 2^r стандартными генераторами $\{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$, $i_0 = 1$, $i_p^2 = -1$ для любого $p \ge 1$, $i_p i_s = -i_s i_p$ для любых $1 \le s \ne p \ge 1$. Рассмотрим также оператор сопряжения $\tilde{\mathbf{1}}(h) = \tilde{h}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$.

2. Будем различать символы: $e = \mathbf{1}(1)$ и $\tilde{e} = \tilde{\mathbf{1}}(1)$, где $1 \in \mathcal{A}_r$.

3. $\mathbf{1}$ и $\tilde{\mathbf{1}}$ не будем отождествлять и не будем сокращать взаимно между собой или с символом вида $\mathbf{1}\tilde{\mathbf{1}}$, или с другими основными символами; а символы e и $\tilde{e}$ не будем отождествлять друг с другом и не будем сокращать с выражениями вида $e\tilde{e}$ или с другими основными символами.

4. $(z^p z^q)$ отождествляется с z^{p+q}, а $(\tilde{z}^p\tilde{z}^q)$ отождествляется с $\tilde{z}^{p+q}$, где p и q - натуральные числа, $p, q = 1, 2, 3, ...$. В каждом слове полагаем, что в каждом его фрагменте типа $...(z^p\tilde{z}^q)...$ символ z^p расположен левее символа $\tilde{z}^q$.

5. Если w – некоторое слово или фраза, а $c \in \mathbf{R}$, то фразы cw и wc отождествляются; если $b, c \in \mathbf{R}$, то фразы $b(cw)$ и $(bc)w$ отождествляются.

6. При сопряжении используются следующие отождествления слов: $(a(\mathbf{1}b))^* = (\tilde{b}\tilde{\mathbf{1}})\tilde{a}$, $(a(eb))^* = (\tilde{b}\tilde{e})\tilde{a}$; а при обращении: $(a(\mathbf{1}b))^{-1} = (b^{-1}\mathbf{1})a^{-1}$, $(a(\tilde{\mathbf{1}}b))^{-1} = (b^{-1}\tilde{\mathbf{1}})a^{-1}$, $(a(eb))^{-1} = (b^{-1}e)a^{-1}$, $(a(\tilde{e}b))^{-1} = (b^{-1}\tilde{e})a^{-1}$, где $ab \ne 0$, $a, b \in \mathcal{A}_r$.

7. Слово $\{w_1...w_{k-1}(\{a_1...a_l\})_{q(l)}w_{k+1}...w_j\}_{q(j)}$ отождествляется со словом $\{w_1...w_{k-1}w_kw_{k+1}...w_j\}_{q(j)}$, а также со словами $\{w_1...w_{k-1}bw_{k+1}...w_j\}_{q(j)}$, $\{(w_1)...w_{k-1}bw_{k+1}...w_j\}_{q(j)}$, где $w_k = (\{a_1...a_l\})_{q(l)}$, $a_1,...,a_l \in \mathcal{A}_r$, $l,k,j \in \mathbf{N}$, $cb = w_k$, $c \in \mathbf{R}$, $b \in \mathcal{A}_r$.

8. Фразы являются суммами слов. Суммы могут быть конечными или бесконечными счетными. Фраза $aw+bw$ отождествляется со словом $(a+b)w$, а фраза $wa+wb$ со словом $w(a+b)$ для любых слов w и констант $a,b \in \mathcal{A}_r$, так как $c = a+b \in \mathcal{A}_r$.

9. Символы функций, то есть, соответствующие им фразы конечные или бесконечные, определяются с помощью следующих исходных символов: констант из $\mathcal{A}_r$, e, $\tilde{e}$, z^p, $\tilde{z}^p$, где $p \in \mathbf{N}$. Тогда как символы операторнозначных функций составлются из символов множества $\{\mathbf{1},\tilde{\mathbf{1}}; e,\tilde{e}; z^p,\tilde{z}^p : p \in \mathbf{N}\}$, где символ $\mathbf{1}$ или $\tilde{\mathbf{1}}$ присутствует во фразе. При этом фраза, соответствующая функции или операторнозначной функции, не может содержать слов, состоящих только из констант, то есть, каждое слово $w_1w_2...w_k$ фразы должно содержать не менее одного из символов $w_1,w_2,...,w_k$ из множества $\{e,\tilde{e}; z^p,\tilde{z}^p : p \in \mathbf{N}\}$. Для фразы ν и пустого слова $\emptyset$ положим $\nu\emptyset = \emptyset\nu = \nu$.

10. Для символов из множества $\{\mathbf{1},\tilde{\mathbf{1}}; e,\tilde{e}; z^p,\tilde{z}^p : p \in \mathbf{N}\}$ определены их длины: $l(0) = 0$, $l(a) = 1$ для любого $a \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, $l(\mathbf{1}) = 1$, $l(\tilde{\mathbf{1}}) = 1$, $l(e) = 1$, $l(\tilde{e}) = 1$, $l(z^p) = p+1$, $l(\tilde{z}^p) = p+1$ для любого натурального числа p. Длина слова является суммой длин составляющих её символов. Аналогично рассматриваются слова и фразы для нескольких переменных ${}_1z,..., {}_nz$, а также функция длины слова, где символы соответствующие разным индексам $v = 1,...,n$ являются различными.

Далее мы рассмотрим фразы, подчиненные следующим условиям. Либо все слова w данной фразы ν содержат каждый из символов ${}_ve$, ${}_v\tilde{e}$, ${}_v\mathbf{1}$ или ${}_v\tilde{\mathbf{1}}$ с одной и той же конечной кратностью, которая может зависеть от индекса $v = 1,...,n$ или от самого символа; либо каждое слово w из ν не содержит ни ${}_ve$ ни ${}_v\tilde{e}$, кроме слов w с одним ${}_ve$ и без каких-либо ${}_vz^l$ с $l \ne 0$ или w с одним ${}_v\tilde{e}$ без каких-либо ${}_v\tilde{z}^l$ с $l \ne 0$. Если фраза ν в каждом своем слове w содержит ${}_v\mathbf{1}$ кратности p или ${}_v\tilde{\mathbf{1}}$ с кратностью k, тогда это предполагается результатом частного дифференцирования $\partial^{p+k}f(z,\tilde{z})/\partial\,{}_vz^p\partial\,{}_v\tilde{z}^k$; в то время как в случае ${}_ve$ с кратностью p или ${}_v\tilde{e}$ с кратностью k предполагается возникающим из $(\partial^{p+k}f(z,\tilde{z})/\partial\,{}_vz^p\partial\,{}_v\tilde{z}^k).(1^{\otimes(p+k)})$. Причем наличие хотя бы одного из символов ${}_v\mathbf{1}$ или ${}_v\tilde{\mathbf{1}}$ во фразе характеризует операторнозначную функцию в отличии от функции.

11. В пространстве $\mathcal{P}$ всех фраз подчиненных ограничениям перечисленным выше над $\mathcal{A}_r$ зададим метрику по формуле:

$$d(\nu,\mu) = \sum_{j=0,1,2,...} l(\nu_j,\mu_j)b^j,$$

где b – фиксированное число, $0 < b < 1$, $\nu,\mu \in \mathcal{P}$, $\nu = \sum_{j=0,1,2,...}\nu_j$, функция или операторнозначная функция $f_j(z,\tilde{z})$, соответствующая ν_j, является однородной степени j, то есть, $f(tz,t\tilde{z}) = t^jf(z,\tilde{z})$ для любых $t \in \mathbf{R}$ и $z \in \mathcal{A}_r$, $\nu_j = \sum_k \nu_{j,k}$, где $\nu_{j,k}$ – слова с соответствующими однородными функциями или операторнозначными функциями $f_{j,k}$ степени j, $l(\nu_j,\mu_j) := \max_{k,s} l(\nu_{j,k};\mu_{j,s})$, где $l(\nu_{j,k};\mu_{j,s}) = 0$ при $\nu_{j,k} = \mu_{j,s}$, $l(\nu_{j,k};\mu_{j,s}) = \max[l(\nu_{j,k});l(\mu_{j,s})]$ при $\nu_{j,k}$ не равном $\mu_{j,s}$.

12. Каждой фразе ν соответствует непрерывная функция f, если фразу понимать как последовательность конечных сумм входящих в нее слов, так что соответствующая последовательность функций сходится. В пространстве $C^0_{\mathcal{P}}(U,X)$, состоящем из пар (f,ν), $f \in C^0(U,X)$, где $X = \mathcal{A}_r$ или X – пространство $\mathbf{R}$-полиоднородных полиаддитивных операторов на $\mathcal{A}_r^m$, $m \in \mathbf{N}$, $\nu \in \mathcal{P}$ таких, что фразе ν соответствует непрерывная функция или операторнозначная функция f на области U в $\mathcal{A}_r^n$ со

значениями в X, введем метрику:

$$\mathcal{D}((f,\nu);(g,\mu)) := \sup_{z\in U} \|f(z,\tilde{z}) - g(z,\tilde{z})\| + d(\nu,\mu),$$

где фразе ν соответствует функция f, а фразе μ функция g, где норма m-кратно $\mathbf{R}$-полиоднородного полиаддитивного оператора задается формулой

$\|S\| := \sup_{(\|h_1\|=1,\dots,\|h_m\|=1)} \|S(h_1,\dots,h_m)\|/[\|h_1\|\dots\|h_m\|]$,
а для функции, то есть, при $m=0$, берется модуль функции $|f| = \|f\|$ вместо нормы оператора.

10. Замечания. При $r=\infty$ или $r=\Lambda$ с $card(\Lambda)\ge\aleph_0$ переменные z и $\tilde{z}$ алгебраически независимы над $\mathcal{A}_r$ в силу теоремы 3.6.2 [14]. Поскольку A_m с $m<r$ алгебраически вкладывается в $\mathcal{A}_r$, то можно рассматривать функции $f(z,\tilde{z})$ на областях U в $\mathcal{A}_m$, которые являются ограничениями $f=g|_U$ функций $g_f(z,\tilde{z})$ на областях W в $\mathcal{A}_r$, для которых $W\cap\mathcal{A}_m = U$.

В силу определения 9 символы функций, то есть, соответствующие им фразы конечные или бесконечные, определяются с помощью исходных символов. Из этих фраз определяются и более сложные аналитические функции, в частности, $\exp(z)=e^z$, $Ln(z)$, z^a, a^z и т. д. Для этого используются локальные разложения в степенные ряды локально аналитических функций, а также теорема Стоуна-Вейерштрасса, утверждающая, что полиномы плотны в пространстве непрерывных функций на компактной канонической замкнутой области в $\mathbf{R^n}$, следовательно, также в $\mathcal{A}_r$ при $0<r<\infty$ (смотри [14, 15]).

Для неассоциативных алгебр с $m\ge3$ существен порядок умножения, который предписывается расстановкой скобок или вектором $q(s)$, указывающим на порядок умножения в слове. Например, слова $(az^p)(z^qb)$ и $a(z^{p+q}b)$ или $(az^{p+q})b$ при $a,b\in\mathcal{A}_m\setminus\mathbf{R}$, $m\ge3$, различны, где $p\ne0$ и $q\ne0$ - натуральные числа.

11. Лемма. *Если две функции или операторнозначные функции f и g ограничены на U (смотри определение 9.12), то $\mathcal{D}((f,\nu);(g,\mu))<\infty$. В частности, если U компактна, то $\mathcal{D}((f,\nu);(g,\mu))<\infty$ для любых $(f,\nu),(g,\mu)\in C^0_{\mathcal{P}}(U,X)$.*

Доказательство. Для любой степени однородности j каждое слово $\nu_{j,k}$ состоит не более, чем из $b(j+\omega)$ символов, где $b=2$ для $\mathbf{H}$, $b=3$ для $\mathcal{A}_r$ с $r\ge3$, следовательно, число таких слов конечно и $l(\nu_{j,k})\le s(j+\omega)<\infty$, так как кратность s_v или t_v, или p_v, или y_v появления ${}_ve$ или ${}_v\tilde{e}$, или ${}_v\mathbf{1}$, или ${}_v\tilde{\mathbf{1}}$ конечна и постоянна во всех словах данной фразы, хотя она и может зависеть от индекса $v=1,\dots,n$ или самого символа, а каждый из этих символов может быть окружен с двух сторон двумя константами из $\mathcal{A}_r$, причем $\mathbf{H}$ ассоциативна в отличии от $\mathcal{A}_r$ с $r\ge3$, где $\omega=\omega(\nu):=s_1+\dots+s_n+t_1+\dots+t_n+p_1+\dots+p_n+y_1+\dots+y_n$. Тогда $l(\nu_{j,k};\mu_{j,s})\le b(j+y)$, где $y=\max(\omega(\nu),\omega(\mu))$. Поскольку ряд $\sum_{j=0}^\infty[b(j+y)]b^j$ сходится, то $d(\mu,\nu)<\infty$. С другой стороны, $\sup_{z\in U}|f(z,\tilde{z})-g(z,\tilde{z})|<\infty$ для ограниченных функций f и g на U, следовательно, $\mathcal{D}((f,\nu);(g,\mu))<\infty$. Причем, как известно, непрерывная функция на компактном множестве ограничена, что доказывает последнее утверждение леммы.

12. Теорема. *Пусть U – открытая область в $\mathcal{A}_r$, $r\ge2$. Тогда существует непрерывный оператор $S: C^0_{\mathcal{P}}(U,X)\times\Gamma\to X$, где Γ – это пространство всех спрямляемых путей в U, так что $S((f,\nu);\gamma):=\int_\gamma(f,\nu)(z,\tilde{z})dz$.*

Доказательство. На пространстве спрямляемых путей существует естественная метрика $d_r(\gamma,\eta)$ индуцированная метрикой между произвольными подмножествами A и B в $\mathcal{A}_r$: $d_r(A,B):=\max(\psi(A,B),\psi(B,A))$, $\psi(A,B):=\sup_{z\in A}\inf_{\xi\in B}|z-\xi|$. Функции f и ее представлению в виде фразы ν соответствует и единственная функция g

и ее представление в виде фразы μ, которая строится следующим образом. Функция g характеризуется условиями.

Пусть f определяется непрерывной функцией $\xi : U^2 \to \mathcal{A}_r$, так что

(i) $\quad \xi({}_1z,\ {}_2z)|_{\ {}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}} = f(z,\tilde{z})$,
где ${}_1z$ и ${}_2z \in U$. Пусть также $g : U^2 \to \mathcal{A}_r$ – непрерывная функция, которая ${}_1z$-супердифференцируема, так что

(ii) $(\partial g({}_1z,\ {}_2z)/\partial\, {}_1z).1 = \xi({}_1z,\ {}_2z)$ на U^2. Тогда положим

(iii) $\hat{f}(z,\tilde{z}).h := \hat{f}_z(z,\tilde{z}).h := [(\partial g({}_1z,\ {}_2z)/\partial\, {}_1z).h]|_{\ {}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Коротко это можно записать в виде $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).1 = f(z,\tilde{z})$ и $\hat{f}_z(z,\tilde{z}).h := \hat{f}(z).h := (\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).h$.

Фраза μ строится по алгоритму: сначала в каждом слове $\nu_{j,k}$ фразы ν заменим каждое e буквой z, что дает сумму слов $\lambda_{j+1,\alpha(k,i)}$, $\alpha = \alpha(k,i) \in \mathbf{N}$, $j,k,i \in \mathbf{N}$, то есть, $\nu_{j,k} \mapsto \sum_i \lambda_{j+1,\alpha(k,i)}$, где i нумерует позиции e в слове $\nu_{j,k}$, $i = 1,...,s$, где $s = s_1$. Поэтому, ν соответствует фраза $\lambda = \sum_{j,\alpha} \lambda_{j,\alpha}$. Частное дифференцирование $\partial f/\partial z$ было определено для функций и их представлений фразами. Рассмотрим остаток $(\partial\lambda/\partial z).1 - \nu =: \zeta$. Если $\zeta = 0$, то положим $\mu = \lambda$. Если $\zeta \neq 0$, то к каждому слову $\zeta_{j,k}$ этой фразы ζ применим левый или правый алгоритм из §2.6 [14]. Первый упомянутый выше шаг одинаков для обоих алгоритмов. Для этого рассмотрим две z-локально аналитические функции f_1 и q на U, так что f_1 и q не коммутируют, как и соответствующие им фразы ψ и σ. Пусть $\psi^0 := \psi$, $\sigma^0 := \sigma$, $\sigma^{-n} := \sigma^{(n)}$, $(\partial(\sigma^n)/\partial z).1 =: \sigma^{n-1}$ и $\sigma^{-k-1} = 0$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$, используя то же обозначение $\sigma^n_{j,k}$ для любого слова фразы σ. Тогда

(iv) $(\psi\sigma)^1 = \psi^1\sigma - \psi^2\sigma^{-1} + \psi^3\sigma^{-2} + ... + (-1)^k\psi^{k+1}\sigma^{-k}$. В частности, если $\psi = (a_1z^na_2)$, $\sigma = (b_1z^kb_2)$, с $n > 0$, $k > 0$, $a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathcal{A}_r \setminus \mathbf{R}I$, то $\psi^p = [(n+1)...(n+p)]^{-1}(a_1z^{n+p}a_2)$ для любого $p \in \mathbf{N}$, $\sigma^{-s} = k(k-1)...(k-s+1)(b_1z^{k-s}b_2)$ для любого $s \in \mathbf{N}$. Применим этот левый алгоритм по индукции к появляющимся соседним подсловам данного слова, с направлением обхода слева направо. Тогда применим это к каждому слову данной фразы. Симметрично правый алгоритм таков:

(v) $(\psi\sigma)^1 = \psi\sigma^1 - \psi^{-1}\sigma^2 + \psi^{-2}\sigma^3 + ... + (-1)^n\psi^{-n}\sigma^{n+1}$, когда $\psi^{-n-1} = 0$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Тогда применим этот правый алгоритм проходя справа налево по соседним подсловам данного слова. Для любого слова оба эти алгоритма после конечного числа итераций заканчиваются, так как длина каждого слова конечна. Эти алгоритмы применяются для решения дифференциального уравнения $(\partial\xi(z,\tilde{z})/\partial z).1 = \zeta(z,\tilde{z})$ для любого $z \in U$ в терминах фраз. Воспользуемся одним из этих алгоритмов для всех слов фразы ζ, чтобы получить и единственную фразу ξ и далее положить $\mu = \lambda + \xi$.

Если f_1 и q имеют разложения в ряды сходящиеся в $Int(B(\mathcal{A}_r,0,R))$, то эти формулы демонстрируют, что существует z-аналитическая функция $(f_1q)^1$ с рядом сходящимся в $Int(B(\mathcal{A}_r,z_0,R))$, так как $\lim_{n\to\infty}(nR^n)^{1/n} = R$, где $0 < R < \infty$. Поскольку f локально аналитична, то g тоже локально аналитична. Поэтому, для любой локально z-аналитической функции f и ее фразы ν существует оператор $\hat{f}$ и его фраза $\partial\mu/\partial z$. Рассматривая функцию G действительных переменных соответствующих g, мы получаем в силу леммы 2.5.1 [14], что все решения (g,μ) отличаются на константы из $\mathcal{A}_m$, так как $\partial g/\partial w_s + (\partial g/\partial w_p).(s^*p) = 0$ для любого $s = i_{2j}$, $p = i_{2j+1}$, $j = 0,1,...,2^{r-1}-1$ и $\partial g/\partial w_1$ единственна, следовательно, $\hat{f}$ единственна для f.

Обозначим описанное выше отображение $\mathcal{P} \ni \nu \mapsto \mu \in \mathcal{P}$ по $\phi(\nu) = \mu$. Таким образом, каждый выбранный алгоритм среди этих двух алгоритмов дает $\phi(\nu_1+\nu_2) = \phi(\nu_1) + \phi(\nu_2) = \mu = \mu_1 + \mu_2$, если $\nu = \nu_1 + \nu_2$, более того, $\omega(0) = 0$. Поэтому, эта процедура дает единственную ветвь для S. Напомним, что если существует следующий предел

$$(vi) \quad \int_\gamma (f,\nu)(z,\tilde{z})dz := \lim_P I((f,\nu);\gamma;P), \text{ где}$$

$$(vii) \quad I((f,\nu);\gamma;P) := \sum_{k=0}^{t-1} (\hat{f},\hat{\nu})(z_{k+1},\tilde{z}_{k+1}).(\Delta z_k),$$

где $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$, $z_k := \gamma(c_k)$ для любого $k = 0,...,t$, то мы говорим, что (f,ν) интегрируема вдоль пути γ по переменной z.

Из уравнения 2.7.(4) [14] следует, что

$$(viii) \quad |S((f,\nu)-(y,\psi);\gamma)| \le \mathcal{D}((f,\nu);(y,\psi))V(\gamma)C_1 \exp(C_2 R^{2^m+2})$$

для любых $(f,\nu),(y,\psi) \in C^0_{\mathcal{P}}(U,X)$ для $U \subset \mathcal{A}_m$ с конечным $m \in \mathbf{N}$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные независимые от R, (f,ν) и (y,ψ), $0 < R < \infty$ таково, что $\gamma \subset B(\mathcal{A}_m, z_0, R)$. Пространство X_t полно относительно нормы полигомогенных операторов, а также алгебра Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ полна относительно своей нормы. Поэтому, $\{S((f^v,\nu^v);\gamma) : v \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность Коши в X для любой последовательности Коши $\{(f^v,\nu^v) : v \in \mathbf{N}\} \subset C^0_{\mathcal{P}}(U,X)$, следовательно, последовательность $\{S((f^v,\nu^v);\gamma) : v \in \mathbf{N}\}$ сходится.

Для любого спрямляемого пути γ в U имеется каноническое замкнутое подмножество V в $\mathcal{A}_r$, так что $\gamma \subset Int(V) \subset V \subset U$. Тогда $V_m := V \cap \mathcal{A}_m$ компактно для любого $m \in \mathbf{N}$ и непрерывная функция $f|_V$ равномерно непрерывна на V_m. При этом $\lim_{d(\eta,0e)\to 0} \mathcal{D}((y|_{V_m},\eta),(0,0e)) = 0$ для любого $m \in \mathbf{N}$. Для конечного r возьмем $m = r$. Для конечного r существует последовательность спрямляемых путей γ_m в V_m для подходящего алгебраического вложения $\mathcal{A}_m$ в $\mathcal{A}_r$, так что $\lim_{m\to\infty} d_r(\gamma_m,\gamma) = 0$. В алгебре $\mathcal{A}_r$ плотно объединение всех алгебраически вложенных подалгебр $\mathcal{A}_m$, $m \in \mathbf{N}$. Итак, для любого $\epsilon_k = 1/k$ существуют непрерывные функции f_m на V_m и фраза ν_m над $\mathcal{A}_m$ для $m = m(k)$ с $m(k) < m(k+1)$ для любого $k \in \mathbf{N}$, так что $\lim_{m\to\infty} \mathcal{D}((f_m,\nu_m),(f|_{V_m},\mu)) = 0$, где каждое ν_m имеет естественное продолжение над $\mathcal{A}_m$ и, следовательно, f_m как соответствующая фраза для данной функциональной фразы имеет естественное продолжение на окрестность V_m в U. Это дает $S((f,\nu),\gamma) = \lim_{m\to\infty} S((f_m,\nu_m),\gamma_m)$.

В соответствии с доказательством теоремы 2.7 [14] оператор S непрерывен для функций и аналогично для операторно значных функций и их фраз относительно метрики $\mathcal{D}$.

13. Замечание. Для подмножества U в $\mathcal{A}_r$ пусть $\pi_{s,p,t}(U) := \{u : z \in U, z = \sum_{v\in\mathbf{b}} w_v v,\ u = w_s s + w_p p\}$ для любых $s \ne p \in \mathbf{b}$, где $t := \sum_{v\in\mathbf{b}\setminus\{s,p\}} w_v v \in \mathcal{A}_{r,s,p} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{v\in\mathbf{b}} w_v v,\ w_s = w_p = 0,\ w_v \in \mathbf{R}\ \forall v \in \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{b} := \{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ – семейство стандартных генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$. То есть, геометрически $\pi_{s,p,t}(U)$ - проекция на комплексную плоскость $\mathbf{C}_{s,p}$ пересечения U с плоскостью $\tilde{\pi}_{s,p,t} \ni t$, $\mathbf{C}_{s,p} := \{as+bp : a,b \in \mathbf{R}\}$, так как $sp^* \in \hat{b} := \mathbf{b}\setminus\{1\}$. Напомним, что в §§2.5-7 [14] для каждой непрерывной функции $f : U \to \mathcal{A}_r$ был определен оператор $\ {}_j\hat{f}$ по каждой переменной $\ {}_jz \in \mathcal{A})r$.

Далее предполагается, что область U в $\mathcal{A}_r^n$ имеет свойство, что каждая проекция $p_j(U) =: U_j$ является 2^r-1-связной (смотри [21]); $\pi_{s,p,t}(U_j)$ односвязна в $\mathbf{C}$ для любого $k = 0,1,...,2^r-1$, $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которых существует $z = u + t \in U_j$, где $e_j = (0,...,0,1,0,...,0) \in \mathcal{A}_r^n$ – это вектор с 1 на j-м месте, $p_j(z) = \ {}_jz$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, $z = \sum_{j=1}^n \ {}_jze_j$, $\ {}_jz \in \mathcal{A}_r$ для любых $j = 1,...,n$, $n \in \mathbf{N} := \{1,2,3,...\}$.

14. Теорема. *Пусть область U в $\mathcal{A}_r$ удовлетворяет условиям замечания 13, и (f,ν) интегрально голоморфна на U. Тогда $\partial S((f,\nu);\gamma)/\partial z = (\hat{f},\hat{\nu})(z)$ для любых $z_0, z \in Int(U)$ и спрямляемых путей γ в $Int(U)$, так что $\gamma(0) = z_0$ и $\gamma(1) = z$. В частности, если $f = (\partial g/\partial z).1$ и $\nu = (\partial \mu/\partial z).1$, где $\partial f/\partial \tilde{z} = 0$ и $\partial \nu/\partial \tilde{z} = 0$ на U, то $S((f,\nu);\gamma) = (g,\mu)(z) - (g,\mu)(z_0)$.*

Доказательство. В силу условия, что (f,ν) интегрально голоморфна, то есть, $S((f,\nu);\eta) = 0$ для любой спрямляемой петли η в U, следует, что $S((f,\nu);\gamma)$ зависит только от $z_0 = \gamma(0)$ и $z = \gamma(1)$ и не зависит от от спрямляемых путей с одними и теми же началом и концом. Поскольку $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).1 = f(z)$ и $(\partial \mu(z,\tilde{z})/\partial z).1 = \nu$, так что $\hat{f}(z,\tilde{z}) = \partial g(z,\tilde{z})/\partial z$ и $\hat{\nu}(z,\tilde{z}) = \partial \mu(z,\tilde{z})/\partial z$ существует в смысле распределений (смотри также [13]), тогда из формул 12(vi,vii) следует первое утверждение этой теоремы.

Если $(f,\nu) = (\partial(g,\mu)/\partial z).1$, то существует $(y,\psi) \in C^0_{\mathcal{P}}(U,X)$, так что $(\partial(y,\psi)/\partial z).1 = (g,\mu)$, следовательно, $(\partial^2(y,\psi)/\partial z^2)(h_1,h_2) = (\partial^2(y,\psi)/\partial z^2)(h_2,h_1)$ for each $h_1, h_2 \in \mathcal{A}_r$, так как (f,ν) и, следовательно, (g,μ) и (y,ψ) голоморфны, в частности, бесконечно супердифференцируемы по z в U (смотри теоремы 2.11, 2.16, 3.10 и следствие 2.13 [14]). Отметим, что первый шаг алгоритма доказательства теоремы 12 дает $\mu = \lambda$. Для $h_1 = 1$ и $h_2 = \Delta z$ это дает $(\hat{f},\hat{\nu}).\Delta z = (\partial(g,\mu)/\partial z).\Delta z$, и мы можем заменить $(\hat{f},\hat{\nu}).\Delta z$ в интегральных суммах на последнее выражение. Второе утверждение поэтому следует из того факта, что интегральная голоморфность (f,ν) эквивалентна условию $\partial(f,\nu)/\partial \tilde{z} = 0$ супердифференцируемой f на U, где U удовлетворяет условиям замечания 13.

15. Замечание. В частном случае $\mathbf{C} = \mathcal{A}_1$ мы просто имеем $\hat{f} = f$, но здесь рассматривается случай произвольного $r \in \mathbf{N}$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) \ge \aleph_0$. Например, пара, состоящая из функции и ее фразы $((ab)(c\tilde{z}d), (aeb)(c\tilde{z}d))$ принадлежит $C^0_{\mathcal{P}}(U,\mathcal{A}_r)$ и существует $(g,\mu) = ((azb)(c\tilde{z}d), (azb)(c\tilde{z}d)) \in C^0_{\mathcal{P}}(U,\mathcal{A}_r)$, так что $(\partial(g,\mu)/\partial \tilde{z}).1 = (f,\nu)$, но (f,ν) не является интегрально голоморфной для любого $r \ge 1$, где $a,b,c,d \in \mathcal{A}_r$ – это постоянные. В коммутативном случае $\mathbf{C}$ условия пункта 9 просто сводятся к степенным рядам комплексно голоморфных функций и символы e и $\tilde{e}$ можно опустить, но в коммутативном случае, когда $r \ge 2$, условия пункта 9 в общем случае существенны для теорем 12 и 14.

16. Лемма. *Пусть $v : \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r$ - автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_r$, а $\{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ и $\{s_0, s_1, ..., s_{2^r-1}\}$ – генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$, где $v(i_j) = s_j$ для любого $j = 0,1,...,2^r-1$, $2 \le r < \infty$. Тогда интегралы $\int_a^b f(t)dt$ и $\int_\gamma w(z)dz$ не зависят от выбора базисных генераторов, где $f : [a,b] \to \mathcal{A}_r$ и $w : U \to \mathcal{A}_r$ – кусочно непрерывные функции, $-\infty \le a < b \le \infty$, γ – спрямляемая кривая в области $U \subset \mathcal{A}_r$.*

Доказательство. Любой элемент алгебры Кэли-Диксона $z \in \mathcal{A}_r$ можно разложить единственным образом по базису генераторов: $z = z_0 i_0 + ... + z_{2^r-1} i_{2^r-1}$, $z = x_0 s_0 + ... + x_{2^r-1} s_{2^r-1}$, где $z_j, x_j \in \mathbf{R}$ для любого $j = 0,...,2^r-1$. Но единица единственна в алгебре $\mathcal{A}_r$, так как $\zeta\zeta^{-1} = 1$ для любого элемента $\zeta \ne 0$ в $\mathcal{A}_r$, где $\zeta^{-1} = \tilde{\zeta}|\zeta|^{-2}$. Поэтому $i_0 = v(i_0) = s_0$, где как обычно $i_0 = 1$. Разобъем отрезок $[a,b]$ или кривую на сегменты $[a_k,b_k]$ или γ_k, так что $f|_{[a_k,b_k]}$ и $w|_{U_k}$ непрерывны, где $a \le a_k < b_k = a_{k+1} \le b$ и $dim_{\mathbf{R}}(\partial(U_k \cap U_{k+1})) \le 2^r - 1$, $\gamma_k = \gamma \cap U$, $U_k \cap U_{k+1} \cap \gamma$ - одноточечное множество. При этом $\int_a^b f(t)dt = \sum_k \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt$ и $\int_\gamma w(z)dz = \sum_k \int_{\gamma_k} w(z)dz$.

Первый интеграл $\int_a^b f(t)dt$ берется вдоль отрезка $[a,b]$ вещественной прямой, следовательно, он не зависит от базиса генераторов. Во втором интеграле кривая γ и область U, как и γ_k с U_k, естественно не зависят от выбора базиса генераторов.

Напомним определение интеграла вдоль спрямляемой кривой. Пусть $w : U \to \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, где U открыто в $\mathcal{A}_r$, w определена непрерывной функцией $\xi : U^2 \to \mathcal{A}_r$, так что

(1) $\xi({}_1z, {}_2z)|_{{}_1z=z, {}_2z=\tilde{z}} = w(z,\tilde{z})$

или коротко $w(z)$ вместо $w(z,\tilde{z})$, где ${}_1z$ и ${}_2z \in U$. Пусть также $g : U^2 \to \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, которая является ${}_1z$-супердифференцируемой, так что

(2) $(\partial g({}_1z, {}_2z)/\partial {}_1z).1 = \xi({}_1z, {}_2z)$ на U^2. Тогда положим

(3) $\hat{w}(z,\tilde{z}).h := \hat{w}_z(z,\tilde{z}).h := [(\partial g({}_1z, {}_2z)/\partial {}_1z).h]|_{{}_1z=z, {}_2z=\tilde{z}}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Коротко мы можем это записать в виде $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).1 = w(z,\tilde{z})$ и $\hat{w}_z(z,\tilde{z}).h := \hat{w}(z).h := (\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).h$. Если существует следующий предел

$$(4) \quad \int_\gamma w(z,\tilde{z})dz := \lim_P I(w,\gamma;P), \text{ где}$$

$$(5) \quad I(w,\gamma;P) := \sum_{k=0}^{t-1} \hat{w}(z_{k+1},\tilde{z}_{k+1}).(\Delta z_k),$$

где $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$, $z_k := \gamma(c_k)$ для любого $k = 0,...,t$, тогда по определению w является интегрируемой вдоль пути γ по переменной z.

Поскольку $i_0 = s_0 = 1$, то и $\hat{w}(z)$ не зависит от выбора базиса, так как оператор $\hat{w}(z)$ определенный в смысле распределений задается условиями $(2,3)$ и алгоритмом построения $\hat{w}$ независимым от выбора базиса генераторов в каждой подобласти U_k (смотри доказательства предложения 2.6 и теоремы 2.7 в [14,15]).

17. Лемма. *Пусть задана прямая $a+S\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_r$ при $2 \le r < \infty$, где $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $Re(S) = 0$. Тогда для функции $M(p,t)$ заданной уравнением 3(2) или 3(3,3') существует автоморфизм v, $z \mapsto v(z)$, алгебры $\mathcal{A}_r$, так что в базисе генераторов $s_j := v(i_j)$ ограничение функции $v(M(p,t;\zeta))$ на прямую $p \in \{z : z = a + S\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$ равно*

(1) $v(M(p,t;\zeta)) = ({p'}_1 t + {\zeta'}_1)K$, где

(2) $K = [s_1\cos({\zeta'}_2) + s_2\sin({\zeta'}_2)\cos({\zeta'}_3) + i_3\sin({\zeta'}_2)\sin({\zeta'}_3)]$ для кватернионов;

(3) $K = [s_1\cos({\zeta'}_2) + s_2\sin({\zeta'}_2)\ \cos({\zeta'}_3) + ... + s_6\sin({\zeta'}_2)...\sin({\zeta'}_6)\cos({\zeta'}_7)$ $+s_7\sin({\zeta'}_2)...\sin({\zeta'}_6)\sin({\zeta'}_7)]$ для октонионов,

$(3')$ $K = [s_1\cos({\zeta'}_2) + s_2\sin({\zeta'}_2)\ \cos({\zeta'}_3) + ... + s_{2^r-2}\sin({\zeta'}_2)...\sin({\zeta'}_{2^r-2})\cos({\zeta'}_{2^r-1})$ $+s_{2^r-1}\sin({\zeta'}_2)...\sin({\zeta'}_{2^r-2})\sin({\zeta'}_{2^r-1})]$ для общей алгебры Кэли-Диксона, где ${p'}_1 = v((p-\tilde{p})/2)$ и ${\zeta'}_n = v(\zeta_n) \in \mathbf{R}$ для любого $n = 1,...,2^r-1$.

Доказательство. На заданной прямой аргумент p можно записать в виде: $p = p_0 + p_S S$, где $p_0 = Re(p) = a$, а $p_S = \theta$. Тогда генераторы $s_0 = 1$ и $s_1 = S$ дополним до базиса генераторов $\{s_0,...,s_{2^r-1}\}$ в $\mathcal{A}_r$, используя стандартную процедуру последовательного удвоения, чтобы $Re(s_{2^{n-1}}\tilde{s}_{2^n}) = 0$ для любого $n = 1,...,r-1$, так как $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ изоморфно $\mathbf{C}$. Поскольку $v(z+\zeta) = v(z) + v(\zeta)$ и $v(z\zeta) = v(z)v(\zeta)$ для любых $z,\zeta \in \mathcal{A}_r$, то $v(e^z) = e^{v(z)}$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$. Тогда $v(\exp(z\exp_n(\zeta)) = \exp(v(z)\exp_n(v(\zeta))$ для любых $z,\zeta \in \mathcal{A}_r$ и $1 \le n \in \mathbf{Z}$, где $\exp_1(z) := \exp(z)$, $\exp_{n+1}(z) := \exp(\exp_n(z))$ для любых $1 \le n \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathcal{A}_r$. Используя итерированные экспоненты из замечания 4 и формулы

$h_j = (-hi_j + i_j(2^r-2)^{-1}\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2$ для любого $j = 1,2,...,2^r-1$,

$h_0 = (h + (2^r-2)^{-1}\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2$,

где $h = h_0i_0 + ... + h_{2^r-1}i_{2^r-1}$, $h_j \in \mathbf{R}$ для любого j, $h^* = \tilde{h}$ обозначает сопряженный элемент алгебры Кэли-Диксона h, $h \in \mathcal{A}_r$, получим утверждение леммы, причем ${p'}_1 = p_S = v((p-\tilde{p})/2)$.

18. Предложение. *Пусть U – область в алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $2 \le r$, $f : U^2 \to \mathcal{A}_r$ - это кусочно-непрерывная функция, а $\gamma : (a_1, b_1) \to U$ и $\psi : (a_2, b_2) \to U$ – пути, где $-\infty \le a_1 < b_1 \le \infty$, $-\infty \le a_2 < b_2 \le \infty$, причем $\gamma|_{(\alpha,\beta)}$ и $\psi|_{(\alpha,\beta)}$ спрямляемы для любых $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, и интеграл $\int_\gamma(\int_\psi f(z,\zeta)d\zeta)dz$ сходится. Тогда существует*

(i) $\int_\psi(\int_\gamma f(z,\zeta)dz)d\zeta = \int_\gamma(\int_\psi f(z,\zeta)d\zeta)dz.$

Доказательство. Поскольку f кусочно непрерывна, то существует счетное разбиение области U^2 в виде $U^2 = \bigcup_k W_k$ подобластей W_k, где коразмерность над $\mathbf{R}$ пересечения $codim_{\mathbf{R}}(W_k \cap W_l) \ge 1$ для любых $k \ne l$. При этом ограничения $f|_{W_k}$ непрерывны. Можно выбрать каждую W_k ограниченной так, чтобы $(\gamma \times \psi) \cap W_k =: \gamma_k \times \psi_k$ были со спрямляемыми $\gamma_k = \gamma|_{(\alpha_k,\beta_k)}$ и $\psi_k = \psi|_{({\alpha'}_k,{\beta'}_k)}$. Тогда в силу непрерывности ограничения $f|_{W_k}$ существуют конечные интегралы

(ii) $\int_{\psi_k}(\int_{\gamma_k} f(z,\zeta)dz)d\zeta = \int_{\gamma_k}(\int_{\psi_k} f(z,\zeta)d\zeta)dz$ для любого k. Поскольку

$\sum_k \int_{\gamma_k}(\int_{\psi_k} f(z,\zeta)d\zeta)dz = \int_\gamma(\int_\psi f(z,\zeta)d\zeta)dz$, то суммирование обеих частей равенства (ii) дает уравнение (i).

19. Теорема. *Если функция $f(t)$ является оригиналом (смотри определение 1), так что ${}_NF_u(p;\zeta) := \sum_{s=0}^{2^r-1} {}_NF_{u,s}(p;\zeta)N_s$ – ее изображение, где функция f записана в виде $f(t) = \sum_{s=0}^{2^r-1} f_s(t)N_s$, $f_s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ для любого $s = 0, 1, ..., 2^r - 1$ (смотри замечание 4), $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$ при $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $4 \le r \in \mathbf{N}$. Тогда в любой точке t, где $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера справедливо равенство:*

(i) $f(t) = (2\pi N_1)^{-1} Re(S\tilde{N}_1) \sum_{s=0}^{2^r-1} \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_NF_{u,s}(p;\zeta)\exp(u(p,t;\zeta))dp)N_s,$

где $u(p,t;\zeta) = pt + \zeta$ или $u(p,t;\zeta) = p_0t + M_N(p,t;\zeta) + \zeta_0$, а интеграл берется вдоль прямой $p(\tau) = a + S\tau \in \mathbf{K}$, $\tau \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, $Re(p) = a > s_0$ и интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. В силу разложения функции f в виде $f(t) = \sum_{s=0}^{2^r-1} f_s(t)N_s$ достаточно рассмотреть обратное преобразование для вещественно значной функции f_s, которую обозначим для простоты через f. Поскольку $t \in \mathbf{R}$, то $\int_0^\infty f(\tau)d\tau$ – это интеграл Римана. Если w – это голоморфная функция переменной алгебры Кэли-Диксона, то локально в односвязной области U в каждом шаре $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ с центром в z_0 радиуса $R > 0$ содержащемся во внутренности $Int(U)$ области U выполняется равенство

$(\partial \int_{z_0}^z w(\zeta)d\zeta/\partial z).1 = w(z),$

где интеграл зависит лишь о начальной z_0 и конечной z точек спрямляемого пути в $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$. С другой стороны, вдоль прямой $a + S\mathbf{R}$ ограничение первообразной имеет вид $\int_{\theta_0}^\theta w(a + S\tau)d\tau$, так как

$\int_{z_0=a+S\theta_0}^{z=a+S\theta} w(\zeta)d\zeta = \int_{\theta_0}^\theta \hat{w}(a + S\tau).Sd\tau,$

а $\partial f(z)/\partial\theta = (\partial f(z)/\partial z).S$ для супердифференцируемой по $z \in U$ функции $f(z)$, причем первообразная единственна с точностью до постоянной из $\mathcal{A}_r$ с данным представлением функции и алгоритмом [14, 15].

Интеграл $g_b(t) := \int_{a-SB}^{a+SB} {}_NF_{u,s}(p;\zeta)\exp(p_0t + M_N(p,t;\zeta) + \zeta_0)dp$ для любого $0 < b < \infty$ можно с использованием генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$ и теоремы Фубини для вещественно значных компонент функций преобразовать к виду:

$g_b(t) = (2\pi N_1)^{-1} Re(S\tilde{N}_1) \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_{a-Sb}^{a+Sb} \exp(p_0t + M_N(p,t;\zeta) + \zeta_0)$

$\exp(-(p_0\tau + M_N(p,\tau;\zeta) + \zeta_0))dp,$

так как интеграл $\int_0^\infty f(\tau)\exp(-(p_0\tau + M_N(p,\tau;\zeta) + \zeta_0))d\tau$ равномерно сходится относительно p в полупространстве $Re(p) > s_0$ в $\mathcal{A}_r$ (смотри также предложение 18). В силу альтернативности алгебры $\mathbf{K}$ и ассоциативности со степенями алгебры $\mathcal{A}_r$

можно рассмотреть автоморфизм v из леммы 17 $z \mapsto v(z)$ для любого $z \in \mathbf{K}$. Тогда с таким v получим функцию $M(p,t;\zeta)$, даваемую формулами 17$(1-3)$, где $p_0, p'_1, \zeta_0, \zeta'_1, ..., \zeta'_{2^r-1} \in \mathbf{R}$ постоянны, $t \in \mathbf{R}$, $K \in \mathcal{A}_r$ постоянно с $Re(K) = 0$, где $p'_0 = p_0$ и $\zeta'_0 = \zeta_0$, так как $v(1) = 1$ и, следовательно, $v(t) = t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Формула (i) справедлива тогда и только тогда, когда она справедлива после применения автоморфизма v к обеим частям равенства, так как $v(z) = v(\zeta)$ для $z, \zeta \in \mathcal{A}_r$ равносильно тому, что $z = \zeta$.

Тогда в силу лемм 16 и 17 с точностью до автоморфизма алгебры $\mathcal{A}_r$ доказательство сводится к случаю $p = (p_0, p_1, 0, ..., 0)$, $N = (N_0, N_1, N_2, ..., N_{2^r-1})$, где $N_0 = 1$, так как $\mathbf{R}$ является центром алгебры $\mathcal{A}_r$. Но это дает $p_1 = p_1(t) = Re(S\tilde{N}_1)t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Рассмотрим случай $c := Re(S\tilde{N}_1) \ne 0$, а тогда частный случай $Re(S\tilde{N}_1) = 0$ получится предельным переходом при $Re(S\tilde{N}_1) \ne 0$ стремящемся к нулю. Итак,

$g_b(t) = (2\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_{a-Sb}^{a+Sb} \exp(at + c(\zeta_1 + t)K) \exp(-(a\tau + c(\zeta_1 + \tau)K) dp$,
так как $\zeta_0, a \in \mathbf{R}$, где K дается формулами 17(2,3). Тогда

$g_b(t) = (\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau) e^{a(t-\tau)} [\sin(bc(t-\tau))](ct - c\tau)^{-1}$

$= (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-t}^\infty f(\zeta + t) e^{-a(\zeta+t)} [\sin(b\zeta)] \zeta^{-1} d\zeta$,
где была использована замена $\tau - t = \zeta$. Положим $w(t) := f(t)e^{-at}$, где $w(t) = 0$ для любого $t < 0$. Поэтому,

$g_b(t) = (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta+t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta + (\pi)^{-1} f(t) \int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta$. Интеграл во втором слагаемом известен как интеграл Эйлера: $\int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = \pi$ для любого $b > 0$, следовательно, второе слагаемое равно $f(t)$. Остается доказать, что $\lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = 0$, что вытекает из следующей леммы.

20. Лемма. *Если функция $\psi(\zeta)$ со значениями в алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то*

$\lim_{b\to\infty} \int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = 0.$

Доказательство. Если ψ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то в результате интегрирования по частям:

$\int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = -\psi(\zeta) \cos(b\zeta) b^{-1} |_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \psi'(\zeta) \cos(b\zeta) b^{-1} d\zeta$ и, следовательно,

$\lim_{b\to\infty} \int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = 0$. Если же $\psi(\zeta)$ - произвольная интегрируемая функция, то для любого $\epsilon > 0$ существует непрерывно дифференцируемая функция $\psi_\epsilon(\zeta)$ такая, что $\int_\alpha^\beta |\psi(\zeta) - \psi_\epsilon(\zeta)| d\zeta < \epsilon/2$. Тогда $\int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = \int_\alpha^\beta [\psi(\zeta) - \psi_\epsilon(\zeta)] \sin(b\zeta) d\zeta + \int_\alpha^\beta \psi_\epsilon(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta$, где $| \int_\alpha^\beta [\psi(\zeta) - \psi_\epsilon(\zeta)] \sin(b\zeta) d\zeta| < \epsilon/2$ для любых b, так как $|\sin(b\zeta)| \le 1$, а второе слагаемое стремится к нулю: $\lim_{b\to\infty} \int_\alpha^\beta \psi_\epsilon(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = 0$ по доказанному выше.

Окончание **доказательства** теоремы 19. Для фиксированного $\epsilon > 0$ имеется равенство:

$\int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = \int_{-B}^B [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta + \int_{|\zeta|>B} w(\zeta + t) \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta - w(t) \int_{|\zeta|>B} \sin(b\zeta) \zeta^{-1} d\zeta$. Второе и третье слагаемые являются сходящимися интегралами и поэтому при достаточно больших $B > 0$ они по модулю меньше $\epsilon/3$. В силу условия Гёльдера $|[w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1}| \le A |\zeta|^{1-c}$, где $c > 0$, $A > 0$. Тогда в силу леммы 10 существует $b_0 > 0$ такое, что

$| \int_{-B}^B [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta| < \epsilon/3$ для любых $b > b_0$. Итак,

$\lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = 0.$

Эту теорему в случае общей функции $M_N(p,t;\zeta)$ можно также доказать непосредственно вычислением встречающихся интегралов по вещественным переменным t и τ, используя лемму 20.

21. Теорема. *Оригинал $f(t)$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$ при $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, или $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$*

над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $4 \le r \in \mathbf{N}$, вполне определяется своим изображением ${}_N F_u(p;\zeta)$ с точностью до значений в точках разрыва.

Доказательство. В силу теоремы 19 значение $f(t)$ в любой точке t непрерывности $f(t)$ выражается через ${}_N F_u(p;\zeta)$ по формуле $19(i)$. При этом значения оригинала в точках разрыва не влияют на изображение ${}_N F_u(p;\zeta)$, так как на любом конечном интервале число точек разрыва конечно.

22. Теорема. *Если функция ${}_N F_u(p;\zeta)$ аналитична по переменной $p \in \mathcal{A}_r$ в полупространстве $W := \{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > s_0\}$, где $2 \le r \in \mathbf{N}$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, а также произвольной алгебры $\mathcal{A}_r$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $4 \le r < \infty$, $u(p,t;\zeta) = pt + \zeta$ или $u(p,t;\zeta) := p_0 t + M(p,t;\zeta) + \zeta_0$, в полупространстве $Re(p) > s_0$, причем для любого $a > s_0$ существуют константы $C_a > 0$ и $\epsilon_a > 0$ такие, что*

(i) $|{}_N F_u(p)| \le C_a \exp(-\epsilon_a |p|)$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) \ge a$, где s_0 фиксировано, а интеграл

(ii) $\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p;\zeta)dp$ абсолютно сходится, то ${}_N F_u(p;\zeta)$ является изображением функции

(iii) $f(t) = (2\pi)^{-1}\tilde{S}\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p;\zeta)\exp(u(p,t;\zeta))dp$.

Доказательство. Случай $u(p,t;\zeta) = pt + \zeta$ получается из $u(p,t;\zeta) := p_0 t + M(p,t) + \zeta_0$ при $p = (p_0, p_1, 0, ..., 0)$, но интеграл вдоль прямой линии $a + St$, $t \in \mathbf{R}$, с таким p в базисе генераторов $(N_0, ..., N_{2^r-1})$ можно получить из общего интеграла автоморфизмом v, $z \mapsto v(z)$, алгебры $\mathcal{A}_r$, $r = 2$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, $r = 3$ для $\mathbf{K} = \mathbf{O}$. То есть, в силу лемм 16 и 17 достаточно доказать равенство типа (iii) после действия автоморфизмом v на левую и правую его части.

Пусть $Re(p) = a > s_0$, тогда

$$|\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} \exp(M(p,t;\zeta))\, {}_N F_u(p;\zeta)dp| \le \int_{-\infty}^{\infty} |{}_N F_u(a+S\theta;\zeta)|d\theta.$$

В силу предположения теоремы этот интеграл сходится равномерно относительно $t \in \mathbf{R}$. Для $f(t)$ даваемой формулой (iii) при $Re(\eta) =: \eta_0 > s_0$, получим

$$\int_0^\infty f(t)\exp(-\eta_0 t)dt$$
$$= (2\pi)^{-1}\tilde{S}\sum_{j=0}^{2^r-1}\int_0^\infty (\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_{u,j}(p;\zeta)\exp(u(p,t;\zeta))dp)\exp(-\eta_0 t)(dt)N_j,$$

в котором можно тогда изменить порядок интегрирования, так как $t \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\int_0^\infty f(t)\exp(-\eta_0 t)dt = (2\pi)^{-1}\tilde{S}\sum_{j=0}^{2^r-1}\int_{a-S\infty}^{a+S\infty}(\int_0^\infty {}_N F_{u,j}(p;\zeta)\exp((a-\eta_0)t)dt)(dp)N_j,$$

так как $e^v \in \mathbf{R}$ для любого $v \in \mathbf{R}$, $e^{aM}e^{bM} = e^{(a+b)M}$ для любых $a, b \in \mathbf{R}$. Поскольку $a < \eta_0$ и

$$\int_0^\infty e^{(a-\eta_0)t}dt = -(a-\eta_0)^{-1},$$

то

$$\int_0^\infty f(t)\exp(-\eta_0 t)dt = -(2\pi)^{-1}\tilde{S}\sum_{j=0}^{2^r-1}(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_{u,j}(p;\zeta)(a-\eta_0)^{-1}dp)N_j$$
$$= -(2\pi)^{-1}\tilde{S}(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p;\zeta)(a-\eta_0)^{-1}dp.$$

Для окончания доказательства понадобится следующий аналог леммы Жордана.

23. Лемма. *Пусть функция F переменной p из алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $2 \le r \in \mathbf{N}$ удовлетворяет условиям $(1-3)$:*

(1) *функция $F(p)$ непрерывна по переменной $p \in \mathcal{A}_r$ в (открытой) области W полупространства $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > s_0\}$, причем для любого $a > s_0$ существуют константы $C_a > 0$ и $\epsilon_a > 0$ такие, что*

(2) *$|F(p)| \le C_a \exp(-\epsilon_a |p|)$ для любого $p \in C_{R(n)}$, $C_R := \{z \in \mathcal{A}_r : Re(z) \ge a\}$, $0 < R(n) < R(n+1)$ для любого $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} R(n) = \infty$, где s_0 фиксировано, а интеграл*

(3) *$\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} F(p)dp$ абсолютно сходится. Тогда*

(4) $\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n} F(p)\exp(-u(p,t;\zeta))dp = 0$
для любого $t > 0$ и любой последовательности спрямляемых кривых γ_n содержащихся в $C_{R(n)} \cap W$, причём или $F(p)$ голоморфна в W, которая является (2^r-1)-связной открытой областью в $\mathcal{A}_r$ (смотри [21]), так что проекция $\pi_{s,p,t}(W)$ односвязна в $s\mathbf{R} \oplus p\mathbf{R}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, ..., 2^{r-1}-1$ для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p} := \mathcal{A}_r \ominus s\mathbf{R} \ominus p\mathbf{R}$ и $u \in s\mathbf{R} \oplus p\mathbf{R}$, для которых существует $z = t + u \in \mathcal{A}_r$; или существует константа $C_V > 0$ такая, что вариации (длины) кривых $V(\gamma_n) \le C_V R_n$ для любого n, где $u(p,t;\zeta)$ - функция даваемая уравнениями 3(1-3,3'), $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Если $0 < \epsilon \le \min(a - s_0, \epsilon_a)$, тогда в силу условия (ii) существует константа $C > 0$ такая, что
(iv) $|F(p)| \le Ce^{-\epsilon|p|}$,
для любых $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) \ge a > s_0$. Если U – это область в $\mathcal{A}_r$ диаметра не превосходящего ρ, то в силу (4) из доказательства теоремы 7 [14] выполняется неравенство:
$\sup_{p\in U} \|\hat{F}(p)\| \le \sup_{p\in U} |F(p)| C_1 \exp(C_2\rho^n)$,
где C_1 и C_2 – это положительные постоянные независимые от F, $n = 2^r+2$, $2 \le r \in \mathbf{N}$. В частности, в качестве U можно взять внутренность параллелепипеда с ребрами длины не превосходящей $\rho/2^{r/2}$. Тогда путь интегрирования можно покрыть конечным числом таких параллелепипедов. В случае окружности радиуса R число необходимых параллелепипедов не превосходит $2\pi R/\rho + 1$. Существует $R_0 > 0$, так что для любого $R > R_0$ выполняется неравенство $2\pi R/\rho < \exp(C_2\rho^{n-1}(R-\rho))$. Поэтому в ρ – окрестности C_R^ρ окружности радиуса R с $R > R_0$ выполняется неравенство:
$\sup_{p\in C_R^\rho} \|\hat{F}(p)\| \le \sup_{p\in C_R^\rho} |F(p)| C_1 \exp(C_2\rho^{n-1}R)$.
Поскольку $\rho > 0$ можно взять произвольно малым, то существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любых $0 < \rho < \rho_0$ удовлетворяется неравенство $C_2\rho^{n-1} < \epsilon$, следовательно,
$\sup_{p\in C_R^\rho, Re(p)\ge a} \|\hat{F}(p)\| \le CC_1\exp((C_2\rho^{n-1}-\epsilon)R) \le CC_1\exp(-\delta R)$
в силу условия наложенного на F, где C – это положительная постоянная для данной F, $\delta = C_2\rho^{n-1} - \epsilon > 0$. При этом длина пути интегрирования не превосходит $2\pi R$, а $\lim_{R\to\infty} CC_1 2\pi R\exp(-\delta R) = 0$. Функция $F(p)$ непрерывна по p, значит интегрируема вдоль любой спрямляемой кривой в области W полупространства $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > s_0\}$.

Если $F(p)$ голоморфна, то в силу теоремы 2.11 [14,15] $\int_{\gamma_n} F(p)\exp(-u(p,t;\zeta))dp$ не зависит от вида кривой и определяется лишь начальной и конечной её точками. Если $V(\gamma_n) \le C_V R_n$ для любого n, то достаточно доказать утверждение леммы для любой подпоследовательности $R_{n(k)}$ с $R_{n(k+1)} \ge R_{n(k)} + 1$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Обозначим для простоты такую подпоследовательность через R_n. Каждую спрямляемую кривую можно аппроксимировать сходящейся последовательностью спрямляемых ломаных линий, составленных из дуг окружностей. Если кривая расположена на сфере, то эти окружности можно взять с общим центром со сферой. Условие (2) в каждой плоскости $\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$, где $N \in \mathcal{A}_r$, $Re(N) = 0$, $|N| = 1$, выполняется, причем равномерно относительно направляющих N и можно выполнить диффеоморфизм g в $\mathcal{A}_r$, так что $g(W) = W$, $g(S_n) = S_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$, и образом C^1 кривой из W является дуга окружности, так как $0 < R_n + 1 < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$. Функционал $(F,\gamma) \mapsto \int_\gamma F(p)dp$ непрерывен из $C^0(V,\mathcal{A}_r) \times \Gamma$ в $\mathcal{A}_r$, где V – компактная область в $\mathcal{A}_r$, Γ – семейство спрямляемых кривых в V с метрикой $\rho(v,w) := \max(\sup_{z\in v}\inf_{\zeta\in w}|z-\zeta|, \sup_{z\in w}\inf_{\zeta\in v}|z-\zeta|)$ (смотри теорему 2.7 [14, 15]). Пространство C^1 непрерывно дифференцируемых функций вещественных переменных плотно в пространстве непрерывных функций C^0 в компактно-открытой топологии в случае конечного числа переменных. При этом спрямляемая кривая является равномерным пределом C^1 кривых, так как каждая спрямляемая кривая непрерывна. Поэтому, рассмотрим $\gamma_n = \psi_n \cap \{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > a\} \cap W$. Следовательно,

$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p,t;\zeta))dp = 0$,

так как это выполняется для $\gamma_n = \pi_n \cap C_{R(n)}$, а значит и для общих γ_n с теми же начальными и конечными точками, где π_n – двумерные над $\mathbf{R}$ плоскости в $\mathcal{A}_r$.

Продолжение **доказательства** теоремы 22. В силу леммы 23

$|\int_{\psi_R} F(p)(p-\eta_0)^{-1}dp| \le u(R)\pi R/(R-|\eta_0|)$,

где $0 < u(R) < \infty$ и существует $\lim_{R\to\infty} u(R) = 0$, а ψ_R – дуга окружности $|p| = R$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ с $Re(p) > a$, следовательно,

$\lim_{R\to\infty} \int_{\psi_R} F(p)(p-\eta_0)^{-1}dp = 0$,

так как $u(R) \le u_0 \exp(-\delta R)$ для любого $R > R_0$, где $u_0 = const > 0$.

Тогда прямую $a + S\theta$ с $\theta \in \mathbf{R}$ можно заменить замкнутым контуром ϕ_R, составленным из ψ_R и отрезка $[a + Sb, a - Sb]$, проходимого сверху вниз. Итак,

$\int_0^\infty \exp(-\eta_0 t)f(t)dt = (2\pi)^{-1}\tilde{S} \int_{\phi_R} F(p)(p-\eta_0)^{-1}dp$,

где знак перед интегралом изменен за счет изменения направления обхода петли ϕ_R. Напомним, что в случае алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ вычет функции является оператором $\mathbf{R}$-однородным и $\mathcal{A}_r$-аддитивным аргумента $L \in \mathcal{A}_r$ с $Re(L) = 0$, причем вычет естественно зависит от функции и точки. В области $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) \ge a, |p| \le R\}$ аналитическая функция $F(p)$ имеет лишь одну особую точку $p = \eta_0$, которая является полюсом первого порядка с вычетом $res(\eta_0; (p-\eta_0)^{-1}F(p)).L = LF(\eta_0)$ для любых $L \in \mathcal{A}_r$ с $Re(L) = 0$, следовательно,

$\int_0^\infty f(t)\exp(-\eta_0 t)dt = F(\eta_0)$, так как $L = S$ в данном случае и $S\tilde{S} = 1$.

При $t < 0$ в силу упомянутой выше $\mathcal{A}_r$ леммы 23 получим, что

$\lim_{R\to\infty} \int_{\phi_R} F(p)e^{pt}dp = 0$,

так как $Re(p) = a > 0$, следовательно, прямую $a + S\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$, можно заменить петлей ϕ_R, что и выше. Тогда при $t < 0$ получим:

$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\phi_R} F(p)e^{pt}dp = 0$,

так как $F(p)$ аналитична по p вместе с e^{pt} внутри области $\{p : p \in \mathcal{A}_r; |p| \le R', Re(p) > s_0\}$, $a > s_0$, $0 < R < R' \le \infty$. То есть условие 2 для оригинала выполняется. С другой стороны,

$|f(t)| \le (2\pi)^{-1}e^{at} \int_{-\infty}^{\infty} |F(a+S\theta)|d\theta = Ce^{at}$,

где $C = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |F(a+S\theta)|d\theta < \infty$, следовательно, выполнено условие (3). Также $f(t)$ является непрерывной, так как подинтегральная функция $F(p)$ непрерывна, удовлетворяет условиям (i, ii) и

$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(\theta):|\theta|\ge R} F(p)dp = 0$. Более того, интеграл

$\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p;\zeta)[\partial \exp(u(p,t))/\partial t]dp$

сходится в силу условий (i, ii) и доказательства выше, следовательно, функция $f(t)$ дифференцируема, а значит и подавно удовлетворяет условию Липшица.

24. Замечание. В теореме 22 условие (i) можно заменить на

$\lim_{n\to\infty} \sup_{p\in C_{R(n)}} \|\hat{F}(p)\| = 0$

по последовательности $C_{R(n)} := \{z \in \mathcal{A}_r : |z| = R(n), Re(z) > s_0\}$, где $R(n) < R(n+1)$ для любых n, $\lim_{n\to\infty} R(n) = \infty$, так как это обеспечивает выполнимость $\mathcal{A}_r$ аналога леммы Жордана для любого $r \ge 2$ (смотри также замечание 36). Но в самой теореме 22 существенно используется альтернативность алгебры, то есть, в ней в общем случае возможны лишь $r = 2$ или $r = 3$ при $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, либо при условии $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $4 \le r \in \mathbf{N}$.

Далее рассматриваются свойства кватернионных, октонионных и общих $\mathcal{A}_r$ аналогов преобразования Лапласа.

25. Предложение. *Если* $_NF_u(p;\zeta)$ *и* $_NG_u(p;\zeta)$ *– это изображения функций-оригиналов* $f(t)$ *и* $g(t)$ *в полупространствах* $Re(p) > s_0(f)$ *и* $Re(p) > s_0(g)$ *со значениями в* $\mathcal{A}_r$*, то для любых* $\alpha,\beta \in \mathcal{A}_r$ *в случае* $\mathbf{K} = \mathbf{H}$*; а также* f *и* g *со значениями в* $\mathbf{R}$ *и любых* $\alpha,\beta \in \mathcal{A}_r$ *или* f *и* g *со значениями в* $\mathcal{A}_r$ *и любых* $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ *в случае* $\mathcal{A}_r$ *функция* $\alpha\ _NF_u(p;\zeta) + \beta\ _NG_u(p;\zeta)$ *является изображением функции* $\alpha f(t) + \beta g(t)$ *в полупространстве* $Re(p) > \max(s_0(f), s_0(g))$.

Доказательство. Поскольку существуют $_NF_u(p;\zeta)$ и $_NG_u(p;\zeta)$, то интеграл
$\int_0^\infty(\alpha f(t) + \beta g(t))\exp(-u(p,t))dt = \int_0^\infty \alpha f(t)\exp(-u(p,t))dt + \int_0^\infty \beta g(t)\exp(-u(p,t))dt$
сходится в полупространстве $Re(p) > \max(s_0(f), s_0(g))$. При этом $t \in \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}$ является центром алгебры $\mathcal{A}_r$. Алгебра $\mathbf{H}$ ассоциативна. Поэтому в указанных в условии случаях константы α,β можно вынести за знаки интегралов.

26. Примеры. Пусть сначала $u(p,t) = pt$, $p \in \mathcal{A}_r$, $2 \le r$.

1. Если $f(t) = Ch_{[0,\infty)}(t)$ - характеристическая функция полупрямой $[0,\infty)$, то $F(p) = p^{-1}$, что вытекает из определения, так как $\int_0^\infty e^{-pt}dt = -p^{-1}e^{-pt}|_0^\infty = 1/p$.
2. Если $f(t) = \sin(\omega t)Ch_{[0,\infty)}(t)$, то $F(p) = \omega(p^2+\omega^2)^{-1}$, где $\omega \in \mathbf{R}$.
3. Если $f(t) = \cos(\omega t)Ch_{[0,\infty)}(t)$, то $F(p) = p(p^2+\omega^2)^{-1}$.
4. Для $f(t) = sh(\omega t)Ch_{[0,\infty)}(t)$ изображение $F(p) = \omega(p^2-\omega^2)^{-1}$.
5. Для $f(t) = ch(\omega t)Ch_{[0,\infty)}(t)$ изображение $F(p) = p(p^2-\omega^2)^{-1}$. Преобразования Лапласа в примерах 2-5 вытекают из предложения 25 и формул:

$\int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty[e^{-(p_0+S(p_S-\omega))t} + e^{-(p_0+S(p_S+\omega)t)}]dt/2 = [(p-\omega S)^{-1} + (p+\omega S)^{-1}]/2$,
где $p = p_0 + Sp_S$, $p_0 = Re(p)$, $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, $p_s \in \mathbf{R}$;
$\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty[e^{-(p_0+S(p_S-\omega))t} - e^{-(p_0+S(p_S+\omega)t)}]\tilde{S}dt/2 = [(p-\omega S)^{-1} - (p+\omega S)^{-1}]\tilde{S}/2$,

$$\int_0^\infty ch(\omega t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty[e^{-((p_0-\omega)+Sp_S)t}+e^{-((p_0+\omega)+Sp_St)}]dt/2 = [(p-\omega)^{-1}+(p+\omega)^{-1}]/2,$$

$$\int_0^\infty sh(\omega t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty[e^{-((p_0-\omega)+Sp_S)t}-e^{-((p_0+\omega)+Sp_St)}]dt/2 = [(p-\omega)^{-1}-(p+\omega)^{-1}]/2,$$

так как $\cos(\omega t) = [e^{\omega tS} + e^{-\omega tS}]/2$, $\sin(\omega t) = [e^{\omega tS} - e^{-\omega tS}]\tilde{S}/2$, $ch(\omega t) = [e^{\omega t} + e^{-\omega t}]/2$, $sh(\omega t) = [e^{\omega t} - e^{-\omega t}]/2$, а рассматриваемые функции-оригиналы принимают лишь вещественные значения.

6. Рассмотрим теперь $f(t) = \exp(\zeta t)Ch_{[0,\infty)}(t)$, тогда
$F(p) = \int_0^\infty \exp(\zeta t)\exp(-pt)dt$,
где $\exp(\zeta t)\exp(-pt) = e^{(\zeta_0-p_0)t}\exp(\zeta' t)\exp(-p't)$, $\zeta_0 := Re(\zeta)$, $p_0 := Re(p)$, $\zeta' := \zeta - \zeta_0$, $p' = p - p_0$. Пусть элемент $N_1 \in \mathcal{A}_r$ такой, что $\zeta' = \zeta_1 N_1$, где $Re(N_1) = 0$, $\zeta_1 \in \mathbf{R}$, $|N_1| = 1$, тогда $p' = p_1N_1 + p_2N_2$, где $N_2 \perp N_1$ относительно скалярного произведения $Re(N_1\tilde{N}_2)$, $p_1, p_2 \in \mathbf{R}$, то есть, $Re(N_1\tilde{N}_2) = 0$, причем $Re(N_2) = 0$ и $|N_2| = 1$. Поэтому $\exp(\zeta' t)\exp(-p't) = (\cos(\zeta_1 t)+\sin(\zeta_1 t)N_1)(\cos(|p'|t)-\sin(|p'|t)(p_1N_1+p_2N_2)/|p'|) = [\cos(\zeta_1 t)\cos(|p'|t) + \sin(\zeta_1 t)\sin(|p'|t)/|p'|] + [-\cos(\zeta_1 t)\sin(|p'|t)p_1/|p'| + \sin(\zeta_1 t)\cos(|p'|t))]N_1 - [\cos(\zeta_1 t)\sin(|p'|t)p_2/|p'|)N_2 - [\sin(|p'|t)\sin(\zeta_1 t)p_2/|p'|]N_1N_2$
в силу предложения 3.2 [14, 15], так как $|\zeta'| = |\zeta_1|$, $\cos(\phi)$ – четная функция от $\phi \in \mathbf{R}$, $\sin(|\phi|)\phi N/|\phi| = \sin(\phi)N$ для любых $\phi \in \mathbf{R}$ и $N \in \mathcal{A}_r$ с $Re(N) = 0$, где $\lim_{\phi\to 0}\sin(\phi)/\phi = 1$, а $\sin(\phi)$ – нечетная функция. При этом $N_1 = \zeta'/|\zeta'|$ при $\zeta' \ne 0$, $N_2 = [p' - p_1N_1]/|p' - p_1N_1|$ при $p' \ne p_1N_1$ для некоторого $p_1 \in \mathbf{R}$, $p_2N_2 = p' - p_1N_1$. Поскольку $Re((p' - p_1N_1)\tilde{\zeta'}) = 0$, то $p_1 = Re(p'\tilde{\zeta'})/|\zeta'|$, так как $\zeta'^2 = -|\zeta'|^2$, а $N_1\zeta' = -|\zeta'|$. Тогда $F(p) = 2^{-1}\{c[(c^2+a^2)^{-1}(1-p_1/|p'|)+(c^2+b^2)^{-1}(1+p_1/|p'|)+[a(c^2+a^2)^{-1}+b(c^2+b^2)^{-1})(1-$

$p_1/|p'|)N_1 - (a(c^2+a^2)^{-1} + b(c^2+b^2)^{-1})p_2N_2/|p'| - c((c^2+a^2)^{-1} - (c^2+b^2)^{-1})(p_2/|p'|)N_1N_2\}$, где $c := \zeta_0 - p_0$, $a := |p'| + |\zeta_1|$, $b := |p'| - |\zeta_1|$.

В этом и последующих примерах используются выражения p_j через p с помощью генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$ (смотри формулы 3(6)). При этом $|z| = [z(2^r-2)^{-1}(-z + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(zi_j^*))]^{1/2}$ для любых $z \in \mathcal{A}_r$, что дает локальную аналитичность $F(p;\zeta)$ по p и ζ.

27. Теорема. *Пусть $\alpha = const > 0$, $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ при $u = pt + \zeta$ или и дается формулами 3(1-3,3') над $\mathcal{A}_r$ с $2 \le r < \infty$, тогда $F(p/\alpha;\zeta)/\alpha$ - изображение функции $f(\alpha t)$.*

Доказательство. Поскольку $p_jt + \zeta_j = p_j(\tau/\alpha) + \zeta_j$ для любого j, где $t\alpha = \tau$, то замена переменной дает: $\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-u(p,t;\zeta)}dt = \int_0^\infty f(\tau)e^{-u(p,\tau/\alpha;\zeta)}d\tau = F(p/\alpha;\zeta)/\alpha$, так как $\mathbf{R}$ является центром алгебры $\mathcal{A}_r$.

28. Теорема. *Если $f(t)$ – функция-оригинал, $F(p)$ – её изображение, где $u = pt$, $f^{(n)}(t)$ является оригиналом при $n \ge 1$, то*

(i) $\mathcal{F}(f^{(n)}(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = F(p)p^n - f(0)p^{n-1} - ... - f^{(n-1)}(0)$

является изображением функции $f^{(n)}(t)$ над $\mathcal{A}_r$, где $f^{(k)}(0) := \lim_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

Доказательство. Интегрирование по частям дает:

(ii) $\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = [f(t)e^{-pt}]|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$.

Поскольку $Re(p) = s > s_0$, то $|f(t)e^{-pt}| \le Ce^{-(s-s_0)t}$, поэтому из формулы (ii) вытекает формула (i) при $n = 1$. Применение последней формулы n раз дает общую формулу (i).

29. Теорема. *Если $f(t)$ – функция-оригинал, $F(p)$ – её изображение над $\mathcal{A}_r$ с $2 \le r < \infty$, где $u = pt$, то $F^{(n)}(p).({}_1h,...,{}_nh)$ является изображением оригинала $(-t)^nf(t)\ {}_1h...{}_nh$ для любых $n \in \mathbf{N}$ и ${}_1h,...,{}_nh \in \mathbf{R} \oplus p'\mathbf{R} \subset \mathcal{A}_r$, где $p' := p - Re(p)$.*

Доказательство. Функция $F(p)$ в полупространстве $Re(p) > s_0$ является голоморфной. Тогда $F'(p).h = -[\int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt}dt]h$, так как h коммутирует с p и с t. Кратное дифференцирование дает $F^{(n)}(p).({}_1h,...,{}_nh) = [\int_0^\infty (-t)^nf(t)e^{-pt}dt]\ {}_1h,...,{}_nh$.

30. Примеры. 1. Изображением функции-оригинала $t^nCh_{[0,\infty)}(t)$ является $F(p) = n!p^{-n-1}$; для $f(t) = t\sin(\omega t)Ch_{[0,\infty)}(t)$ изображение равно $F(p) = 2p\omega(p^2+\omega^2)^{-2}$; для $f(t) = t\cos(\omega t)Ch_{[0,\infty)}(t)$ изображение равно $F(p) = (p^2-\omega^2)(p^2+\omega^2)^{-2}$ при $u = pt$ в силу теоремы 29 и примеров 26.1-3, так как $\omega \in \mathbf{R}$, где $p \in \mathcal{A}_r$, $r \ge 2$.

2. Для функции-оригинала $f(t) = t^n\exp(\zeta t)Ch_{[0,\infty)}(t)$ изображение равно $(-1)^n(\partial^nF(p)/\partial p^n).(1,...,1) = \partial^n\mathsf{F}(a,b,c)/\partial c^n$, где в последнем равенстве функция F выражена через переменные (a,b,c) как в примере 15.6 и обозначена F. В частности, при $n = 1$, получается изображение:

$\mathcal{F}(te^{\zeta t}Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = 2^{-1}\{(a^2-c^2)(a^2+c^2)^{-2}(1-p_1/|p'|) + (b^2-c^2)(b^2+c^2)^{-1}(1+p_1/|p'|) - 2c(a(a^2+c^2)^{-2} + b(b^2+c^2)^{-2})(1-p_1/|p'|)N_1 + 2c(a(a^2+c^2)^{-2} + b(b^2+c^2)^{-2})(p_2/|p'|)N_2 - ((a^2-c^2)(a^2+c^2)^{-2} - (b^2-c^2)(b^2+c^2)^{-2})(p_2/|p'|)N_1N_2\}$,

так как $(a^2+c^2)^{-1} = (2a)^{-1}S((c+aS)^{-1} - (c-aS)^{-1})$, $c(a^2+c^2)^{-1} = 2^{-1}((c+aS)^{-1} + (c-aS)^{-1})$ для любых $a, c \in \mathbf{R}$, $a^2+c^2 > 0$, $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $Re(S) = 0$, где $p, \zeta \in \mathcal{A}_r$.

В общем случае

$\partial^n[c(c^2+b^2)^{-1}]/\partial c^n = n!(-1)^n[(c+Sb)^{-n-1} + (c-Sb)^{-n-1}]/2$
$= n!(-1)^n(c^2+b^2)^{-n-1}\sum_{0\le k\le[(n+1)/2]} \binom{n+1}{2k}(-1)^kc^{n+1-2k}b^{2k}$,

где $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $b \neq 0$, $c, b \in \mathbf{R}$;

$\partial^n(c^2+b^2)^{-1}/\partial c^n = n!(-1)^n Sb^{-1}[(c+Sb)^{-n-1}-(c-Sb)^{-n-1}]/2$
$= n!(-1)^n(c^2+b^2)^{-n-1}\sum_{0\le k\le[n/2]}\binom{n+1}{2k+1}(-1)^k c^{n-2k}b^{2k}$.
Поэтому изображением функции $f(t)=t^n e^{\zeta t}Ch_{[0,\infty)}(t)$ является функция
$F(p) = n!2^{-1}(-1)^n\{\sum_{0\le k\le[(n+1)/2]}\binom{n+1}{2k}(-1)^k c^{n+1-2k}[a^{2k}(c^2+a^2)^{-n-1}(1-p_1/|p'|)$
$+b^{2k}(c^2+b^2)^{-n-1}(1+p_1|p'|)] + [N_1(1-p_1/|p'|)-N_2p_2/|p'|]\sum_{0\le k\le[n/2]}\binom{n+1}{2k+1}(-1)^k$
$c^{n-2k}[a^{2k+1}(c^2+a^2)^{-n-1}+b^{2k+1}(c^2+b^2)^{-n-1}]$
$-[N_1N_2p_2/|p'|][\sum_{0\le k\le[(n+1)/2]}\binom{n+1}{2k}(-1)^k c^{n+1-2k}[a^{2k}(c^2+a^2)^{-n-1}-b^{2k}(c^2+b^2)^{-n-1}]\}$.

3. Пусть теперь $f(t)=\exp(u(\zeta,t;\alpha))Ch_{[0,\infty)}(t)$ и найдем ее изображение $F(p;\beta)$ при $u(p,t;\beta):=p_0t+M(p,t;\beta)+\beta_0$, где $p,\zeta,\alpha,\beta\in\mathcal{A}_r$, как и в определении 3. Для этого рассмотрим тригонометрические формулы:

(i) $\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos(a)\cos(b)$;

(ii) $\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin(a)\sin(b)$;

(iii) $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b)$;

(iv) $\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin(b)\cos(a)$

для любых $a,b\in\mathbf{R}$. Тогда

(1) $\prod_{p=1}^n\cos(a_p)=2^{1-n}\sum_{(v_2,\dots,v_n\in\{1,2\})}\cos(a_1+(-1)^{v_2}a_2+(-1)^{v_3}a_3+\dots+(-1)^{v_n}a_n)$ для любых $a_1,\dots,a_n\in\mathbf{R}$, $2\le n\in\mathbf{N}$;

(2) $\prod_{p=1}^{2m}\sin(b_p)=2^{-m}\prod_{p=1}^m[\cos(b_{2p-1}-b_{2p})-\cos(b_{2p-1}+b_{2p})]=$
$(-2)^m\sum_{(w_1,\dots,w_m\in\{1,2\})}(-1)^{w_1+\dots+w_m}(\prod_{p=1}^m\cos(b_{2p-1}+(-1)^{w_p}b_{2p}))$
$=2^{1-2m}\sum_{(w_1,\dots,w_m\in\{1,2\})}(-1)^{w_1+\dots+w_m+m}\sum_{(v_2,\dots,v_m\in\{1,2\})}\cos(b_1+(-1)^{w_1}b_2+(-1)^{v_2}(b_3+$
$(-1)^{w_2}b_4)+(-1)^{v_3}(b_5+(-1)^{w_3}b_6)+\dots+(-1)^{v_m}(b_{2m-1}+(-1)^{w_m}b_{2m}))$
для любых $b_1,b_2,\dots\in\mathbf{R}$, $1\le m\in\mathbf{N}$;

(3) $\prod_{p=1}^{2m+1}\sin(b_p)=2^{-2m}\sum_{(w_1,\dots,w_m\in\{1,2\})}(-1)^{w_1+\dots+w_m+m}\sum_{(v_1,\dots,v_m\in\{1,2\})}\sin(b_{2m+1}+$
$(-1)^{v_1}(b_1+(-1)^{w_1}b_2)+(-1)^{v_2}(b_3+(-1)^{w_2}b_4)+\dots+(-1)^{v_m}(b_{2m-1}+(-1)^{w_m}b_{2m}))$;

(4) $(\prod_{p=1}^n\cos(a_p))(\prod_{q=1}^{2m}\sin(b_q))=2^{1-n-2m}\sum_{(v_2,\dots,v_n\in\{1,2\})}\sum_{(w_1,\dots,w_m\in\{1,2\})}(-1)^{w_1+\dots+w_m+m}$
$\sum_{(u_1,\dots,u_m\in\{1,2\})}\cos(a_1+(-1)^{v_2}a_2+\dots+(-1)^{v_n}a_n+(-1)^{u_1}(b_1+(-1)^{w_1}b_2)+(-1)^{u_2}(b_3+$
$(-1)^{w_2}b_4)+\dots+(-1)^{u_m}(b_{2m-1}+(-1)^{w_m}b_{2m}))$;

(5) $(\prod_{p=1}^n\cos(a_p))(\prod_{q=1}^{2m+1}\sin(b_q))=2^{-n-2m}\sum_{(v_1,\dots,v_n\in\{1,2\})}\sum_{(w_1,\dots,w_m\in\{1,2\})}(-1)^{w_1+\dots+w_m+m}$
$\sum_{(u_1,\dots,u_m\in\{1,2\})}\sin(b_{2m+1}+(-1)^{v_1}a_1+(-1)^{v_2}a_2+\dots+(-1)^{v_n}a_n+(-1)^{u_1}(b_1+(-1)^{w_1}b_2)+$
$(-1)^{u_2}(b_3+(-1)^{w_2}b_4)+\dots+(-1)^{u_m}(b_{2m-1}+(-1)^{w_m}b_{2m}))$. При этом

(6) $\exp(M(p,t;\alpha)) = \cos(p_1t+\alpha_1)+i_1\sin(p_1t+\alpha_1)\cos(p_2t+\alpha_2)+i_2\sin(p_1t+\alpha_1)\sin(p_2t+\alpha_2)\cos(p_3t+\alpha_3)+i_3\sin(p_1t+\alpha_1)\sin(p_2t+\alpha_2)\sin(p_3t+\alpha_3)$ для кватернионов;

(7) $\exp(M(p,t;\alpha)) = \cos(p_1t+\alpha_1)+i_1\sin(p_1t+\alpha_1)\cos(p_2t+\alpha_2)+i_2\sin(p_1t+\alpha_1)\sin(p_2t+\alpha_2)\cos(p_3t+\alpha_3)+\dots+i_6\sin(p_1t+\alpha_1)\dots\sin(p_6t+\alpha_6)\cos(p_7t+\alpha_7)+i_7\sin(p_1t+\alpha_1)\dots\sin(p_6t+\alpha_6)\sin(p_7t+\alpha_7)$ для октонионов. Тогда

(8) $\exp(M(\zeta,t;\alpha))\exp(-M(p,t;\beta)) = [\cos(\zeta_1t+\alpha_1)\cos(p_1t+\beta_1)+\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\cos(\zeta_2t+\alpha_2)\sin(p_1t+\beta_1)\cos(p_2t+\beta_2)+\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(\zeta_2t+\alpha_2)\cos(\zeta_3t+\alpha_3)\sin(p_1t+\beta_1)\sin(p_2t+\beta_2)\cos(p_3t+\beta_3)+\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(\zeta_2t+\alpha_2)\sin(\zeta_3t+\alpha_3)\sin(p_1t+\beta_1)\sin(p_2t+\beta_2)\sin(p_3t+\beta_3)]$
$i_1[-\cos(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(p_1t+\beta_1)\cos(p_2t+\beta_2)+\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\cos(\zeta_2t+\alpha_2)\cos(p_1t+\beta_1)-\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(\zeta_2t+\alpha_2)\cos(\zeta_3t+\alpha_3)\sin(p_1t+\beta_1)\sin(p_2t+\beta_2)\sin(p_3t+\beta_3)+\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(\zeta_2t+\alpha_2)\sin(\zeta_3t+\alpha_3)\sin(p_1t+\beta_1)\sin(p_2t+\beta_2)\cos(p_3t+\beta_3)]$
$i_2[-\cos(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(p_1t+\beta_1)\sin(p_2t+\beta_2)\cos(p_3t+\beta_3)+\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(\zeta_2t+\alpha_2)\cos(\zeta_3t+\alpha_3)\cos(p_1t+\beta_1)-\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(\zeta_2t+\alpha_2)\sin(\zeta_3t+\alpha_3)\sin(p_1t+\beta_1)\cos(p_2t+\beta_2)+\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\cos(\zeta_2t+\alpha_2)\sin(p_1t+\beta_1)\sin(p_2t+\beta_2)\sin(p_3t+\beta_3)]$
$i_3[-\cos(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(p_1t+\beta_1)\sin(p_2t+\beta_2)\sin(p_3t+\beta_3)+\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(\zeta_2t+\alpha_2)\sin(\zeta_3t+\alpha_3)\cos(p_1t+\alpha_1)-\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\cos(\zeta_2t+\alpha_2)\sin(p_1t+\beta_1)\sin(p_2t+\beta_2)\cos(p_3t+\beta_3)+\sin(\zeta_1t+\alpha_1)\sin(\zeta_2t+\alpha_2)\cos(\zeta_3t+\alpha_3)\sin(p_1t+\beta_1)\cos(p_2t+\beta_2)]$.

При этом для любого $c>0$:

(9) $\int_0^\infty e^{-ct}(\prod_{s=1}^n \cos(\alpha_s t))dt = 2^{1-n}c\sum_{v_2,...,v_n\in\{1,2\}}[c^2 + (\alpha_1 + (-1)^{v_2}\alpha_2 + ... + (-1)^{v_n}\alpha_n)^2]^{-1}$;

(10) $\int_0^\infty e^{-ct}(\prod_{s=1}^{2m} \sin(\beta_s t))dt = 2^{1-2m}c\sum_{w_1,...,w_m,v_2,...,v_m\in\{1,2\}}(-1)^{w_1+...+w_m+m}[c^2 +((\beta_1+(-1)^{w_1}\beta_2)+(-1)^{v_2}(\beta_3+(-1)^{w_2}\beta_4)+...+(-1)^{v_m}(\beta_{2m-1}+(-1)^{w_m}\beta_{2m}))^2]^{-1}$;

(11) $\int_0^\infty e^{-ct}(\prod_{s=1}^{2m+1} \sin(\beta_s t))dt = 2^{-2m}\sum_{w_1,...,w_m,v_1,...,v_m\in\{1,2\}}(-1)^{w_1+...+w_m+m}(\beta_{2m+1} +(-1)^{v_1}(\beta_1+(-1)^{w_1}\beta_2)+(-1)^{v_2}(\beta_3+(-1)^{w_2}\beta_4)+...+(-1)^{v_m}(\beta_{2m-1}+(-1)^{w_m}\beta_{2m})[c^2+(\beta_{2m+1} +(-1)^{v_1}(\beta_1+(-1)^{w_1}\beta_2)+(-1)^{v_2}(\beta_3+(-1)^{w_2}\beta_4)+...+(-1)^{v_m}(\beta_{2m-1}+(-1)^{w_m}\beta_{2m}))^2]^{-1}$;

(12) $\int_0^\infty e^{-ct}(\prod_{s=1}^n \cos(\alpha_s t))(\prod_{q=1}^{2m} \sin(\beta_q t))dt = 2^{1-n-2m}c\sum_{v_2,...,v_n,w_1,...,w_m,u_1,...,u_m\in\{1,2\}}[c^2+(\alpha_1+(-1)^{v_2}\alpha_2+...+(-1)^{v_n}\alpha_n+(-1)^{u_1}(\beta_1+(-1)^{w_1}\beta_2)+...+(-1)^{u_m}(\beta_{2m-1}+(-1)^{w_m}\beta_{2m}))^2]^{-1}$;

(13) $\int_0^\infty e^{-ct}(\prod_{s=1}^n \cos(\alpha_s t))(\prod_{q=1}^{2m+1} \sin(\beta_q t))dt = 2^{-n-2m}c\sum_{v_1,...,v_n,w_1,...,w_m,u_1,...,u_m\in\{1,2\}} (-1)^{w_1+...+w_m+m}((-1)^{v_1}\alpha_1+(-1)^{v_2}\alpha_2+...+(-1)^{v_n}\alpha_n+\beta_{2m+1}+(-1)^{u_1}(\beta_1+(-1)^{w_1}\beta_2)+ ...+(-1)^{u_m}(\beta_{2m-1}+(-1)^{w_m}\beta_{2m}))[c^2+((-1)^{v_1}\alpha_1+(-1)^{v_2}\alpha_2+...+(-1)^{v_n}\alpha_n +\beta_{2m+1}+(-1)^{u_1}(\beta_1+(-1)^{w_1}\beta_2)+...+(-1)^{u_m}(\beta_{2m-1}+(-1)^{w_m}\beta_{2m}))^2]^{-1}$.

Тогда из формул $(8-13)$ следует, что образом $\mathcal{F}(f,u;p;0)$ функции-оригинала $f(t)=\exp(u(\zeta,t;0))Ch_{[0,\infty)}(t)$ при $u(p,t;0):=p_0t+M(p,t;0)$ является:

(14) $\mathcal{F}(f,u;p;0) = \{(c/2)\sum_{v_1\in\{1,2\}}[c^2+(p_1+(-1)^{v_1}\zeta_1)^2]^{-1} + (c/8)\sum_{v_1,w_1,u_1\in\{1,2\}}(-1)^{w_1+1}[c^2+(p_2+(-1)^{v_1}\zeta_2+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1))^2]^{-1} +(c/32)\sum_{v_1,w_1,w_2,u_1,u_2\in\{1,2\}}(-1)^{w_1+w_2}[c^2+(p_3+(-1)^{v_1}\zeta_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1)+(-1)^{u_2}(p_2+(-1)^{w_2}\zeta_2))^2]^{-1} +(c/32)\sum_{w_1,w_2,w_3,u_1,u_2\in\{1,2\}}(-1)^{w_1+w_2+w_3+1}[c^2+((p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1)+(-1)^{u_1}(p_2+(-1)^{w_2}\zeta_2)+(-1)^{u_2}(p_3+(-1)^{w_3}\zeta_3))^2]^{-1}\}$
$+i_1\{-4^{-1}\sum_{v_1,v_2\in\{1,2\}}[(\zeta_1+(-1)^{v_1}p_1+(-1)^{v_2}\zeta_2)[c^2+(\zeta_1+(-1)^{v_1}p_1+(-1)^{v_2}\zeta_2)^2]^{-1}-(p_1+(-1)^{v_1}p_2+(-1)^{v_2}\zeta_1)[c^2+(p_1+(-1)^{v_1}p_2+(-1)^{v_2}\zeta_1)^2]^{-1}]-(32)^{-1}\sum_{v_1,w_1,w_2,u_1,u_2\in\{1,2\}}(-1)^{w_1+w_2}[(\zeta_3+(-1)^{v_1}p_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1)+(-1)^{u_2}(p_2+(-1)^{w_2}\zeta_2))[c^2+(\zeta_3+(-1)^{v_1}p_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1)+(-1)^{u_2}(p_2+(-1)^{w_2}\zeta_2))^2]^{-1}-(p_3+(-1)^{v_1}\zeta_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1)+(-1)^{u_2}(p_2+(-1)^{w_2}\zeta_2))[c^2+(p_3+(-1)^{v_1}\zeta_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1)+(-1)^{u_2}(p_2+(-1)^{w_2}\zeta_2))^2]^{-1}]\}$
$+i_2\{(c/8)\sum_{v_1,w_1,u_1\in\{1,2\}}(-1)^{w_1+1}[[c^2+(p_1+(-1)^{v_1}\zeta_3+(-1)^{u_1}(\zeta_1+(-1)^{w_1}\zeta_2))^2]^{-1}-[c^2+(\zeta_1+(-1)^{v_2}p_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}p_2))^2]^{-1}]+(c/16)\sum_{w_1,w_2,u_1,u_2\in\{1,2\}}(-1)^{w_1+w_2}[-[c^2+(p_2+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1)+(-1)^{u_2}(\zeta_2+(-1)^{w_2}\zeta_3))^2]^{-1}+[c^2+(\zeta_2+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1)+(-1)^{u_2}(p_2+(-1)^{w_2}p_3))^2]^{-1}]\}$
$+i_3\{8^{-1}\sum_{v_1,w_1,u_1\in\{1,2\}}(-1)^{w_1+1}[(\zeta_3+(-1)^{v_1}p_1+(-1)^{u_1}(\zeta_1+(-1)^{w_1}\zeta_2))[c^2+(\zeta_3+(-1)^{v_1}p_1+(-1)^{u_1}(\zeta_1+(-1)^{w_1}\zeta_2))^2]^{-1}-(p_3+(-1)^{v_1}\zeta_1+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}p_2))[c^2+(p_3+(-1)^{v_1}\zeta_1+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}p_2))^2]^{-1}]+(16)^{-1}\sum_{v_1,v_2,w_1,u_1\in\{1,2\}}(-1)^{w_1}[(p_2+(-1)^{v_1}\zeta_2+(-1)^{v_2}p_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1))[c^2+(p_2+(-1)^{v_1}\zeta_2+(-1)^{v_2}p_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1))^2]^{-1}-(\zeta_2+(-1)^{v_1}p_2+(-1)^{v_2}\zeta_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1))[c^2+(\zeta_2+(-1)^{v_1}p_2+(-1)^{v_2}\zeta_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{w_1}\zeta_1))^2]^{-1}]\}$,

где $c=\zeta_0-p_0$. Для ненулевых начальных фаз формула для $\mathcal{F}(f,u;p;\beta)$ функции-оригинала $f(t)=\exp(u(\zeta,t;\alpha))Ch_{[0,\infty)}(t)$ при $u(p,t;\alpha):=p_0t+M(p,t;\alpha)+\alpha_0$ аналогична, но более сложна и её можно выписать с использованием равенств:

(15) $\int_0^\infty e^{-ct}\cos(at+b)dt = [c\cos(b)-a\sin(b)][c^2+a^2]^{-1}$,

(16) $\int_0^\infty e^{-ct}\sin(at+b)dt = [c\sin(b)+a\cos(b)][c^2+a^2]^{-1}$

для любых $c>0$, $a,b\in\mathbf{R}$, а также формул $(8-13)$.

31. Теорема. *Пусть $f(t)$ – функция-оригинал, так что $f'(t)$ тоже удовлетворяет условиям 1(1-3), $u(p,t):=p_0t+M(p,t;\zeta)+\zeta_0$ над $\mathcal{A}_r$ с $2\le r<\infty$ (смотри определение 3). Тогда*

(1) $\mathcal{F}(f'(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta) = -f(0) + p_0\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta)$
$+p_1\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta - i_1\pi/2) + ... + p_{2^r-1}\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta - i_{2^r-1}\pi/2)$, *где* $Re(p) > s_0$.

Доказательство. Из уравнений 30(6,7) следует, что выполняется равенство:
(2) $\partial\exp(-u(p,t;\zeta))/\partial t = -p_0\exp(-u(p,t;\zeta)) - p_1\exp(-u(p,t;\zeta - i_1\pi/2)) - ...$
$-p_{2^r-1}\exp(-u(p,t;\zeta - i_{2^r-1}\pi/2))$, так как
$\exp(-u(p,t;\zeta)) = \exp(-p_0t - \zeta_0)\exp(-M(p,t;\zeta))$,
$\partial\exp(-p_0t-\zeta_0)/\partial t = -p_0\exp(-p_0t-\zeta_0)$,
$\partial[\cos(p_jt+\zeta_j) - \sin(p_jt+\zeta_j)i_j]/\partial t = \partial\exp(-(p_jt+\zeta_j)i_j)/\partial t$
$= -p_ji_j\exp(-(p_jt+\zeta_j)i_j) = -p_j\exp(-(p_jt+\zeta_j-\pi/2)i_j)$
$= -p_j[\cos(p_jt+\zeta_j-\pi/2) - \sin(p_jt+\zeta_j-\pi/2)i_j]$,
а интегрирование по частям дает
$\int_0^\infty f'(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt = f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))|_0^\infty - \int_0^\infty[f(t)\partial\exp(-u(p,t;\zeta))/\partial t]dt$.

32. Теорема. *Пусть* $f(t)$ *– функция-оригинал,* $u(p,t) := p_0t + M(p,t;\zeta) + \zeta_0$ *над* $\mathcal{A}_r$ *с* $2 \le r < \infty$ *(смотри определение 3). Тогда*
(1) $(\partial\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta)/\partial p).h = -\mathcal{F}(f(t)tCh_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta)h_0$
$-\mathcal{F}(f(t)tCh_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta - i_1\pi/2)h_1 - ... - \mathcal{F}(f(t)tCh_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta - i_{2^r-1}\pi/2)h_{2^r-1}$
для любого $h = h_0i_0 + ... + h_{2^r-1}i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$*, где* $h_0,...,h_{2^r-1} \in \mathbf{R}$*,* $Re(p) > s_0$.

Доказательство. Из уравнений 30(6,7) следует, что
(2) $(\partial\exp(-u(p,t;\zeta))/\partial p).h = -p_0\exp(-u(p,t;\zeta))h_0 - \exp(-u(p,t;\zeta - i_1\pi/2))h_1 -$
$... - \exp(-u(p,t;\zeta - i_{2^r-1}\pi/2))h_{2^r-1}$.
Поскольку $\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta)$ - голоморфная функция по p при $Re(p) > s_0$, а $f(t)$ удовлетворяет условиям определения 1, $|\int_0^\infty e^{-ct}t^ndt| < \infty$ для любых $c > 0$ и $n = 0,1,2,...$, то можно дифференцировать под знаком интеграла:
$(\partial(\int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t;\zeta))dt)/\partial p).h = \int_0^\infty f(t)(\partial\exp(-u(p,t;\zeta))/\partial p).hdt$.

33. Пример. Пусть $f_n(t) = t^nCh_{[0,\infty)}(t)$ - функции-оригиналы, где $n = 0,1,2,...$, при $u(p,t) := p_0t + M(p,t;\zeta) + \zeta_0$, тогда
(1) $\mathcal{F}(f_n(t),u;p;\zeta) = \int_0^\infty t^n\exp(-p_0t-\zeta_0)\cos(p_1t+\zeta_1)dt]$
$+\sum_{k=1}^{2^r-2}[\int_0^\infty t^n\exp(-p_0t-\zeta_0)\sin(p_1t+\zeta_1)...\sin(p_kt+\zeta_k)\cos(p_{k+1}t+\zeta_{k+1})dt]i_k$
$+[\int_0^\infty t^n\exp(-p_0t-\zeta_0)\sin(p_1t+\zeta_1)...\sin(p_{2^r-2}t+\zeta_{2^r-2})\sin(p_{2^r-1}t+\zeta_{2^r-1})dt]i_{2^r-1}$,
где $r=2$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ и $r = 3$ для $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, $\{i_0,i_1,...,i_{2^r-1}\}$ – стандартные генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \in \mathbf{N}$. Рассмотрим интегралы:
(2) $J_n(\alpha) := \int_0^\infty t^ne^{-\alpha t}dt$
для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ с $Re(\alpha) > 0$. В частности,
(3) $J_0(\alpha) = -\exp(-\alpha t)(\alpha)^{-1}|_0^\infty = \alpha^{-1}$. Поэтому,
(4) $J_n(\alpha) = (-1)^ndJ_0(\alpha)/d\alpha^n = n!\alpha^{-n-1}$, следовательно,
(5) $\int_0^\infty t^ne^{-\alpha t-b}dt = e^{-b}J_n(\alpha)$ для любого $b \in \mathbf{C}$, откуда следует, что
(6) $\int_0^\infty t^n\exp^{-\alpha_0t}\cos(\alpha_1t+\beta)dt = Re(\exp(-\mathbf{i}\beta)J_n(\alpha)) = n!Re(\exp(-\mathbf{i}\beta)\alpha^{-n-1})$,
(7) $\int_0^\infty t^n\exp^{-\alpha_0t}\sin(\alpha_1t+\beta)dt = -Im(\exp(-\mathbf{i}\beta)J_n(\alpha)) = n!Im(\exp(-\mathbf{i}\beta)\alpha^{-n-1})$
для любого $\beta \in \mathbf{R}$, где $Re(\alpha) = \alpha_0 = (\alpha+\bar\alpha)/2$, $Im(\alpha) = \alpha_1 = (\alpha-\bar\alpha)/(2\mathbf{i})$, $\mathbf{i} = i_1 = (-1)^{1/2}$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\mathbf{i}$. Из уравнений
(8) $\alpha^{-k} = \bar\alpha^k|\alpha|^{-2k}$ и
(9) $\alpha^{-k} = |\alpha|^{-2k}\sum_{q=0}^{[k/2]}\binom{k}{2q}(-1)^q\alpha_0^{k-2q}\alpha_1^{2q} - \mathbf{i}\sum_{q=0}^{[(k-1)/2]}\binom{k}{2q+1}(-1)^q\alpha_0^{k-2q-1}\alpha_1^{2q+1}$,
где $\binom{k}{q} = k!/[(k-q)!q!]$ – это биномиальные коэффициенты для любых $0 \le q \le k \in \mathbf{Z}$, следует, что

(10) $Re(\exp(-\mathbf{i}\beta)J_n(\alpha)) = n![\cos(\beta)\sum_q \binom{n+1}{2q}(-1)^q\alpha_0^{n-2q+1}\alpha_1^{2q}$
$-\sin(\beta)\sum_q \binom{n+1}{2q+1}(-1)^q\alpha_0^{n-2q}\alpha_1^{2q+1}](\alpha_0^2+\alpha_1^2)^{-n-1} =: T_n(\alpha_0,\alpha_1,\beta)$,

(11) $Im(\exp(-\mathbf{i}\beta)J_n(\alpha)) = -(n!)[\sin(\beta)\sum_q \binom{n+1}{2q}(-1)^q\alpha_0^{n-2q+1}\alpha_1^{2q}$
$+\cos(\beta)\sum_q \binom{n+1}{2q+1}(-1)^q\alpha_0^{n-2q}\alpha_1^{2q+1}](\alpha_0^2+\alpha_1^2)^{-n-1} =: -S_n(\alpha_0,\alpha_1,\beta)$.
Тогда из уравнений $(1-11)$ следует, что при $\mathbf{K}=\mathbf{H}$
(12) $\mathcal{F}(f_n(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta) = e^{-\zeta_0}\{T_n(p_0,p_1,\zeta_1)$
$-(i_1/2)\sum_{v_1\in\{1,2\}} S_n(p_0,p_1+(-1)^{v_1}p_2,\zeta_1+(-1)^{v_1}\zeta_2)$
$-(i_2/4)\sum_{v_1,u_1\in\{1,2\}}(-1)^{v_1}T_n(p_0,p_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{v_1}p_2),\zeta_3+(-1)^{u_1}(\zeta_1+(-1)^{v_1}\zeta_2))$
$-(i_3/4)\sum_{v_1,u_1\in\{1,2\}}(-1)^{v_1+1}S_n(p_0,p_3+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{v_1}p_2),\zeta_3+(-1)^{u_1}(\zeta_1+(-1)^{v_1}\zeta_2))\}$,
а над алгеброй $\mathcal{A}_r$ с $r\ge 3$ изображение дается формулой:
(13) $\mathcal{F}(f_n(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;\zeta) = e^{-\zeta_0}\{T_n(p_0,p_1,\zeta_1)$
$-\sum_{s=1}^{2^{r-1}-1} i_{2s}2^{-2s}\sum_{v_1,\dots,v_s,u_1,\dots,u_s\in\{1,2\}}(-1)^{v_1+\dots+v_s+s}T_n(p_0,p_{2s+1}+(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{v_1}p_2)+\dots$
$+(-1)^{u_s}(p_{2s-1}+(-1)^{v_s}p_{2s}),\zeta_{2s+1}+(-1)^{u_1}(\zeta_1+(-1)^{v_1}\zeta_2)+\dots+(-1)^{u_s}(\zeta_{2s-1}+(-1)^{v_s}\zeta_{2s}))$
$-\sum_{s=0}^{2^{r-1}-2}(i_{2s+1}2^{-2s-1})\sum_{w,v_1,\dots,v_s,u_1,\dots,u_s\in\{1,2\}}(-1)^{v_1+\dots+v_s+s}S_n(p_0,p_{2s+1}+(-1)^w p_{2s+2}+$
$(-1)^{u_1}(p_1+(-1)^{v_1}p_2+\dots+(-1)^{u_s}(p_{2s-1}+(-1)^{v_s}p_{2s}),\zeta_{2s+1}+(-1)^w\zeta_{2s+2}+(-1)^{u_1}(\zeta_1+$
$(-1)^{v_1}\zeta_2+\dots+(-1)^{u_s}(\zeta_{2s-1}+(-1)^{v_s}\zeta_{2s}))$
$-(i_{2^r-1}2^{-2^r+2})\sum_{v_1,v_2,\dots,v_{2^{r-1}-1},u_1,u_2,\dots,u_{2^{r-1}-1}\in\{1,2\}}(-1)^{v_1+v_2+v_{2^{r-1}-1}+1}S_n(p_0,p_{2^r-1}$ $+$
$(-1)^{u_1}(p_1+$
$(-1)^{v_1}p_2)+(-1)^{u_2}(p_3+(-1)^{v_2}p_4)+\dots+(-1)^{u_{2^{r-1}-1}}(p_{2^r-3}+(-1)^{v_{2^{r-1}-1}}p_{2^r-2}),\zeta_{2^r-1}+$
$(-1)^{u_1}(\zeta_1+(-1)^{v_1}\zeta_2)+(-1)^{u_2}(\zeta_3+(-1)^{v_2}\zeta_4)+\dots+(-1)^{u_{2^{r-1}-1}}(\zeta_{2^r-3}+(-1)^{v_{2^{r-1}-1}}\zeta_{2^r-2}))\}$,
где для единообразия формулы при $s=0$ суммирование по $v_1,\dots,v_s,u_1,\dots,u_s$ не проводится и берется значение $(-1)^{v_1+\dots+v_s+s}=1$.

34. Теорема. *Пусть $f(t)$ – функция-оригинал со значениями в $\mathcal{A}_r$ с $2\le r<\infty$, $u=pt$, $g(t):=\int_0^t f(x)dx$, тогда*
$\mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0)p = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;0)$,
в частности,
$\mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),u;p;0)p^{-1}$ *над алгеброй* $\mathbf{K}=\mathbf{H}$ *или* $\mathbf{K}=\mathbf{O}$.

Доказательство. В силу теоремы 28
$\mathcal{F}(g'(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0) = \mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0)p$
в одной и той же области $Re(p)>s_0$, так как $g(0)=0$, и $g(t)$ тоже удовлетворяет условиям определения 1, где $s_0\in\mathbf{R}$. Из альтернативности алгебры $\mathbf{K}$ следует, что
$\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0)p^{-1} = \mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0)$,
так как $g'(t)=f(t)$ для любых $t>0$, и $g(t)=0$ для любых $t\le 0$.

35. Теорема. *Если $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ при $u=pt$ в полупространстве $\{p\in\mathcal{A}_r : Re(p)>s_0\}$ с $2\le r<\infty$, интеграл $\int_p^\infty F(z)dz$ сходится и выполнено условие 23(3), то*
$\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t)/t,pt;p;0) = \int_p^\infty F(z)dz$.

Доказательство. Пусть путь интегрирования весь лежит в полупространстве $Re(p)\ge a$ для некоторой константы $a>s_0$, тогда $|\int_0^\infty f(t)\exp(-pt)dt| \le C\int_0^\infty \exp(-(p_0-s_0)t)dt < \infty$ сходится, где $C=const>0$, $p_0\ge a$. Можно полагать $t>0$, тогда выполнены условия леммы 23, причем $\int_p^\infty F(z)dz = \lim_{0<\theta\to 0}\int_p^\infty F(z)\exp(-\theta z)dz$, так как интеграл $\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} F(p)dp$ абсолютно сходится, а $\lim_{\theta\to 0}\exp(-\theta z)=1$ равномерно по z на любом компактном подмножестве в $\mathcal{A}_r$. Поэтому в интеграле

$\int_p^\infty F(z)dz = \int_p^\infty (\int_0^\infty f(t)\exp(-pt)dt)dz$
можно изменить порядок интегрирования:
$\int_p^\infty F(z)dz = \int_0^\infty f(t)(\int_p^\infty \exp(-zt)dz)dt = \int_0^\infty f(t)[-e^{-zt}/t]|_p^\infty dt = \int_0^\infty f(t)t^{-1}\exp(-pt)dt$,
так как в силу леммы 23 можно взять аргумент $z-z_0$ изменяющимся вдоль прямой линии параллельной $p-p_0$, причем z_0 стремится к $+\infty$, где $p_0 := Re(p)$.

36. Примеры. 1. При $u = pt$, $\mathcal{F}((e^{bt}-e^{ct})Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = (p-b)^{-1} - (p-c)^{-1}$ для любых $b, c \in \mathbf{R}$. Тогда в силу примера 26.6 и теоремы 35 $\mathcal{F}((e^{bt}-e^{ct})Ch_{[0,\infty)}(t)/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty ((z-b)^{-1} - (z-c)^{-1})dz = Ln[(p-b)^{-1}(p-c)]$ (смотри также следствия 3.5 и 3.6, и замечания 3.7, 3.8 в [14]).

2. В силу примера 26 и теоремы 35 $\mathcal{F}(\sin(t)Ch_{[0,\infty)}(t)/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty ((1+z^2)^{-1}dz = (\pi/2) - arctg(p) = arcctg(p)$.

Тогда из теоремы 34 следует, что $\mathcal{F}(si(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = p^{-1}arcctg(p)$, где $si(t) := \int_0^t t^{-1}\sin(t)dt$ обозначает интегральный синус.

3. Вычислим образ $F(p)$ функции-оригинала $f(t) = Ch_{[0,\infty)}(t)(e^{bt}-e^{at})/t$, где $t \in \mathbf{R}$, параметры a и b принадлежат алгебре $\mathcal{A}_r$, $u = pt$. Тогда

(i) $F(p) = \int_0^\infty t^{-1}[\exp(b_0t)(\cos(|b'|t) + \sin(|b'|t)b'/|b'|) - \exp(a_0t)(\cos(|a'|t) + \sin(|a'|t)a'/|a'|)]$
$\exp(-p_0t)(\cos(|p'|t) - \sin(|p'|t)p'/|p'|)dt$,
где $a = a_0 + a'$, $a_0 := Re(a)$, $b = b_0 + b'$, $b_0 := Re(b)$, $p = p_0 + p'$, $p_0 := Re(p)$. Пусть $a_0 \le b_0 < p_0$. Прибавление и вычитание из правой части формулы (i) интеграла $\int_0^\infty t^{-1}\exp(b_0t)(\cos(|a'|t)+\sin(|a'|t)a'/|a'|)\exp(-p_0t)(\cos(|p'|t)-\sin(|p'|t)p'/|p'|)dt$, группировка членов и использование формул 30.3(i-iv) дает:

(ii) $F(p) = -\int_0^\infty t^{-1}\exp((b_0-p_0)t)[\sin(((|b'|+|a'|)2^{-1}+|p'|)t)+\sin(((|b'|+|a'|)2^{-1}-|p'|)t)+(\cos(((|b'|+|a'|)2^{-1}+|p'|)t)-\cos(((|b'|+|a'|)2^{-1}-|p'|)t))p']\sin((|b'|-|a'|)2^{-1}t)]dt + \int_0^\infty t^{-1}\exp((b_0-p_0)t)(\sin(|b'|t)\cos(|p'|t)b'/|b'| - \sin(|b'|t)\sin(|p'|t)b'p'|b'|^{-1}|p'|^{-1}$
$-\sin(|a'|t)\cos(|p'|t)a'/|a'| + \sin(|a'|t)\sin(|p'|t)a'p'|a'|^{-1}|p'|^{-1})dt + 2^{-1}\int_0^\infty t^{-1}\exp((b_0-p_0)t)(1-\exp((a_0-b_0)t)(\cos((|a'|+|p'|)2^{-1}t)+\cos((|a'|-|p'|)2^{-1}t))dt$
$+\int_0^\infty t^{-1}[\exp((b_0-p_0)t)-\exp((a_0-p_0)t][-\cos(|a'|t)\sin(|p'|t)p'/|p'| + \cos(|p'|t)\sin(|a'|t)a'/|a'| - \sin(|p'|t)\sin(|a'|t)a'p'|a'|^{-1}|p'|^{-1})dt$.

Теперь воспользуемся формулами для появившихся интегралов с параметрами $v, w, s \in \mathbf{C}$:

(iii) $J_1(v,s) := \int_0^\infty \exp(-vx)x^{-1}\sin(sx)dx = \mathrm{arctg}(s/v)$ при $Re(v) > |Im(s)|$;

(iv) $J_2(v,w,s) := \int_0^\infty x^{-1}\exp(-vx)\sin(wx)\sin(sx)dx = 4^{-1}ln[(v^2+(w+s)^2)(v^2+(w-s)^2)^{-1}]$,
при $Re(p) > |Im(w)| + |Im(s)|$;

(v) $J_3(v,w,s) := \int_0^\infty x^{-1}\exp(-vx)\sin(wx)\cos(sx)dx = 2^{-1}\mathrm{arctg}(2wv(v^2+s^2-w^2)^{-1}) + \{\binom{0}{\pi/2}\}$,
где $Re(v) > |Im(w)| + |Im(s)|$, $\{\binom{v^2+s^2\ge w^2}{v^2+s^2<w^2}\}$, и в зависимости от выполнения верхнего или нижнего неравенства берется 0 или $\pi/2$ в $\{\binom{0}{\pi/2}\}$;

(vi) $J_4(v,w,s) := \int_0^\infty \exp(-vx)(1-\exp(-wx))\cos(sx)dx = (2w)^{-1}[B(2,(v-\mathbf{i}s)w^{-1}) + B(2,(v+\mathbf{i}s)w^{-1})]$,
где $Re(w) > 0$, $Re(v) > |Im(s)|$ (смотри формулы 11 на стр. 447, 8, 10 на стр. 449 и 8 на стр. 450 в [18]), $B(v,w) := \int_0^1 \tau^{v-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau = \Gamma(v)\Gamma(w)/\Gamma(v+w)$ и $\Gamma(v) := \int_0^\infty e^{-t}t^{v-1}dt$ при $Re(v) > 0$, $Re(w) > 0$. Поэтому из формул $(ii-vi)$ следует, что

(vii) $F(p) = -J_2(p_0-b_0, (|b'|-|a'|)2^{-1}, (|a'|+|b'|)2^{-1}+|p'|) - J_2(p_0-b_0, (|b'|-|a'|)2^{-1}, (|a'|+|b'|)2^{-1}-|p'|) - J_3(p_0-b_0, (|b'|-|a'|)2^{-1}, (|b'|+|a'|)2^{-1}+|p'|)p' + J_3(p_0-b_0, (|b'|-|a'|)2^{-1}, (|b'|+|a'|)2^{-1}-|p'|)p' + J_3(p_0-b_0, |b'|, |p'|)b'/|b'| - J_3(p_0-b_0, |a'|, |p'|)a'/|a'|$

$-J_2(p_0-b_0,|b'|,|p'|)b'p'|b'|^{-1}|p'|^{-1}+J_2(p_0-b_0,|a'|,|p'|)a'p'|a'|^{-1}|p'|^{-1}+2^{-1}J_4(p_0-b_0,b_0-a_0,(|a'|+|p'|)/2)+2^{-1}J_4(p_0-b_0,b_0-a_0,(|a'|-|p'|)/2)-J_3(p_0-b_0,|p'|,|a'|)p'/|p'|+J_3(p_0-b_0,|a'|,|p'|)a'/|a'|-J_2(p_0-b_0,|a'|,|p'|)a'p'|a'|^{-1}|p'|^{-1}+J_3(p_0-a_0,|p'|,|a'|)p'/|p'|-J_3(p_0-a_0,|a'|,|p'|)a'/|a'|+J_2(p_0-a_0,|a'|,|p'|)a'p'|a'|^{-1}|p'|^{-1}$,
где $\mathbf{i}=(-1)^{1/2}=i_1$. При этом $\mathcal{F}((e^{bt}-e^{at})/t,pt;p;0)=\int_p^\infty(\mathcal{F}(e^{bt},pt;z;0)-\mathcal{F}(e^{at},pt;z;0))dz$, где z стремится к бесконечности в угле $|Arg(z)|<\pi/2-\delta$ для некоторого $0<\delta<\pi/2$.

37. Теорема. *Если $f(t)$ – функция-оригинал, то*

(1) $\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)}(t-\tau),u;p;\zeta)=\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t),u;p;\zeta+p\tau)$ *при* $u(p,t;\zeta)=p_0t+\zeta_0+M(p,t;\zeta)$ *или* $u(p,t;\zeta)=pt+\zeta$ *над* $\mathcal{A}_r$ *с* $2\le r<\infty$,

(2) $\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t-\tau),pt;p;0)=\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t),pt;p;0)e^{-p\tau}$ *над* $\mathbf{K}=\mathbf{H}$ *или* $\mathbf{K}=\mathbf{O}$ *с* $f(\mathbf{R})\subset\mathbf{K}$, *или над* $\mathcal{A}_r$ *с* $4\le r$ *при* $f(\mathbf{R})\subset\mathbf{R}$, *в полупространстве* $Re(p)>s_0$.

Доказательство. Для p в полупространстве $Re(p)>s_0$ выполняются равенства:
$\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t-\tau),u;p;\zeta)=\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-u(p,t;\zeta)}dt=\int_0^\infty f(t_1)e^{-u(p,t_1;\zeta+p\tau)}dt_1$
$=\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t),u;p;\zeta+p\tau)$, в силу формул 3(1-5), так как $p_jt+\zeta_j=p_jt_1+(\zeta_j+p_j\tau)$ для любого $j=0,1,...,2^r-1$, где $t=t_1+\tau$, в частности, при $u=pt$, над $\mathbf{K}=\mathbf{H}$ или $\mathbf{K}=\mathbf{O}$ с $f(\mathbf{R})\subset\mathbf{K}$, или над $\mathcal{A}_r$ с $4\le r$ при $f(\mathbf{R})\subset\mathbf{R}$:
$\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t-\tau),pt;p;0)=\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1$
$=\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t),pt;p;0)e^{-p\tau}$, так как $t,\tau\in\mathbf{R}$, алгебра $\mathbf{K}$ альтернативна, а $\mathbf{R}$ – центр алгебры $\mathcal{A}_r$.

38. Замечание. В силу определения преобразования $\mathcal{F}$ и $u(p,t;\zeta)$, и теоремы 37 можно интерпретировать $\zeta_1i_1+...+\zeta_{2^r-1}i_{2^r-1}$ как начальную фазу запаздывания.

39. Теорема. *Если $f(t)$ – функция-оригинал со значениями в $\mathcal{A}_r$ с $2\le r<\infty$, $b\in\mathbf{R}$, тогда $\mathcal{F}(e^{bt}f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;\zeta)=\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p-b;\zeta)$ для любого $Re(p)>s_0+b$.*

Доказательство. Если $Re(p)>s_0+b$, то сходится интеграл
$\mathcal{F}(e^{bt}f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;\zeta)=\int_0^\infty f(t)e^{bt}\exp(-pt-\zeta)dt$
$=\int_0^\infty f(t)\exp(-(p-b)t-\zeta)dt=\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p-b;\zeta)$.

40. Примеры. 1. $\mathcal{F}(e^{-bt}\sin(at)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0)=a[(p+b)^2+a^2]^{-1}$, где $a,b\in\mathbf{R}$, $Re(p)>b$, $p\in\mathcal{A}_r$.

2. $\mathcal{F}(e^{-bt}\cos(at)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0)=(p+b)[(p+b)^2+a^2]^{-1}$, где $a,b\in\mathbf{R}$, $Re(p)>b$.

3. $\mathcal{F}(e^{-bt}t^nCh_{[0,\infty)}(t),pt;p;0)=n!(p+b)^{-n-1}$, где $b\in\mathbf{R}$, $Re(p)>b$ (смотри примеры 26.2, 26.3 и 30.1).

41. Теорема. *Если $f(t)$ и $g(t)$ - функции-оригиналы, где g с действительными значениями для любого t, тогда*
$\mathcal{F}(\int_0^tf(\tau)g(t-\tau)d\tau,pt;p;0)=\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0)\mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t),pt;p;0)$
для любых $p\in\mathcal{A}_r$ с $Re(p)>s_0$, где $s_0=\max(s_0(f),s_0(g))$, а $2\le r<\infty$.

Доказательство. Свертка функций $q(t):=\int_0^tf(\tau)g(t-\tau)d\tau$ удовлетворяет свойствам 1 и 2 определения 1. При этом $|\int_0^tf(\tau)g(t-\tau)d\tau|<C|\int_0^t\exp(s_0\tau)\exp(s_0(t-\tau))d\tau|=Ct\exp(s_0t)<C_1\exp((s_0+\epsilon)t)$, где C,C_1 – положительные постоянные, $\epsilon>0$ можно выбрать произвольно малым числом для соответствующей константы C_1. Значит, выполнено и свойство 3 определения 1, то есть, $q(t)$ является функцией-оригиналом. Запишем функции f и g в виде: $f=\sum_vf_vi_v$, $g=\sum_vg_vi_v$, где f_v и g_v – функции со значениями в $\mathbf{R}$, $\{i_v:v=0,1,...,2^r-1\}$ – генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$. Тогда в силу теоремы Фубини

$\mathcal{F}(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, pt; p; 0) = \sum_{w,v=0}^{2^r-1} i_w i_v \int_0^\infty (\int_0^t f_w(\tau)g_v(t-\tau)d\tau)\exp(-pt)dt$
$= \sum_{w,v=0}^{2^r-1} i_w i_v (\int_0^\infty f_w(\tau)\exp(-p\tau)d\tau)(\int_0^\infty g_v(t_1)\exp(-pt_1)dt_1)$,
для любых $Re(p) > s_0$, где $t_1 := t-\tau$. Поскольку $g(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, то $g = g_0$, что дает формулу теоремы.

42. Теорема. *Пусть $f(t)$ – действительнозначная функция-оригинал, $F(p) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t); u; p; 0)$, $G(p)$ и $q(p)$ – аналитические функции такие, что*
$\mathcal{F}(g(t,\tau)Ch_{[0,\infty)}(t); u; p; 0) = G(p)\exp(-u(q(p),\tau;0))$
для $u = pt$ или $u = p_0t + M(p,t;0)$, тогда
$\mathcal{F}(\int_0^\infty g(t,\tau)f(\tau)d\tau; u; p; 0) = G(p)F(q(p))$
для любых $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) > s_0$ и $Re(q(p)) > s_0$, где $s_0 = \max(s_0(f), s_0(g))$, $2 \le r < \infty$.

Доказательство. Пусть $Re(p) > s_0$ и $Re(q(p)) > s_0$, где $s_0 = \max(s_0(f), s_0(g))$, тогда в силу теоремы Фубини и условий теоремы изменение порядка интегрирования дает равенства:
$\int_0^\infty(\int_0^\infty g(t,\tau)f(\tau)d\tau)\exp(-u(p,t;0))dt = \int_0^\infty(\int_0^\infty g(t,\tau)\exp(-u(p,t;0))dt)f(\tau)d\tau$
$= \int_0^\infty G(p)\exp(-u(q(p),\tau;0))f(\tau)d\tau = G(p)\int_0^\infty f(\tau)\exp(-u(q(p),\tau;0))d\tau = G(p)F(q(p))$,
так как $t, \tau \in \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}$ – центр алгебры $\mathcal{A}_r$.

43. Примеры. Рассмотрим $G(p) = p^{-1/2}$ и $q(p) = p^{1/2}$, причем по формуле обращения теоремы 19 имеем $g(t) = (2\pi i_1)^{-1}\int_{a-i_1\infty}^{a+i_1\infty} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp$,
так как p^s и p коммутируют при $s \in \mathbf{R}$ и $p \in \mathcal{A}_r$ в силу полярной формы $p = |p|\exp(\theta M)$ чисел Кэли-Диксона, в частности, кватернионов и октонионов, где $\theta \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, и формулы для экспоненциальной функции $\exp(\theta M) = \cos(\theta) + \sin(\theta)M$ [14, 15].

Рассмотрим сначала значения $t > 0$. Пусть $0 < v < R < \infty$ и рассмотрим петлю (замкнутую кривую) γ составленную из отрезка $\{z \in \mathcal{A}_r : z = a + i_1c, c \in [-b, b]\}$, где $a^2 + b^2 = R^2$, дуг $S_1(R)$ и $S_2(R)$ окружности $S(R) = \{z \in \mathcal{A}_r : z = z_0 + i_1z_1, |z| = R, z_0, z_1 \in \mathbf{R}\}$, где дуга $S_1(R)$ соединяет точку $(a + i_1b)$ с $(-R + i_1\epsilon)$ при обходе по часовой стрелке, $S_2(R)$ соединяет точку $(-R - i_1\epsilon)$ с $(a - i_1b)$, $\epsilon > 0$ – малое число. Точки $(-v + i_1\epsilon)$ и $(-R + i_1\epsilon)$ соединены отрезком $[-v + i_1\epsilon, -R + i_1\epsilon]$ прямой линии, а также $(-R - i_1\epsilon)$ и $(-v - i_1\epsilon)$ соединены отрезком прямой $[-R - i_1\epsilon, -v - i_1\epsilon]$. Остальная часть γ состоит из дуги $S_3(v)$ окружности $S(v)$ от точки $-v - i_1\epsilon$ до $-v + i_1\epsilon$, проходимой по против часовой стрелки. Внутри этого контура полагаем $-\pi < \theta < \pi$, где $M = i_1$. Тогда в силу теоремы 2.11 [14, 15] $\int_\gamma p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$, следовательно,
$\int_{a-i_1\infty}^{a+i_1\infty} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp =$
$\int_{S_2(R)\cup[-R-i_1\epsilon,-v-i_1\epsilon]\cup S_3(v)\cup[-v+i_1\epsilon,-R+i_1\epsilon]\cup S_1(R)} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp$.
В силу леммы 12.1 $\lim_{R\to\infty}\int_{S_2(R)\cup S_1(R)} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$, следовательно,
$g(t;\tau) = (2\pi i_1)^{-1}\int_{[-R-i_1\epsilon,-v-i_1\epsilon]\cup S_3(v)\cup[-v+i_1\epsilon,-R+i_1\epsilon]} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp$.
Вдоль отрезка $[-R - i_1\epsilon, -v - i_1\epsilon]$ имеем $p = x\exp(-i_1\pi) - i_1\epsilon$ и $(p + i_1\epsilon)^{1/2} = -i_1x^{1/2}$, а вдоль отрезка $[-v + i_1\epsilon, -R + i_1\epsilon]$ получаем $p = x\exp(i_1\pi) + i_1\epsilon$ и $(p - i_1\epsilon)^{1/2} = i_1x^{1/2}$, где $x > 0$, $x^{1/2}$ – положительная ветвь квадратного корня (арифметическое значение), следовательно, $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{[-R-i_1\epsilon,-v-i_1\epsilon]} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = \int_R^v \tilde{i}_1x^{-1/2}\exp(i_1\tau x^{1/2} - xt)dx$ и $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{[-v+i_1\epsilon,-R+i_1\epsilon]} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = -\int_v^R \tilde{i}_1x^{-1/2}\exp(-i_1\tau x^{1/2} - xt)dx$, а $\lim_{v\to 0}\int_{S_3(v)} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$, так как $|\int_{S_3(v)} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp| \le C2\pi v^{1/2}$, где $C = const > 0$. Сдела-

ем замену переменной $x = y^2$ и воспользуемся известным интегралом Пуассона $\int_0^\infty \exp(-ax^2)\cos(bx)dx = (\pi/a)^{1/2}\exp(-b^2/(4a))/2$, где $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, тогда $g(t;\tau) = \pi^{-1}\int_0^\infty x^{1/2}\cos(\tau x^{1/2})\exp(-xt)dx = (2/\pi)\int_0^\infty \exp(-ty^2)\cos(\tau y)dy = (\pi t)^{-1/2}\exp(-\tau^2/(4t))$. Далее получим, что $\lim_{R\to\infty}\int_{S_4(R)} p^{-1/2}\exp(-\tau p^{1/2}+pt)dp = 0$ при $t<0$, где $S_4(R)$ – дуга окружности $S(R)$, соединяющая точки $(a-i_1b)$ и $(a+i_1b)$ при обходе против часовой стрелки с $Re(p) > 0$, следовательно, аналогичные рассуждения приведенным выше показывают, что $g(t;\tau) = 0$ при $t < 0$. Тогда

(1) $g(t;\tau) = (\pi t)^{-1/2}\exp(-\tau^2/(4t))$ при $t > 0$.

Итак, в силу теоремы 42:

(1) $\mathcal{F}((\pi t)^{-1/2}\int_0^\infty \exp(-\tau^2/(4t))f(\tau)d\tau; u; p; 0) = p^{-1/2}F(p^{1/2})$,

где $f(t)$ – оригинал функции $F(p)$.

В частности, возьмем $F(p) = p^{-1}\exp(-ap)$, где $0 < a \in \mathbf{R}$. Согласно формуле 26(2) $f(t) = Ch_{[0,\infty)}(t-a)$. Тогда в силу формулы (1) получим:

(2) $p^{-1}\exp(-ap^{1/2}) = \mathcal{F}((\pi t)^{-1/2}\int_a^\infty \exp(-\tau^2/(4t))d\tau; u; p; 0)$,

где $\int_a^\infty \exp(-\tau^2/(4t))d\tau = 2(\pi)^{-1/2}\int_{t^{-1/2}a/2}^\infty \exp(-x^2)dx$, $x := t^{-1/2}\tau/2$. Обозначая стандартным образом $erf(y) := \int_0^y \exp(-x^2)dx$, $Erf(y) := 1 - erf(y)$, запишем формулу (2) в виде:

(3) $\mathcal{F}(Erf(t^{-1/2}a/2); u; p; 0) = p^{-1}\exp(-ap^{1/2})$ при $u = pt$ и $Re(p) > 0$, $p \in \mathcal{A}_r$, $2 \le r \in \mathbf{N}$.

44. Теорема. *Пусть функция $F(p)$ голоморфна в полупространстве $Re(p) > s_0$, где $p \in \mathcal{A}_r$, $2 \le r \in \mathbf{N}$, $s_0 \in \mathbf{R}$. Причем, $F(p)$ правильна в бесконечно удаленной точке и имеет в её окрестности $\{p \in \mathcal{A}_r : |p| \ge R\}$ лорановское разложение:*

(1) $F(p) = \sum_{l=1}^\infty c_l g_l(p)$,

где $c_l \in \mathcal{A}_r$, $g_l(p) := p^{-l}$ при $u = pt$, $g_l(p)$ с $l = n-1$ дается формулами (12,13) примера 33 при $u = p_0t + \zeta_0 + M(p,t;\zeta)$, $0 < R < \infty$, то оригиналом $f(t)$ является функция:

(2) $f(t) = Ch_{[0,\infty)}(t)\sum_{l=1}^\infty c_l t^{l-1}/(l-1)!$.

Доказательство. Положим $q = p^{-1}$ и обозначим $G(q) := F(1/q)$. Поэтому функция $G(q)$ аналитична в шаре $\{q : |q| \le R^{-1}\}$. При $u = pt$ каждая функция равна $g_l(1/q) = q^l$, а при $u = p_0t + \zeta_0 + M(p,t;\zeta)$ функция $g_l(1/q)$ голоморфна по q, так как в примере 33 и последующих примерах используются выражения p_j через p с помощью генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$ (смотри формулы 3(6)), что дает локальную аналитичность $F(p;\zeta)$ по p и ζ. В силу формул 33(4,10,11) асимптотически $|q_l(1/q)|$ ведет себя как $|q_l(1/q)| \le C'|q|^l$ при $|q| \to \infty$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus i_1\mathbf{R}$, где $C' = const > 0$ независимая от $l = n-1$. Тогда неравенство (4) из теоремы 2.7 и теорема 3.21 [14,15] дают $|c_l| < C_0C_1\exp(C_2R^n)R^l$ для любого $l \in \mathbf{N}$, где $n = 2^r + 2$, $2 \le r \in \mathbf{N}$, в частности, $r = 2$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, $r = 3$ для $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, C_1 и C_2 – положительные постоянные независимые от функции, $C_0 = \max_{|q|\le 1/R}|G(q)|$. Поэтому,

$|f(t)| \le \sum_{l=1}^\infty |c_l| t^{l-1}/(l-1)! \le C_0C_1\exp(C_2R^n)\sum_{l=0}^\infty (R|t|)^l/l! = C_0C_1\exp(C_2R^n + R|t|)$, следовательно,

$|f(t)| \le C\exp(Rt)$ для любого $t \ge 0$, где $C = C_0C_1\exp(C_2R^n)$. Итак, функция $f(t)Ch_{[0,\infty)}(t)$ является оригиналом, так как $t \in \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}$ – центр алгебры $\mathcal{A}_r$. В силу равномерной сходимости ряда (2) его можно почленно интегрировать с множителем $\exp(u(p,t;\zeta))$ по t от 0 до ∞ при $Re(p) > R$. Следует отметить, что $|\mathcal{F}(t^{l-1}/(l-1)!, u; p; \zeta)| \le [(l-1)!]^{-1}(\int_0^\infty t^{l-1}\exp(-p_0t)dt) \le p_0^{-l}$ при $u = p_0t + \zeta_0 + M(p,t;\zeta)$. Поскольку $\mathcal{F}(t^n; u; p, \zeta) = g_l(p)$, где $\zeta = 0$ при $u = pt$, $\zeta \in \mathcal{A}_r$ может быть отлично от нуля для $u = p_0t + \zeta_0 + M(p,t;\zeta)$, то отсюда и из примеров 26 и 33 следует утверждение данной теоремы.

45. Определение. Функция $F : U \to \mathcal{A}_r$ из области U в алгебру $\mathcal{A}_r$ называется мероморфной, если она голоморфна на $U \setminus P$, где P – счетное множество точечных полюсов функции F, причем в каждой ограниченной подобласти V в U подмножество $V \cap P$ полюсов конечно, в частности, может быть $P = \emptyset$.

46. Теорема. *Пусть функция $F(p)$ удовлетворяет условиям:*

(1) *$F(p)$ мероморфна в полупространстве $W := \{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > s_0\}$ и все её полюсы могут быть лишь конечного порядка;*

(2) *причем для любого $a > s_0$ существуют константы $C_a > 0$ и $\epsilon_a > 0$ такие, что $|F(p)| \le C_a \exp(-\epsilon_a |p|)$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) \ge a$, где s_0 фиксировано, $2 \le r < \infty$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $r \ge 4$;*

(3) *интеграл $\int_{a+i_1\theta, \theta \in \mathbf{R}} F(p)dp$ абсолютно сходится для любого $a > s_0$, где $i_0, i_1, ..., i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$ – это стандартные генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$. Тогда оригиналом для $F(p)$ является функция*

(4) $f(t) = (i_1)^{-1} \sum_{p_k} res(p_k, F(p) \exp(u(p, t; 0)).i_1$
при $r = 2, 3$; а при $4 \le r \in \mathbf{N}$, если $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$ в порядке неубывания их модулей.

Доказательство. В силу теоремы 22 над $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, а также произвольной алгебры $\mathcal{A}_r$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $4 \le r \in \mathbf{N}$, $F(p)$ является изображением функции

(5) $f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{i}_1 \int_{a-i_1\infty}^{a+i_1\infty} F(p) \exp(u(p, t; 0))dp$. Из определения 34 следует, что существует последовательность радиусов $0 < R_n < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$, так что $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$, а сфера $S_n := S(\mathcal{A}_r, 0, R_n)$ не содержит ни одного полюса $p_k \in P$, следовательно, $\min_{p \in P, z \in S_n} |p - z| =: \delta_n > 0$ в силу компактности сферы S_n и шара $B(\mathcal{A}_r, 0, R_{n+1})$, где $S(\mathcal{A}_r, y, R) := \{z \in \mathcal{A}_r : |z - y| = R\}$, $y \in \mathcal{A}_r$, $0 < R < \infty$, $B(\mathcal{A}_r, y, R) := \{z \in \mathcal{A}_r : |z| \le R\}$. Рассмотрим сечение сферы S_n плоскостью $\mathbf{R} \oplus i_1\mathbf{R}$ и часть γ_n окружности $\psi_n := S_n \cap (\mathbf{R} \oplus i_1\mathbf{R})$, расположенную правее гиперплоскости $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) = a\}$ над $\mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_r$, то есть, в полупространстве $Re(p) > a$. Обозначим через $a - i_1 b_n$ и $a + i_1 b_n$ точки пересечения окружности ψ_n с гиперплоскостью $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) = a\}$, а через w_n - петлю проходимую против часовой стрелки и составленную из γ_n и отрезка $[a - i_1 b_n, a + i_1 b_n]$. Согласно лемме 12.1

(6) $\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(u(p, t))dp = 0$, следовательно,

(7) $f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{i}_1 \lim_{n\to\infty} \int_{w_n} F(p) \exp(u(p, t; 0))dp$.
Тогда из теоремы 3.23 [14, 15] и формул $(6, 7)$ следует формула (4) данной теоремы.

47. Замечание. Лемма 23 также выполняется при условии

($2'$) существует последовательность гиперсфер $S_n = S(\mathcal{A}_r, 0, R_n)$ над $\mathbf{R}$ вложенных в $\mathcal{A}_r$ с центром в нуле и радиусов R_n с $R_n < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$, так что $\lim_{n\to\infty} \sup_{p \in S_n \cap W} |\hat{F}(p)| = 0$
вместо условия (2) при выполнении остальных условий леммы 23.

В самом деле, достаточно её доказать для некоторой последовательности дуг γ_n окружностей ψ_n, содержащихся в плоскости $\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$, где $N \in \mathcal{A}_r$, $Re(N) = 0$, $|N| = 1$.

Если $F(p)$ голоморфна в W, то в силу теоремы 2.11 [14, 15] $\int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta))dp$ не зависит от вида кривой и определяется лишь начальной и конечной её точками. Если $V(\gamma_n) \le C_V R_n$ для любого n, то достаточно доказать утверждение леммы для любой подпоследовательности $R_{n(k)}$ с $R_{n(k+1)} \ge R_{n(k)} + 1$ для любого $k \in \mathbf{N}$, что также видно из оценок интегралов ниже. Обозначим такую подпоследовательность через R_n. Каждую спрямляемую кривую можно аппроксимировать сходящейся последовательностью спрямляемых ломаных линий, составленных из дуг окружностей. Если кривая расположена на сфере, то эти окружности можно взять на сфере с тем же центром. Поскольку условие $(2')$ выполняется равномерно относительно направляющих N и можно выполнить диффеоморфизм g в $\mathcal{A}_r$, так что $g(W) = W$, $g(S_n) = S_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$, и образом C^1 кривой из W является дуга окружности, так как $0 < R_n + 1 < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$. Функционал $(F, \gamma) \mapsto \int_\gamma F(p)dp$ непрерывен из $C^0(V, \mathcal{A}_r) \times \Gamma$ в $\mathcal{A}_r$, где V – компактная область в $\mathcal{A}_r$, Γ – семейство спрямляемых кривых в V с метрикой $\rho(v, w) := \max(\sup_{z\in v} \inf_{\zeta\in w} |z - \zeta|, \sup_{z\in w} \inf_{\zeta\in v} |z - \zeta|)$ (смотри теорему 2.7 [14, 15]). При этом спрямляемая кривая является равномерным пределом C^1 кривых, так как каждая спрямляемая кривая непрерывна, а пространство функций C^1 плотно в пространстве непрерывных функций C^0 в компактно-открытой топологии, каждая C^1-кривая спрямляема. То есть, рассмотрим $\gamma_n = \psi_n \cap \{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > a\} \cap W$. Используя автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_r$ достаточно доказать равенство

$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t))dp = 0$

для любого $t > 0$ при $u = pt + \zeta$ согласно леммам 8.1, 8.2 и доказательству теоремы 19. При этом $\exp(tNz)dz = (tN)^{-1} d \exp(tNz)$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$. Сделаем замену переменной $z = (p + \zeta/t)N$, тогда

$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta))dp = \lim_{n\to\infty} [\int_{\eta_n} F(\tilde{N}z) \exp(tNz)dz]\tilde{N}$,

где $\eta_n = \gamma_n N$, а $z = x + Ny$, где $x, y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$, $b_n := \sup_{p\in S_n\cap W} |\hat{F}_n(p)|$, $\phi_n := \arcsin(a/R_n)$. Тогда

$|\int_{\eta_n; -a\le y\le 0} F(\tilde{N}z) \exp(tNz)dz| \le b_n \exp(at)\phi_n R_n$.

Поскольку $\sin(\phi) \ge 2\phi/\pi$ для любого $0 \le \phi \le \pi/2$, то $|\exp(tNz)| = \exp(-tR_n \sin(\phi)) \le \exp(-2tR_n\phi/\pi)$, следовательно,

$|\int_{\eta_n; 0\le y\le R_n} F(\tilde{N}z) \exp(tNz)dz| \le 2b_n R_n \int_0^{\pi/2} \exp(-2tR_n\phi/\pi)d\phi = 2b_n\pi(1 - \exp(-tR_n))/(2t)$.

Итак, $\lim_{n\to\infty} \int_{\eta_n} F(\tilde{N}z) \exp(-u(\tilde{N}z, t))dz = 0$ для любого $t > 0$. Отсюда вытекает равенство 12.1(4).

Тогда и теорема 22 выполняется при наложении условия $(2')$ вместо условия (i) при выполнении остальных условий теоремы 22, а значит в таком варианте, при условии $(2')$ вместо (2), выполняется и теорема 46.

48. Теорема. *Если функция $f(t)$ и её производная $f'(t)$ являются оригиналами, а $F(p)$ – изображение функции $f(t)$ при $u = pt$ над $\mathcal{A}_r$ с $2 \le r \in \mathbf{N}$, то*

(1) $\lim_{p\to\infty} F(p)p = f(0)$, где $p \to \infty$ внутри угла $|Arg(p)| < \pi/2 - \delta$ для некоторого $0 < \delta < \pi/2$ и $f(0) = \lim_{t\to+0} f(t)$; если дополнительно существует предел $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, то

(2) $\lim_{p\to 0} F(p)p = f(\infty)$, где $p \to 0$ внутри того же угла.

Доказательство. Если $z \in \mathcal{A}_r$, то оно имеет полярное разложение $z = |z| \exp(M)$, где $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) = 0$, $Arg(z) := M$ (смотри следствие 3.6 в [14]). В силу теоремы 28 выполняется равенство $\mathcal{F}(f'(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = F(p)p - f(0)$. Тогда согласно замечанию 8 $\lim_{p\to\infty, |Arg(p)|<\pi/2-\delta}(F(p)p - f(0)) = 0$. Если ещё существует $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, причем $|f(\infty)| < \infty$, то f ограничена на $\mathbf{R}$, следовательно, её порядок роста $s_0 \le 0$, поэтому, функция $F(p)$ определена для любого $Re(p) > 0$. Из формулы $\int_0^\infty f'(t) \exp(-pt)dt = F(p)p - f(0)$ вытекает, что при $p = 0$ интеграл $\int_0^\infty f'(t)dt$ сходится. Тогда в угле $|Arg(p)| < \pi/2 - \delta$ интеграл $\int_0^\infty f'(t) \exp(-pt)dt$ сходится равномерно по p. Поэтому, можно перейти к пределу при $p \to 0$ в этом угле, то есть, $\int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p)p - f(0) = f(\infty) - f(0)$, следовательно, $\lim_{p\to 0} F(p)p - f(0) = f(\infty)$.

49. Теорема. *Если функция $f(t)$ является оригиналом вместе со своей производной, а $F(p; \zeta)$ – изображение функции $f(t)$ над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с*

$2 \le r \in \mathbf{N}$ *при* $u = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, *то*

$\lim_{p\to\infty} p_0F(p; \zeta) + p_1F(p; \zeta - i_1\pi/2) + ... + p_{2^r-1}F(p; \zeta - i_{2^r-1}\pi/2) = f(0)$, *где* $f(0) = \lim_{t\to+0} f(t)$, *а* p *стремится к бесконечности внутри угла* $|Arg(p)| < \pi/2 - \delta$ *для некоторого* $0 < \delta < \pi/2$. *Если также существует* $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, *то* $\lim_{p\to 0}\{p_0F(p; \zeta) + p_1F(p; \zeta - i_1\pi/2) + ... + p_{2^r-1}F(p; \zeta - i_{2^r-1}\pi/2)\} = f(\infty)$, *где* $p \to 0$ *внутри того же угла.*

Доказательство. В силу теоремы 31 выполняется равенство:

$\mathcal{F}(f'(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) = p_0F(p; \zeta) + p_1F(p; \zeta - i_1\pi/2) + ... + p_{2^r-1}F(p; \zeta - i_{2^r-1}\pi/2) - f(0)$, при $u = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$,
где $p = p_0 + p_1i_1 + ... + p_{2^r-1}i_{2^r-1}$, $p_0, ..., p_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ – генераторы алгебры $\mathcal{A}_r$. Из замечания 8 следует, что $\lim_{p\to\infty, |Arg(p)|<\pi/2-\delta} \mathcal{F}(f'Ch_{[0,\infty)}, u; p; \zeta) = 0$, что дает первое утверждение теоремы.

Если также существует $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, то f ограничена на $\mathbf{R}$ и $s_0 \le 0$, а $F(p; \zeta)$ определена для любого $Re(p) > 0$. Поэтому, существует предел

$\lim_{p\to 0, |Arg(p)|<\pi/2-\delta} \int_0^\infty f'(t)\exp(-p_t - \zeta_0 - M(p, t; \zeta)) = \int_0^\infty f'(t)dt = f(\infty) - f(0) = \lim_{p\to 0, |Arg(p)|<\pi/2-\delta}\{p_0F(p; \zeta) + p_1F(p; \zeta - i_1\pi/2) + ... + p_{2^r-1}F(p; \zeta - i_{2^r-1}\pi/2) - f(0)\}$, откуда следует второе утверждение теоремы.

50. Пример. Рассмотрим изображения дробных степеней. Гамма-функция Эйлера дается интегралом $\Gamma(a + 1) := \int_0^\infty t^a e^{-t}dt$ для любого $Re(a) > -1$. В полярной форме число $p \in \mathcal{A}_r$ имеет вид: $p = \rho\exp(S\alpha)$, где $\rho = |p|$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, $Arg(p) = S\alpha$ (смотри следствие 3.6 [14]). При $Re(p) > 0$ возьмем $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Введем новую переменную $q := tp^{-1}$, тогда $\Gamma(a + 1) = p^{a+1}\int_L q^a\exp(-pq)dq$ (смотри определение 4.1 и предложение 4.2 [14]), где интеграл берется вдоль луча L, характеризуемого условием $Arg(q) = -\alpha S$. Для точек дуги $\gamma_R := \{q \in \mathcal{A}_r : |q| = R, -\alpha < (Arg(q))S^* < 0\}$ положим $q = R\exp(S\phi)$. Тогда $|\int_{\gamma_R} q^a\exp(-pq)dq| \le R^a\int_{-a}^0 \exp(-\rho R\cos(\phi + \alpha))Rd\phi$. Поскольку $0 < \alpha + \phi < \alpha$, то $\cos(\alpha + \phi) \ge \delta_0 > 0$, где $\delta_0 = const > 0$. Поэтому, существует предел

$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} q^a\exp(-pq)dq = 0$, так как $0 < \alpha + \phi < \alpha$ и $\cos(\alpha + \phi) > c_0$, где $c_0 = conts > 0$. Для любого $S \in \mathcal{A}_r$ с $|S| = 1$, $Re(S) = 0$ между лучом L и действительной осью $i_0\mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_r$ нет особых точек подынтегральной функции. Таким образом, можно заменить $\int_L q^a\exp(-pq)dq$ на $\int_0^\infty q^a\exp(-pq)dq$, следовательно, $p^{-a-1}\Gamma(a + 1) = \int_0^\infty t^a\exp(-pt)dt$ над $\mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$ в силу альтернативности алгебры октонионов и ассоциативности тела кватернионов; либо $\Gamma(a+1) = p^{a+1}\int_0^\infty t^a\exp(-pt)dt$ в случае алгебры $\mathcal{A}_r$ с $4 \le r \in \mathbf{N}$, где переменная интегрирования снова обозначена через t. Итак,

(i) $\mathcal{F}(t^aCh_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = p^{-a-1}\Gamma(a + 1)$ над $\mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$; либо

(i') $p^{a+1}\mathcal{F}(t^aCh_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = \Gamma(a + 1)$ над $\mathcal{A}_r$ с $4 \le r \in \mathbf{N}$. При $Re(a) \ge 0$ функция $f(t)$ является оригиналом, а при $-1 < Re(a) < 0$ функция $f(t) = t^a$ неограниченно возрастает при t стремящемся к нулю не удовлетворяет условиям, наложенным на оригинал. Но и для последнего интервала значений параметра a интеграл сходится и формула (i) или (i') соответственно выполняется. В этой ситуации можно сказать, что t^a является особым оригиналом, а $p^{-a-1}\Gamma(a + 1)$ особым изображением над $\mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$; либо $p^{a+1}t^a$ – особый оригинал для особого изображения $\Gamma(a + 1)$ над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $4 \le r \in \mathbf{N}$.

В частном случае $a = -1/2$ получим: $p^{-1/2} = \mathcal{F}((\pi t)^{-1/2}, pt; p; 0)$ над $\mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$; либо $1 = p^{1/2}\mathcal{F}((\pi t)^{-1/2}, pt; p; 0)$ над $\mathcal{A}_r$ с $4 \le r \in \mathbf{N}$.

Случай $u = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ с $\Gamma_M(a+1; \zeta) := \int_0^\infty t^a\exp(-M((1, 0, ..., 0), t; \zeta) - t)dt$ для любого $Re(a) > -1$ сводится к разобранному выше, так как $M(g, t; \zeta) = M(0, 0; \zeta)$

при $g = Re(g)$. Но в общем случае, $\int_0^\infty t^a \exp(-p_0 t - M(p,t;0))dt$ можно выразить через интегралы (смотри формулу 4 на стр. 446 в [18]):

(1) $T_a(v) := \int_0^\infty t^a \exp(-vx)\cos(bx)dx = \Gamma(a+1)(b^2+v^2)^{-(a+1)/2}\cos(c)$,

(2) $S_a(v) := \int_0^\infty t^a \exp(-vx)\sin(bx)dx = \Gamma(a+1)(b^2+v^2)^{-(a+1)/2}\sin(c)$,

где $c = (a+1)\operatorname{arctg}(b/p)$, $Re(a) > -1$, $Re(v) > |Im(b)|$, подобно тому, как это было сделано в примере 33. То есть, достаточно воспользоваться формулами примера 33 с заменой интегралов (6, 7) на T_a и S_a соответственно.

Пусть $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, ψ - путь в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ вложенной в $\mathcal{A}_r$, так что ψ идет вдоль двубережного разреза плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ от $-\infty$ до $-\delta$ со стороны $z = a + Sb$ с $b < 0$, затем обходит окружность радиуса $\delta > 0$ с центром в нуле по часовой стрелке и идет по прямой от $-\delta$ до $-\infty$ со стороны $z = a + Sb$ с положительными $b > 0$, где $2 \le r \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Тогда обозначим

(3) $Re(N_1 S^*) \int_\psi \zeta^a \exp(u(\zeta, 1; 0))d\zeta =: (2\pi S)(\Gamma_u(-a))^{-1}$,

где $u(p,t;\zeta) = p_0 t + \zeta_0 + M(p,t;\zeta)$, $a, p, \zeta \in \mathcal{A}_r$, $Re(N_1 S^*) \neq 0$. В частном случае комплексных чисел и $u = pt$ формула (3) известна как ханкелевское интегральное представление гамма-функции. При $u = pt$ и $p \in \mathcal{A}_r$ функция $\Gamma_u(-a)$ совпадает с обычной гамма-функцией $\Gamma(-a)$ переменной $a \in \mathcal{A}_r$ (смотри определение 4.1 и предложения 4.2, 4.12 и следствие 4.13 в [14]).

51. Теорема. *Пусть голоморфная функция $F(p)$ удовлетворяет условиям 23(1 − 3) или 47(2′) вместо 23(2) при $p \to \infty$ в области $Re(p) < a$, $F(p) = \sum_{j=0}^\infty p^{j\beta+\alpha} c_j$ при $Re(p) < a$, $F(p)$ не имеет особых точек в $\mathcal{A}_r$ быть может, кроме нуля, являющегося точкой ветвления конечного порядка, и интеграл $\int_{(-\infty,-\delta]\cup S(\mathcal{A}_r,0,\delta)} |c_j||p^{j\beta+\alpha}|dt$ сходится для некоторого $\delta > 0$, где $2 \le r \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, а β – положительное рациональное число, $c_j \in \mathbf{R}$ для любого j при $4 \le r \in \mathbf{N}$, $c_j \in \mathbf{K}$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$. Тогда оригиналом является функция*

(*i*) $f(t) = Ch_{[0,\infty)}(t) t^{-\alpha-1} \sum_{j=0}^\infty (\Gamma_u(-\alpha - j\beta))^{-1} t^{-j\beta} c_j$,

удовлетворяющая свойствам 1(1,2).

Доказательство. Пусть функция $F(p)$ имеет разложение в обобщенный степенной ряд $F(p) = \sum_{j=0}^\infty p^{j\beta+\alpha} c_j$, где $0 < \beta \in \mathbf{Q}$. Рассмотрим петлю γ, состоящую из отрезка $\gamma_1 := \{a + \theta S, |\theta| \le b\}$, проходимого сверху вниз, где $b > 0$, $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $Re(S) = 0$, γ_2 – часть окружности в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ от $-R$ до $-a + bS$ с центром в нуле, $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$, дуги γ_3 окружности от $a - bS$ до $-R$, двубережного разреза $\gamma_4 \cup \gamma_5$ вдоль оси $\mathbf{R}$ от $-R$ до $-\delta$, $\gamma_4 = [-\delta, -R] + \epsilon S$, $\gamma_5 = [-R, -\delta] + \epsilon S$, γ_6 – дуга окружности радиуса $\rho = (\delta^2 + \epsilon^2)^{1/2}$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ проходимая по часовой стрелке от $(-\delta - \epsilon S)$ до $-\delta + \epsilon S$, где $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$ – произвольно малые числа, $\gamma = \bigcup_{k=1}^6 \gamma_k$. Для z в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ полагаем $z = |z|\exp(S\phi)$, где $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. В силу теоремы 2.15 [14, 15] $\int_{a-bS}^{a+bS} F(p)\exp(u(p,t;0)dp = \int_{\bigcup_{k=2}^6 \gamma_k} F(p)\exp(u(p,t;0))dp$. Из леммы 23 и замечания 47 следует, что $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2 \cup \gamma_3} F(p)\exp(u(p,t;0))dp = 0$ для любого $t > 0$. Контур интегрирования ψ в §50 симметричен относительно оси ox, так что при отражении в плоскости, содержащей ось ox и перпендикулярной S относительно скалярного произведения $(z, \eta) := Re(z\eta^*)$, направление его обхода меняется на противоположное, поэтому $\Gamma_u(w) \in \mathbf{R}$ для любых $w \in \mathbf{R}$ подобно обычной гамма-функции.

Из теоремы 22 следует, что функция-оригинал дается формулой:

$Sf(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6} F(p)\exp(u(p,t;0))dp$.

Тогда $Sf(t) = \sum_{j=0}^\infty (2\pi)^{-1} Re(N_1 S^*)[\int_{\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6} p^{\alpha+j\beta}\exp(u(p,t;0))dp]c_j$.

В случае, когда все $c_j \in \mathbf{R}$, тогда $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, но $Sa = b$ для $a \in \mathbf{R}$ и $b \in \mathcal{A}_r$ означает, что $a = S^* b$, так как $\mathbf{R}$ – центр алгебры $\mathcal{A}_r$. Сделаем замену переменной $\zeta = pt$, тогда

$(2\pi)^{-1}\int_{\gamma_4\cup\gamma_5\cup\gamma_6} p^{\alpha+j\beta}\exp(u(p,t;0))dp = (2\pi)^{-1}t^{-\alpha-j\beta-1}\int_{(\gamma_4\cup\gamma_5\cup\gamma_6)t}\zeta^{\alpha+j\beta}\exp(u(\zeta,1;0))d\zeta = t^{-\alpha-j\beta-1}(\Gamma_u(-\alpha-j\beta))^{-1}$. Следовательно, у функции $F(p)$ существует оригинал, даваемый формулой (i), так как $t\in\mathbf{R}$ коммутирует с каждым $c_j\in\mathcal{A}_r$. Если $\alpha+j\beta$ - целое число, то интеграл от $p^{\alpha+j\beta}\exp(u(p,t;0))$ равен нулю, то есть, из разложения (i) надо вычеркнуть все члены с целыми $\alpha+j\beta$.

Следует отметить, что этот оригинал в общем случае может не удовлетворять свойству 1(3), то есть $f(t)$ - особый оригинал.

52. Пример. Рассмотрим $F(p) := p^{-3/2}\exp(p^{1/2}(S-1))$, где $S\in\mathbf{K}$, $\mathbf{K}=\mathbf{H}$ или $\mathbf{K}=\mathbf{O}$, $Re(S)=0$, $|S|=1$. Пусть $p=R\exp(S\phi)$, $S-1=2^{1/2}\exp(3S\pi/4)$, тогда $Re(p^{1/2}(S-1)=(2R)^{1/2}\cos(\phi/2+3\pi/4)<0$, так как $\pi/2<\phi<3\pi/2$ и $\pi<\phi/2+3\pi/4<3\pi/2$. Если $|p'|$ велико, где $p'=p-p_0$, $p_0:=Re(p)$, а $0<p_0<a$, то ϕ приблизительно равно $\pi/2$ или $3\pi/2$, поэтому, $p^{1/2}(S-1)$ приблизительно равно $-2^{1/2}R$ или $-S2^{1/2}R$. Если $p\in\mathbf{R}\oplus S\mathbf{R}$, то $F(p)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{j/2}(j!)^{-1}\exp(3\pi jS/4)p^{(j-3)/2}$. Итак, $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$ и $Re(p)<a$, то есть, $F(p)$ удовлетворяет условиям 23(1,2',3) и условиям теоремы 51, так как $a>0$ и $p\neq 0$ вдоль прямой $\{z=a+S\theta:\theta\in\mathbf{R}\}$. В силу теоремы 51: $f(t)=\sum_{j=0}^{\infty}2^j(-S)^j((2j)!\Gamma_u(3/2-j))^{-1}t^{-j-1/2}$.

53. Замечание. Как видно из предыдущего примера существуют оригиналы, не удовлетворяющие условию 1(3), но для которых существуют изображения. С другой стороны, не для всех изображений существуют оригиналы, удовлетворяющие условиям 1(1-3). Например, функции $1,p,p^2,...$ не имеют обычных оригиналов. Для того, чтобы расширить возможности преобразования Лапласа используют обобщенные функции, то есть, функционалы.

54. Определения. Пространство основных функций $\mathcal{D}$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $f:\mathbf{R}\to\mathcal{A}_r$ на $\mathbf{R}$ с компактными носителями, то есть, f обращается в нуль вне отрезка, зависящего от функции. Последовательность функций $f_n\in\mathcal{D}$ сходится к нулю, если все f_n обращаются в нуль вне некоторого отрезка $[a,b]$, а на нем последовательность $f_n^{(k)}$ равномерно сходится к нулю для любого $k=0,1,2,...$, где $f^{(k)}(t):=d^kf(t)/dt^k$, $f^{(0)}=f$. Такая сходимость определяет замкнутые подмножества в $\mathcal{D}$, а их дополнения по определению открыты, что задает топологию на $\mathcal{D}$.

Обобщенной функцией класса $\mathcal{D}'$ называется непрерывный $\mathbf{R}$-линейный $\mathcal{A}_r$-аддитивный функционал $g:\mathcal{D}\to\mathcal{A}_r$. Множество всех таких функционалов обозначается $\mathcal{D}'$. То есть, g непрерывен, если для любой последовательности $f_n\in\mathcal{D}$, сходящейся к нулю, последовательность чисел $g(f_n)=:(g,f_n)\in\mathcal{A}_r$ сходится к нулю при $n\to\infty$. Обобщенная функция g обращается в нуль на открытом подмножестве V в $\mathbf{R}$, если $(g,f)=0$ для любой $f\in\mathcal{D}$ равной нулю вне V. Носителем обобщенной функции g называется совокупность, обозначаемая $supp(g)$, всех точек $t\in\mathbf{R}$ таких, что в любой окрестности каждой точки $t\in supp(g)$ функционал g отличен от нуля. Сложение обобщенных функций g,h дается формулой: $(g+h,f):=(g,f)+(h,f)$. Умножение $g\in\mathcal{D}'$ на бесконечно дифференцируемую функцию w задается формулой: $(gw,f)=(g,wf)$ для любой основной функции $f\in\mathcal{D}$ с действительным образом $f(\mathbf{R})\subset\mathbf{R}$. Производной g' обобщенной функции g называется обобщенная функция g', задаваемая формулой: $(g',f):=-(g,f')$.

Пространство основных функций $\mathcal{B}$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $f:\mathbf{R}\to\mathcal{A}_r$ таких, что существует $\lim_{t\to+\infty}t^mf^{(j)}(t)=0$ для любых $m,j=0,1,2,....$ Последовательность $f_n\in\mathcal{B}$ называется сходящейся к нулю, если последовательность $t^mf_n^{(j)}(t)$ стремится к нулю равномерно на отрезке $[a,\infty)$ для любых $m,j=0,1,2,...$ и каждого $-\infty<a<+\infty$. Семейство всех $\mathbf{R}$-линейных и

$\mathcal{A}_r$-аддитивных функционалов на $\mathcal{B}$ обозначается $\mathcal{B}'$.

Обобщенную функцию $f \in \mathcal{A}'$ с носителем содержащимся в $[0, \infty)$ назовем обобщенным оригиналом, если существует действительное число s_0 такое, что для любого $s > s_0$ обобщенная функция $f \exp(-st) \in \mathcal{B}'$. Изображением такого оригинала назовем функцию

(1) $\mathcal{F}(f, u; p; \zeta) := (f, \exp(-u(p, t; \zeta)))$ переменной $p \in \mathcal{A}_r$, определенной в полупространстве $Re(p) > s_0$, определяемую следующим правилом. Для данного $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) = s > s_0$ выберем $s_1 \in \mathbf{R}$ так, чтобы $s_0 < s_1 < s$, а тогда

(2) $(f, \exp(-u(p, t; \zeta)) := (f \exp(-s_1 t), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]))$,
так как $\exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]) \in \mathcal{B}$, а по условию $f \exp(-s_1 t) \in \mathcal{B}'$.

55. Замечание и примеры. Очевидно, что $\mathcal{F}(f, u; p; \zeta)$ не зависит от выбора s_1, так как $(f \exp(-s_1 t), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t])) = (f \exp(-s_1 t - bt), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t - bt]))$ для любого $b \in \mathbf{R}$ такого, что $s_0 < s_1 + b < s$, так как $\exp(-bt) \in \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}$ – это центр алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, где $2 \le r \in \mathbf{N}$.

Пусть δ – это дельта функция Дирака, определяемая уравнением $(\delta(t), \phi(t)) := \phi(0)$ для любой $\phi \in \mathcal{B}$. Тогда

(*i*) $\mathcal{F}(\delta^{(j)}(t - \tau), u; p; \zeta) = (\delta^{(j)} \exp(-s_1 t), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]))$
$= (-1)^j (d^j \exp(-[u(p, t; \zeta)]/dt^j)|_{t=\tau}$,
так как можно взять $-\infty < s_0 < 0$ и $s_1 = 0$, где $\tau \in \mathbf{R}$ – параметр. В частности, при $j = 0$ имеем $\mathcal{F}(\delta(t - \tau), u; p; \zeta) = \exp(-u(p, \tau; \zeta))$, а при $u = pt$ имеем $\mathcal{F}(\delta^{(j)}(t - \tau), pt; p; \zeta) = p^n \exp(-p\tau)$. В общем случае:

$$\mathcal{F}(\delta^{(j)}(t), u; p; \zeta) =$$
$$\sum_{n_0, n_1, ..., n_{2^r-1} = j} p_0^{n_0} p_1^{n_1} ... p_{2^r-1}^{n_{2^r-1}} \exp(-\zeta_0 - M(p, 0; \zeta - (i_1 n_1 + ... + i_{2^r-1} n_{2^r-1})\pi/2)),$$
причем $M(p, 0; \zeta) = M(0, 0; \zeta)$, где $n_0, n_1, ..., n_{2^r-1}$ - это целые неотрицательные числа.

Преобразование $\mathcal{F}$ обобщенной функции является голоморфной функцией по $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) > s_0$ и по $\zeta \in \mathcal{A}_r$, так как правая часть уравнения 54(2) голоморфна по p с $Re(p) > s_0$ и по ζ в силу теоремы 7. Из уравнения 54(2) следует, что теоремы 27, 28 и 29 выполняются также для обобщенных функций.

56. Приложения некоммутативного преобразования Лапласа к (супер)дифференциальным уравнениям.

Пусть дано дифференциальное уравнение

(1) $L[x] = f(t)$, где $L[x] := (d^n x(t)/dt^n) a_0 + ... + (dx/dt) a_{n-1} + x a_n$, $a_0 \ne 0$
и заданы начальные условия:

(2) $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$,..., $x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$.
Предположим, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$, и его производные $x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)$ являются оригиналами. Тогда $X(p)(p^n a_0 + p^{n-1} a_1 + ... + a_n) = F(p) + x_0(p^{n-1} a_0 + ... + p a_{n-2} + a_{n-1}) + x_1(p^{n-2} a_0 + ... + p a_{n-3} + a_{n-2}) + ... + x_{n-1} a_0$, где $X(p) := \mathcal{F}(x, pt; p; 0)$, $F(p) = \mathcal{F}(f, pt; p; 0)$, $a_j \in \mathbf{H}$ в случае $\mathbf{H}$, $a_j \in \mathbf{R}$ в случае $\mathcal{A}_r$ с $3 \le r \in \mathbf{N}$. Поскольку $\mathcal{F}(f'(t), u; p; \zeta) = F(p; \zeta)\Delta_p - f(0)$ при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, где $F(p; \zeta)\Delta_p := p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1\pi/2) + ... + p_{2^r-1} F(p; \zeta - i_{2^r-1}\pi/2)$, то $f^{(n)}(t) = F(p; \zeta)\Delta_p^n - f(0)p^{n-1} - ... - f^{(n-2)}(0)p - f^{(n-1)}(0)$, так как $\exp(i_k\pi/2) = i_k$ для любого $k = 1, 2, ..., 2^r - 1$, а $c\Delta_p = cp$ для $c = const \in \mathcal{A}_r$ в силу формулы 44(i), так как можно полагать $\zeta = 0$ для $c = const$. Итак,

(3) $X(p)A(p) = F(p) + B(p)$, где

(4) $A(p) = (p^n a_0 + p^{n-1} a_1 + ... + a_n)$ и

(5) $B(p) = x_0(p^{n-1} a_0 + ... + p a_{n-2} + a_{n-1}) + x_1(p^{n-2} a_0 + ... + p a_{n-3} + a_{n-2}) + ... + x_{n-1} a_0$,
в случае $u = pt$, $\zeta = 0$. При $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ имеется уравнение

(6) $X(p)A(\Delta_p) = F(p;\zeta) + B(p)$,
где A уже многочлен от оператора Δ_p,

(7) $B(p) = [(x_0\Delta_p^{n-1})a_0 + ... + (x_0\Delta_p)a_{n-2} + a_{n-1}] + [(x_1\Delta_p^{n-2})a_0 + ... + (x_1\Delta_p)a_{n-3} + a_{n-2}] + ... + x_{n-1}a_0$. В частности, для тела кватернионов $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или алгебры октонионов $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, в силу альтернативности алгебры $\mathbf{K}$ получается операторное решение

(8) $X(p) = (F(p;\zeta) + B(p;\zeta))A^{-1}(p)$,
где $A = A(p)$ или $A = A(\Delta_p)$ соответственно, полагаем $\zeta = 0$ в случае $u = pt$, $F(p) = F(p;\zeta)$, $X(p) = X(p;\zeta)$, $B(p) = B(p;\zeta)$, $A(\Delta_p) = A(\Delta_p;\zeta)$, ζ – параметр начальных фаз. В данном случае удобнее писать аргумент слева от оператора. Если уравнение (1) при начальном условии (2) имеет решение, $x(t)$, $x^{(1)}(t)$,...,$x^{(n)}(t)$ удовлетворяет условиям наложенным на оригиналы, то $x(t)$ удовлетворяет уравнению (7). Можно записать оператор Δ_p в виде:

$F(p;\zeta)\Delta_p = Re < p, F(p;\zeta)L >$,
где $F(p;\zeta)L := i_0F(p;\zeta) + i_1F(p;\zeta - i_1\pi/2) + ... + i_{2^r-1}F(p;\zeta - i_{2^r-1}\pi/2)$, а также

$(f)\Delta_p = \mathcal{F}(f, u; p;\zeta) + \delta df(t)/dt$,
где $u = p_0t + \zeta_0 + M(p, t;\zeta)$, δ – обобщенная функция из примера 55, $< a, b >:= \sum_{l=1}^n {}^l\tilde{a}\ {}^lb$, где $a = ({}^1a, ..., {}^na)$, $a, b \in \mathcal{A}_r^n$, $n \in \mathbf{N}$.

57. Примеры. 1. Рассмотрим уравнение $x^{(2)} + xa^2 = b\sin(at)$, где $b \in \mathbf{H}$ в случае алгебры $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, $b \in \mathbf{R}$ в случае $\mathcal{A}_r$ с $3 \le r \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$. Тогда операторное уравнение при $u = pt$ имеет вид: $X(p)(a^2+p^2) == b(a^2+p^2)^{-1}a + x_0p + x_1$. Для алгебр $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$ решение имеет вид: $X(p) = ab(p^2 + a^2)^{-2} + (x_0p)(p^2 + a^2)^{-1} + x_1(p^2 + a^2)^{-1}$. Пример 26.2, теоремы 27 и об интегрировании оригинала 34 дают: $ab(p^2 + a^2)^{-1} = \mathcal{F}([2^{-1}b\int_0^b t\sin(at)dt]; pt; p;\zeta) = \mathcal{F}(b(2a^2)^{-1}(\sin(at) - at\cos(at); pt; p;\zeta)$. Если $x_0 \in \mathbf{R}$, то решение можно записать в виде:

$x(t) = (x_1 + b(2a)^{-1})a^{-1}\sin(at) + (x_0 - bt(2a)^{-1})\cos(at)$.

2. Уравнение $x^{(3)} + x = 1$ с нулевыми начальными условиями имеет операторное решение $X(p) = p^{-1}(p^3+1)^{-1}$. По теореме разложения 46 получим решение-оригинал $x(t) = 1 - e^{-t}/3 - (2/3)Re\exp[(1/2 + 3^{1/2}S/2)t] = 1 - e^{-t}/3 - (2/3)\exp(t/2)\cos(t3^{1/2}/2)$, где $S = p'/|p'|$ при $p' := p - Re(p) \ne 0$, а при $p' = 0$, S таково, что $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$.

References

[1] J. C. Baez. The octonions. // Bull. Amer. Mathem. Soc. **39: 2**, 145-205 (2002).

[2] F. A. Berezin. Introduction to superanalysis. D. Reidel Publish. Comp., Kluwer group, Dordrecht, 1987.

[3] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. Наука, Москва, 1971.

[4] G. Emch. Mèchanique quantique quaternionienne et Relativitè restreinte. // Helv. Phys. Acta **36**, 739–788 (1963).

[5] F. Gürsey, C.-H. Tze. On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. World Scientific Publ. Co., Singapore, 1996.

[6] У. Р. Гамильтон. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. Наука, Москва, 1994.

[7] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. Hypercomplex numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[8] A. Khrennikov. Superanalysis. Series "Mathem. and its Applic."; **470**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[9] А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. Наука, Москва, 1973.

[10] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Наука, Москва, 1987.

[11] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. Spin geometry. Princ. Univ. Press, Princeton, 1989.

[12] С. В. Людковский. Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. **1: 3**, 93-140 (2005).

[13] С. В. Людковский. Функции нескольких переменных чисел Кэли-Диксона и многообразия над ними. // Соврем. Матем. и её Прил. **28** (2005).

[14] С. В. Людковский. Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона и интегрирование вдоль путей. // Соврем. Матем. и её Прил. **28** (2005).

[15] S. V. Lüdkovsky, F. van Oystaeyen. Differentiable functions of quaternion variables.// Bull. Sci. Math. **127**, 755-796 (2003).

[16] F. van Oystaeyen. Algebraic geometry for associative algebras. Series Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem. **232**. Marcel Dekker, New York, 2000.

[17] B. van der Pol, H. Bremmer. Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.

[18] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Наука, Москва, 1981.

[19] H. Rothe. Systeme Geometrischer Analyse. In: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie, 1277–1423. Teubner, Leipzig, 1914-1931.

[20] М. А. Соловьёв. Структура пространства неабелевых калибровочных полей // Труды Физич. Инст. им. П. Н. Лебедева. **210**, 112-155 (1993).

[21] E. H. Spanier. Algebraic topology. New York, Academic Press, 1966.

[22] А. А. Элиович. О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением. // Гиперкомпл. числа в геом. и физ. **2: 2**, 24–50 (2004).