ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА ГУРВИЦА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КВАЗИУНИТАРНЫХ МАТРИЦ, СУММИРУЕМОСТЬ И ДРУГИЕ СВОЙСТВА КВАЗИУНИТАРНЫХ СТРУКТУР

Соловей Л. Г.

Проблема А. Гурвица поиска соотношений вида "произведение суммы квадратов на сумму квадратов есть сумма квадратов" обобщена на случай произведения квазиунитарных матриц n-ого порядка, (т. е. матриц, удовлетворяющих соотношению $AA^+ = a$, где a – число). (При A действительном матрицы A назовём квазиортогональными). Тем самым эта проблема имеет решение для любого n. (При этом, разумеется, слагаемые в правой части этих соотношений уже не обязательно билинейные функции именно от аргументов в левой части).

Исследуются и другие свойства квазиунитарных структур, прежде всего условие их квазиунитарной суммируемости, т. е. условие того, чтобы сумма квазиунитарных (квазиортогональных) матриц снова была квазиунитарной (квазиортогональной). В частности, вводится понятие квазиантиэрмитовости матриц.

§1. Обобщенная проблема Гурвица

A. Гурвицем была доказана следующая теорема:

если имеется равенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + ... + \Phi_n^2, \tag{1'}$$

где Φ_k – билинейные функции от действительных аргументов – a_i, b_k $(i, k = 1, 2, ...n)$, то n может принимать только значения $1, 2, 4, 8$ [1].

Однако это соотношение может быть обобщено на любое n, если под Φ_i понимать билинейные функции других аргументов (каких именно, будет указано в настоящем параграфе).

Рассмотрим подмножество матриц n-ого порядка, обладающих следующими свойствами:

если A – такая матрица, то

$$AA^+ = a, \tag{1}$$

где a – некоторое комплексное число (A^+ – матрица, эрмитово сопряженная матрице A).

Число a, однако, оказывается действительным и неотрицательным.

В самом деле,

$$a = (AA^+)_{kk} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}(a^+)_{lk} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}a_{kl}^* = \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2 \geqslant 0, \tag{2}$$

и равно нулю только при $A = 0$.

Такие матрицы назовём *квазиунитарными* при комплексных a_{kl} и *квазиортогональными*, если a_{kl} вещественны [2]. Полагая

$$a = |A|^2, \tag{3'}$$

приходим к определению нормы или модуля $|A|$ квазиунитарной или квазиортогональной матрицы. Таким образом

$$AA^{+} = |A|^2. \tag{3}$$

Легко видеть, что

$$A \cdot A^{+}/|A|^2 = 1. \tag{4}$$

Следовательно,

$$A^{+}/|A|^2 = a^{-1} \tag{5}$$

– матрица, обратная матрице A. Но поскольку,

$$AA^{-1} = A^{-1}A, \tag{6}$$

то

$$A^{-1}A = (A^{+}/|A|^2)A = 1,$$

или

$$AA^{+} = A^{+}A = |A|^2. \tag{7}$$

Для произведения AB квазиунитарных матриц A и B имеем:

$$(AB)(AB)^{+} = (AB)(B^{+}A^{+}) = |A|^2|B|^2, \tag{8}$$

$$(AB)(AB)^{+} = |AB|^2, \tag*{(9))}$$

откуда

$$|AB| = |A||B|, \qquad (10') \qquad |AB|^2 = |A|^2|B|^2. \tag{10}$$

Следовательно, множество квазиунитарных матриц представляет собой полугруппу, а, исключая нулевую матрицу, группу вследствие наличия у каждого элемента (матрицы) A обратного.

Обозначим группу квазиунитарных матриц n-го порядка с положительным детерминантом через $QSU(n)$, а квазиортогональных матриц n-го порядка с положительным детерминантом через $QO^{+}(n)$ (по аналогии с обозначениями $SU(n)$ и $O^{+}(n)$ для групп унитарных и ортогональных матриц n-го порядка).

Далее, имеем, выражая обе части равенства (10) через матричные элементы a_{ik}, b_{ik} матриц A и B:

$$|A|^2 = \sum_{r=1}^{n} |a_{kr}|^2, \tag{11}$$

$$|B|^2 = \sum_{s=1}^{n} |b_{ms}|^2, \tag{12}$$

$$D = AB, \tag*{(13}$$

$$|AB|^2 = \sum_{p=1}^{n} |d_{tp}|^2 = \sum_{p=1}^{n} |a_{tl}b_{lp}|^2, \tag{14}$$

(l – эйнштейновский индекс суммирования).

Теперь соотношение (10) принимает форму

$$(\sum_{r=1}^{n} |a_{kr}|^2)(\sum_{s=1}^{n} |b_{ms}|^2) = (\sum_{p=1}^{n} |d_{tp}|^2), \tag{15}$$

или

$$(\sum_{r=1}^{n}|a_{kr}|^2)(\sum_{s=1}^{n}|b_{ms}|^2)=(\sum_{p=1}^{n}|a_{tl}b_{lp}|^2). \tag{16}$$

Мы получили обобщенную проблему Гурвица [1]:

"сумма квадратов, умноженная на сумму квадратов, снова равна сумме квадратов", причём для любого n. При этом из соотношения (16) видно, что каждое слагаемое $|a_{tl}b_{lp}|$ в его правой части представляет собой билинейную функцию матричных элементов a_{tl} t-ой строки и b_{lp} p-го столбца матриц A и B.

В частности, при $k=m\neq t$

$$(\sum_{r=1}^{n}|a_{kr}|^2)(\sum_{s=1}^{n}|b_{ks}|^2)=(\sum_{p=1}^{n}|a_{tl}b_{lp}|^2). \tag{16a}$$

Из (16) и (16а) следует, вообще говоря, многозначность этих соотношений. При $k=m=t$ получим:

$$(\sum_{r=1}^{n}|a_{kr}|^2)(\sum_{s=1}^{n}|b_{ks}|^2)=(\sum_{p=1}^{n}|a_{kl}b_{lp}|^2). \tag{16b}$$

Для квазиортогональных матриц имеем соответственно:

$$(\sum_{r=1}^{n}a_{kr}^2)(\sum_{s=1}^{n}b_{ms}^2)=(\sum_{p=1}^{n}d_{tp}^2), \tag{15$'$}$$

$$(\sum_{r=1}^{n}a_{kr}^2)(\sum_{s=1}^{n}b_{ms}^2)=(\sum_{p=1}^{n}a_{tl}b_{lp}^2), \tag{16$'$}$$

$$(\sum_{r=1}^{n}a_{kr}^2)(\sum_{s=1}^{n}b_{ks}^2)=(\sum_{p=1}^{n}a_{tl}b_{lp}^2), \tag{16a'}$$

$$(\sum_{r=1}^{n}a_{kr}^2)(\sum_{s=1}^{n}b_{ks}^2)=(\sum_{p=1}^{n}a_{kl}b_{lp}^2). \tag{16b'}$$

Формулы (15) и ($15'$) верны и для случая произведения матриц A и B с возможной перестановкой местами сомножителей матричных элементов a_{tl} и b_{lp} и тем самым применимы к случаю октав [2]. Полученные соотношения обобщают проблему Гурвица и на случай комплексных и (при перестановке сомножителей) кватернионных матричных элементов. При этом обязательно выполнение соотношений ($10'$), (10). Для комплексных чисел и кватернионов, записанных в матричном виде, получаются, естественно, стандартные результаты.

Пусть теперь A и B – октавы, записанные в матричном виде:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^+ & x_1^+ \end{pmatrix}, \quad (17) \qquad A=\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2^+ & x_2^+ \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где x_i, y_i $(i=1,2)$ – кватернионы, также записанные в матричном виде. Произведение AB квазиунитарно, и совокупность таких матриц альтернативна, только если в произведении AB переставлены местами некоторые сомножители. С учетом этого обстоятельства имеем [2]:

$$AB=\begin{pmatrix} x_1x_2-y_2^+y_1 & y_2x_1+y_1x_2^+ \\ -x_2y_1^+-x_1^+y_2^+ & -y_1^+y_2+x_2^+x_1^+ \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Для вычисления матричных элементов d_{1p} $(p = 1, 2, ...n)$ в формуле $(16b')$ (при $k = 1$) достаточно вычислить кватернионы $x_1x_2 - y_2^+ y_1$ и $y_2x_1 + y_1x_2^+$ и взять их первые строки.

Выпишем эти кватернионы с действительными матричными элементами.

$$x_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} & \tilde{D} \\ -\tilde{B} & \tilde{A} & -\tilde{D} & \tilde{C} \\ -\tilde{C} & \tilde{D} & \tilde{A} & -\tilde{B} \\ -\tilde{D} & -\tilde{C} & \tilde{B} & \tilde{A} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ -b' & a' & -d' & c' \\ -c' & d' & a' & -b' \\ -d' & -c' & b' & a' \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} \tilde{A}' & \tilde{B}' & \tilde{C}' & \tilde{D}' \\ -\tilde{B}' & \tilde{A}' & -\tilde{D}' & \tilde{C}' \\ -\tilde{C}' & \tilde{D}' & \tilde{A}' & -\tilde{B}' \\ -\tilde{D}' & -\tilde{C}' & \tilde{B}' & \tilde{A}' \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Для произведений $x_1x_2 - y_2^+ y_1$ и $y_2x_1 + y_1x_2^+$ получим с учетом формул (20)–(23):

$$x_1x_2 - y_2^+ y_1 = \begin{pmatrix} d_{11}\, d_{12}\, d_{13}\, d_{14} \\ ------- \\ ------- \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$y_2x_1 + y_1x_2^+ = \begin{pmatrix} d_{15}\, d_{16}\, d_{17}\, d_{18} \\ ------- \\ ------- \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где искомые элементы $d_{1p}(p = 1, 2, ..., 8)$, входящие в формулу (15'), равны

$$d_{11} = aa' - bb' - cc' - dd' - \tilde{A}'\tilde{A} - \tilde{B}'\tilde{B} - \tilde{C}'\tilde{C} - \tilde{D}'\tilde{D}, \tag{26}$$

$$d_{12} = ab' + ba' + cd' - dc' - \tilde{A}'\tilde{B} + \tilde{B}'\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{D} - \tilde{D}'\tilde{C}, \tag{27}$$

$$d_{13} = ac' - bd' + ca' + db' - \tilde{A}'\tilde{C} - \tilde{B}'\tilde{D} + \tilde{C}'\tilde{A} + \tilde{D}'\tilde{B}, \tag{28}$$

$$d_{14} = ad' + bc' - cb' + da' - \tilde{A}'\tilde{D} + \tilde{B}'\tilde{C} - \tilde{C}'\tilde{B} + \tilde{D}'\tilde{A}, \tag{29}$$

$$d_{15} = \tilde{A}'a - \tilde{B}'b - \tilde{C}'c - \tilde{D}'d + \tilde{A}a' + \tilde{B}b' + \tilde{C}c' + \tilde{D}d', \tag{30}$$

$$d_{16} = \tilde{A}'b + \tilde{B}'a + \tilde{C}'d - \tilde{D}'c - \tilde{A}b' + \tilde{B}a' - \tilde{C}d' + \tilde{D}c', \tag{31}$$

$$d_{17} = \tilde{A}'c - \tilde{B}'d + \tilde{C}'a + \tilde{D}'b - \tilde{A}c' + \tilde{B}d' + \tilde{C}a' - \tilde{D}b', \tag{32}$$

$$d_{18} = \tilde{A}'d + \tilde{B}'c - \tilde{C}'b + \tilde{D}'a - \tilde{A}d' - \tilde{B}c' + \tilde{C}b' + \tilde{D}a', \tag{33}$$

т. е. стандартные результаты [1].

Рассмотрим теперь квазиортогональные матрицы 3-ого порядка (матричные элементы действительны). Вычисления, которые опущены, приводят к следующим результатам ($i = 1, 2$):

$$A = A_1, \quad B = A_2, \tag{34}$$

$$A_i =$$

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \\ -[z_i \cos\psi_i \sin\varphi_i (\pm)_1 i\rho_i \sin\psi_i |\cos\varphi_i|] & -z_i \sin\psi_i \sin\varphi_i (\pm)_1 i\rho_i \cos\psi_i |\cos\varphi_i| & r_i \sin\varphi_i \\ (\pm)_2 i[z_i \cos\psi_i |\cos\varphi_i| - (\pm)_1 i\rho_i \sin\psi_i \sin\varphi_i] & (\pm)_{2i}[z_i \sin\psi_i |\cos\varphi_i| (\pm)_{1i}\rho_i \cos\psi_i \sin\varphi_i] & -(\pm)_{2i} r_i |\cos\varphi_i| \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \tag{36}$$

$$\rho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \tag{37}$$

$$\cos\psi_i = x_i / r_i, \tag{38}$$

$$\sin\psi_i = y_i / r_i. \tag{39}$$

Полагая в формуле ($16b'$) $k = 1$, получим (с учетом формул (35)–(39)) "соотношение квадратов" для $n = 3$:

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) =$$

$$= [x_1 x_2 - y_1 (z_2 \cos\psi_2 \sin\varphi_2 (\pm)_1 \rho_2 \sin\varphi_2 |\cos\varphi_2|)(\pm)_2 z_1 (z_2 \cos\psi_2 |\cos\varphi_2| - (\pm)_1 \rho_2 \sin\psi_2 \sin\varphi_2)]^2 +$$
$$+ [x_1 y_2 + y_1 (-z_2 \sin\psi_2 \sin\varphi_2 (\pm)_1 \rho_2 \cos\psi_2 |\cos\varphi_2|)(\pm)_2 z_1 (z_2 \sin\psi_2 |\cos\varphi_2| + (\pm)_1 \rho_2 \cos\psi_2 \sin\varphi_2)]^2 +$$
$$+ [x_1 z_2 + y_1 r_2 \sin\varphi_2 - (\pm)_2 z_1 r_2 |\cos\varphi_2|]^2. \tag{40}$$

В правой части формулы (40) Φ_i (см. формулу(1)) являются однородными функциями первого порядка от аргументов (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

Для дальнейшего изучения свойств квазиунитарных структур (группоидов, колец и т. д.) мы не будем считать входящие в них элементы обязательно матрицами.

§2. Квазиунитарный группоид

Пусть имеется кольцо M с единицей, включающее все действительные числа, причём умножение действительных чисел на любой элемент кольца коммутативно и ассоциативно, т. е. M – алгебра над полем действительных чисел. Пусть также имеется отображение $f : M \to M^+$ кольца M на себя – автоморфизм, при котором

$$A \to A^{(+)}, B \to B^{(+)}, A \cdot B \to A^{(+)} \circ B^{(+)} = B^{(+)} \cdot A^{(+)}, \tag{41}$$

$$(A^{(+)})^{(+)} = A, \qquad (41'),$$

$$c = c^{(+)}, \qquad \text{если } c \text{ – действительное число} \qquad (41''),$$

но $c \neq c^+$ для комплексных c.

$$(A + B)^{(+)} = A^{(+)} + B^{(+)}. \tag{41'''}$$

В таком общем смысле назовём элемент $A^{(+)}$ *сопряженным* элементу A. Кроме того, пусть отображение $^{(+)}$ предполагает существование элементов A, для которых

$$A^{(+)} \cdot A = A \cdot A^{(+)} = a \geqslant 0, \tag{42}$$

при отсутствии отрицательных и комплексных произведений $A^{(+)} \cdot A$,

$$a = |A|^2; \tag{43}$$

$|A|$ назовём модулем A, причём

$$A^{(+)}A = AA^{(+)} = 0 \qquad \text{только при } A = 0. \tag{44}$$

Такие элементы A назовём *квазиунитарными по* f.

Элемент, сопряженный нулю, также равен нулю.

$$0^{(+)} = 0, \tag{45}$$

вследствие вещественности нуля.

В силу (41″), (42)–(45) нулевой элемент и все действительные числа являются квазиунитарными. Множество, все элементы которого квазиунитарны, назовём квазиунитарным. Пусть все квазиунитарные элементы кольца M составляют мультипликативный группоид. Очевидно, что все действительные числа в него входят, а единица кольца является единицей квазиунитарного группоида. Таким образом, предполагается, что если элементы A_i и A_k квазиунитарны, то произведение

$$(A_iA_k)(A_iA_k)^{(+)} = C_{A_iA_k} \geqslant 0, \tag{46}$$

т. е. квазиунитарно.

Пусть элемент A_i является определённой функцией φ (предполагается, конечно, также, что $C_{A_iA_k} = 0$ только при $A_iA_k = 0$) от некоторых переменных

$$(X_1^i, ..., X_l^i): \quad A_i = \varphi(X_1^i, X_2^i ..., X_l^i), \tag{46′}$$

(элемент A_i может быть и многокомпонентным), причём аргументами могут быть действительные числа, комплексные числа и даже кватернионы. Для выполнения условий (46) необходимо и достаточно, чтобы произведению $A_i \cdot A_k$ соответствовал такой новый набор независимых переменных $(X_1^{ik}, ..., X_l^{ik})$, чтобы выполнялось условие

$$A_iA_k = \varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, ..., X_l^{ik}) = \varphi(X_1^i, X_2^i, ..., X_l^i)\varphi(X_1^k, X_2^k, ..., X_l^k), \tag{46″}$$

(независимые переменные $(X_1^{ik}, ..., X_l^{ik})$ произведений $A_i \cdot A_k$ – некоторые определённые функции от переменных $X_1^i, X_2^i, ..., X_l^i; X_1^k, X_2^k, ..., X_l^k$:

$$X_r^{ik} = f_r(X_1^i, X_2^i, ..., X_l^i; X_1^k, X_2^k, ..., X_l^k).)$$

Если A_i – действительное число a_i, то вместо (46″) имеем:

$$a_iA_k = \varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, ..., X_l^{ik}) = a_i\varphi(X_1^k, X_2^k, ..., X_l^k). \tag{46‴}$$

Действительные числа, для которых $a^{(+)} = a$, как уже говорилось, коммутируют и ассоциативны со всеми элементами кольца M. Таким образом, для элементов A, B кольца M

$$(aA) \cdot B = A \cdot (aB) = a(AB). \tag{47}$$

Из (42), (43) и (47) имеем для элементов квазиунитарного группоида $A \neq 0$

$$A \cdot A^{(+)}/|A|^2 = 1, \tag{48}$$

откуда правый обратный элемент

$$A_{right}^{-1} = A^{(+)}/|A|^2, \tag{49}$$

Точно так же

$$(A^{(+)}A)/|A|^2 = (A^{(+)}/|A|^2) \cdot A = 1; \quad A_{left}^{-1} = A_{right}^{-1} = A^{(+)}/|A|^2. \tag{50}$$

Таким образом, каждый ненулевой элемент квазиунитарного группоида имеет обратный элемент

$$A^{-1} = A_{right}^{-1} = A_{left}^{-1} = A^{(+)}/|A|^2.$$

Элемент $A' = A/|A|$, поскольку

$$A'^{(+)}A' = A' \cdot A'^{(+)} = 1, \tag{51}$$

назовём унитарным – по аналогии с унитарной матрицей.

Рассмотрим важные частные случаи.

1. Выполняется

$$(AB) \cdot B^{(+)} = A \cdot (BB^{(+)}) = A \cdot |B|^2, \tag{52}$$

$$B^{(+)} \cdot (BA) = (B^{(+)}B)A = |B|^2 A. \tag{53}$$

Такие группоиды назовём альтернативными группоидами второго рода. Уравнения

$$BX = C, \tag{54}$$

$$YB = C', \tag{55}$$

где $C, C', B, X, Y, ...$ – элементы квазиунитарного альтернативного группоида второго рода, $B \neq 0$, имеют единственное решение. В самом деле, $B^{(+)} \cdot (BX) = B^{(+)}C$; в силу (53)

$$|B|^2 X = B^{(+)}C, X = B^{(+)}C/|B|^2. \tag{56}$$

Точно так же

$$(YB)B^{(+)} = C'B^{(+)}; \quad Y \cdot |B|^2 = C'B^{(+)}; \quad Y = C'B^{(+)}/|B|^2. \tag{57}$$

Таким образом, квазиунитарный альтернативный группоид второго рода без нуля является группоидом с однозначным делением и с единицей, т. е. лупой [4].

2. Рассматриваемый квазиунитарный группоид (или всё кольцо M) является ассоциативным:

$$(AB)C = A(BC). \tag{58}$$

Легко видеть, что квазиунитарный ассоциативный группоид без нуля является группой. Возвращаясь к общему случаю, возьмём элементы A и B квазиунитарного мультипликативного группоида кольца M. Сумма $A + B$ квазиунитарна, если

$$(A + B)(A + B)^{(+)} = d$$

где d – действительно и неотрицательно. Имеем:

$$(A + B)(A + B)^{(+)} = (A + B)(A^{(+)} + B^{(+)}) = |A|^2 + |B|^2 + AB^{(+)} + BA^{(+)} = d \geqslant 0.$$

откуда эрмитов элемент $AB^{(+)} + BA^{(+)}$ удовлетворяет условию

$$AB^{(+)} + BA^{(+)} = c, \quad c - \text{действительно}, \tag{59}$$

причём в силу изложенного выше

$$d = |A|^2 + |B|^2 + c \geqslant 0. \tag{60}$$

Поскольку

$$(A + B)(A + B)^{(+)} = (A + B)^{(+)}(A + B),$$

то

$$AB^{(+)} + BA^{(+)} = B^{(+)}A + A^{(+)}B. \tag{59$'$}$$

Условие (59) верно, конечно, и для унитарных элементов A' и B', однако их сумма, являясь квазиунитарной, вообще говоря, уже не унитарна. Условие "квазиунитарной суммируемости" для A и B (59), является, очевидно, необходимым и достаточным. Очевидно, квазиунитарная суммируемость A и B влечет за собой квазиунитарную суммируемость $-A$ и B, A и $-B, \alpha A$ и βB, где α, β действительны. Следовательно, любая совокупность квазиунитарно попарно суммируемых элементов $A, B, ...$, включающая $-A, -B, \alpha A, \beta B, ...$, составляет аддитивную группу – векторное пространство над полем действительных чисел. Элемент Q кольца M, удовлетворяющий условию

$$Q + Q^{(+)} = q, \quad q - \text{действительно}, \tag{61}$$

назовём *квазиантиэрмитовым* (при $q = 0$ элемент Q называется антиэрмитовым), очевидно, $Q^{(+)}$ – также квазиантиэрмитов. Легко показать. что для квазиунитарных элементов A_1 и A_2 ассоциативного кольца M выполняется соотношение

$$|A_1 A_2| = |A_1||A_2|. \tag{61$'$}$$

Это соотношение верно также для альтернативного квазиунитарного группоида второго рода (см. дополнение).

Легко также показать, что если M – кольцо комплексных матриц, то из условия

$$AA^+ = b, \tag{42$'$}$$

следует

$$A^+A = b, \tag{42$''$}$$

вещественность b и его неотрицательность, т. е. квазиунитарность A (В (42$'$) символ "$+$" представляет собой оператор эрмитова сопряжения матриц; из сказанного выше следует, что он является оператором сопряжения и в общем смысле). Условие (59) квазиунитарной суммируемости квазиунитарных элементов A и B может быть сформулировано как квазиантиэрмитовость произведения $AB^{(+)}$, и, соответственно, $BA^{(+)}$, а также $B^{(+)}A$ и $A^{(+)}B$ как следствие. Если в некоторую квазиунитарно суммируемую аддитивную группу включены все действительные числа (сами по себе составляющие квазиунитарно суммируемую аддитивную группу), то, при b действительном,

$$bA^{(+)} + Ab = b(A + A^{(+)}) = \tilde{f},$$

где $\tilde{f}$ действительно, откуда

$$A + A^{(+)} = a, \quad \text{где} \quad a \quad \text{действительно}, \tag{62}$$

т. е. квазиунитарно суммируемая аддитивная группа, включающая действительные числа, состоит из квазиунитарных квазиантиэрмитовых элементов. Легко доказывается, что квазиунитарная суммируемость элементов A и B влечёт за собой квазиунитарную суммируемость элементов $A, B^{(+)}$ если элементы A и B не только квазиунитарны, но и квазиантиэрмитовы, причём в этом случае

$$A^{(+)}B^{(+)} + BA = AB + B^{(+)}A^{(+)} \quad (\text{см. формулу (72)}).$$

Отметим, что квазиунитарно суммируемая аддитивная квазиунитарная группа является подмножеством квазиунитарного мультипликативного группоида, но не обязательно его подгруппоидом. Если квазиунитарный группоид является также подкольцом кольца M, то, с учетом (47), он является алгеброй над полем действительных чисел [6]. Рассмотрим случай, когда группоид квазиунитарных квазиантиэрмитовых элементов кольца M – альтернативная алгебра второго рода над полем действительных чисел; Согласно (52), (53), (62)

$$(AB)B^{(+)} = (AB)(b - B) = (AB)b - (AB)B, A(BB^{(+)}) = (AB)b - A(BB),$$

откуда

$$(AB)B = A(BB). \tag{63}$$

Аналогично получается:

$$B(BA) = (BB)A), \tag{64}$$

– алгебра оказалась альтернативной.

Таким образом:

1) квазиантиэрмитовый (и, следовательно, также квазиунитарный и квазиунитарно суммируемый) мультипликативный альтернативный группоид в кольце M, включающий действительные числа, сопряженные элементы и суммы любых двух элементов, является мультипликативным группоидом (без нуля – лупой) альтернативной алгебры с делением над полем действительных чисел, изоморфной, следовательно, алгебре Кэли (если алгебра неассоциативна н конечномерна) согласно обобщенной теореме Фробениуса [4].

2) Аналогичная квазиантиэрмитова (и, следовательно, квазиунитарная и квазиунитарно суммируемая) мультипликативная полугруппа (без нуля – группа) в кольце M является мультипликативным группоидом алгебры с делением на полем действительных чисел, при её конечном ранге, согласно теореме Фробениуса изоморфной либо кватернионам, либо комплексным числам, либо действительным числам. Обратно, как легко видеть, все элементы алгебры Кэли, кватернионов, комплексных и действительных чисел квазиунитарны и квазиантиэрмитовы.

3) Аналогичный неальтернативный квазиантиэрмитовый мультипликативный группоид в кольце M является мультипликативным группоидом алгебры над полем действительных чисел. Подчеркнем, однако, что в общем случае квазиунитарная мультипликативная группа (вместе с нулем) не всегда является мультипликативным группоидом кольца (мы это увидим и на примерах). Пусть A_i, A_k – элементы квазиунитарного группоида, и

$$A_{i+k} = A_i + A_k, \tag{65}$$

причём (согласно (46′)), при квазиунитарности A_{i+k}

$$A_{i+k} = \varphi(X_1^{i+k}, X_2^{i+k}, ..., X_l^{i+k}), \tag{66}$$

$$A_i = \varphi(X_1^i, X_2^i, ..., X_l^i), \tag{67}$$

$$A_k = \varphi(X_1^k, X_2^k, ..., X_l^k). \tag{68}$$

Итак, если квазиунитарный группоид будет мультипликативным группоидом кольца, то для любого i и k

$$\varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, ..., X_l^{ik}) = \varphi(X_1^i, X_2^i, ..., X_l^i) \cdot \varphi(X_1^k, X_2^k, ..., X_l^k),$$

$$\varphi(X_1^{i+k}, X_2^{i+k}, ..., X_l^{i+k}) = \varphi(X_1^i, X_2^i, ..., X_l^i) + \varphi(X_1^k, X_2^k, ..., X_l^k). \tag{69}$$

Если $A_i = a_i$ – действительное или комплексное число, и

$$\varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, ...) = a_i\varphi(X_1^k, X_2^k, ...) = \varphi(a_iX_1^k, a_iX_2^k, ...);$$

если теперь

$$A_i + A_k = \varphi(X_1^{i+k}, X_2^{i+k}, ...) = \varphi(X_1^i + X_1^k, X_2^i + X_2^k, ...) = \varphi(X_1^i, X_2^i, ...) + \varphi(X_1^k, X_2^k, ...)$$

то φ – линейная функция своих аргументов.

Рассмотрим произведение AB элементов A и B квазиунитарного группоида и возьмём суммы $AB + A, BA + A$. Имеем:

$$AB + A = A(B + 1), \tag{70}$$

$$BA + A = (B + 1)A. \tag{70$'$}$$

Эти суммы квазиунитарны, если $B{+}1$ квазиунитарен, т. е. когда B квазиантиэрмитов, поскольку тогда B квазиунитарно суммируем с 1, и точно так же суммы

$$AB + B = (A + 1)B, \tag{71}$$

$$BA + B = B(A + 1), \tag{71$'$}$$

квазиунитарны, если A квазиантиэрмитов. Вернёмся к условию (59) ($AB^{(+)}$ – квазиантиэрмитово) квазиунитарной суммируемости квазиунитарных элементов A и B. Если A и B ещё и квазиантиэрмитовы, то $A{+}A^{(+)} = a$ (a действительно), $B{+}B^{(+)} = b$ (b действительно), $AB^{(+)} + BA^{(+)} = c_{ab}$ (c_{ab} действительно) следует

$$AB + B^{(+)}A^{(+)} = A(b - B^{(+)}) + (b - B)A^{(+)} = b(A + A^{(+)}) - AB^{(+)} - BA^{(+)} = ba - c_{ab},$$

$$AB + B^{(+)}A^{(+)} = ba - c_{ab}, \tag{72}$$

т. е. AB – квазиантиэрмитово. Таким образом, если A и B квазиунитарны, квазиантиэрмитовы и квазиунитарно суммируемы, то все действительные числа c, а также A, B и AB – попарно квазиунитарно суммируемы (поскольку произведение AB квазиантиэрмитово). Рассмотрим несколько подробнее два случая.

а) Пусть A – квазиунитарный и квазиантиэрмитовый элемент квазиунитарного группоида, не являющийся действительным числом. Тогда совместно с единицей он составляет базис алгебры второго ранга над полем действительных чисел, изоморфной полю комплексных чисел. Действительно, произведение элементов $M_1 = \alpha_1{+}a_1A$ и $M_2 = \alpha_2 + a_2A$ равно

$$M_1M_2 = \alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1a_2 + a_1\alpha_2)A + a_1a_2A^2, \tag{73}$$

причём

$$A^2 = A(a - A^{(+)}) = Aa - |A|^2. \tag{74}$$

Поэтому

$$M_1M_2 = \alpha_1\alpha_2 - a_1a_2|A|^2 + (\alpha_1a_2 + a_1\alpha_2 + a_1a_2a)A, \tag{75}$$

т. е. элемент коммутативной алгебры. При этом, как легко видеть,

$$A = (A + A^{(+)})/2 + (A - A^{(+)})/2, \tag{76$'$}$$

и, по определению,

$$Re\, A = a/2 = (A + A^{(+)})/2, \tag{76}$$

$$(A - A^{(+)})/2 = (i_A) Im\, A, \tag{77}$$

где

$$i_{A\pm} = \pm \frac{(A - A^{(+)})}{2} / \frac{|A - A^{(+)}|}{2}, \tag{78}$$

$$i^2_{A\pm} = -1, \tag{78'}$$

$$A = (a/2) \pm \frac{|A - A^{(+)}|}{2} i_{A\pm}. \tag{78''}$$

. Таким образом,

$$Im\, A = i_A (A^{(+)} - A)/2. \tag{79}$$

Разумеется, другому квазиунитарному квазиантиэрмитову элементу $A' \neq A$ может соответствовать другое поле комплексных чисел. Отметим, что вывод формул (70)–(79) не предполагает ассоциативность или даже альтернативность исходного кольца M, поскольку мы не рассматривали произведения более двух сомножителей.

b) Рассмотрим совокупность квазиунитарных квазиантиэрмитовых квазиунитарно суммируемых элементов. Выше говорилось, что эта совокупность является n-мерным векторным пространством над полем действительных чисел. Пусть $n > 2$. Выберем из совокупности два линейно независимых от 1 и друг друга элемента A и B, не являющихся, следовательно, действительными числами (1, A, B не лежат в одной плоскости). Предположим также, что рассматриваемая совокупность ассоциативна или хотя бы альтернативна. Произведение $A \cdot B$, в силу квазиунитарной суммируемости и квазиантиэрмитовости A и B квазиантиэрмитово, и, следовательно, квазиунитарно суммируемо с действительными числами. В силу квазиантиэрмитовости A и B оно также квазиунитарно суммируемо с A и B. Следовательно, 1, A, B и AB являются элементами некоторого векторного пространства над полем действительных чисел (при этом AB может и не принадлежать к исходному векторному пространству).

Возьмём два вектора этого пространства

$$Q_1 = \alpha_1 + \beta_1 A + \gamma_1 B + \delta_1 AB, \tag{80}$$

$$Q_2 = \alpha_2 + \beta_2 A + \gamma_2 B + \delta_2 AB, \tag{81}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ $(i = 1, 2)$ – действительные числа, и рассмотрим их произведение. Имеем:

$$Q_1 Q_2 = \alpha_1\alpha_2 + (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)A + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2)B + (\delta_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2 + \alpha_1\delta_2)AB + \beta_1\beta_2 A^2 +$$

$$+\gamma_1\beta_2 BA + \delta_1\beta_2 (AB)A + \gamma_1\gamma_2 B^2 + \delta_1\gamma_2 (AB)B + \beta_1\delta_2 A(AB) + \gamma_1\delta_2 B(AB) + \delta_1\delta_2 (AB)^2. \tag{82}$$

Далее, полагая

$$a = A + A^{(+)}, \tag{83}$$

$$b = B + B^{(+)}, \tag{84}$$

$$AB^{(+)} + BA^{(+)} = c_{ab}, \tag{85'}$$

(a, b, c_{ab} – действительные числа), имеем, учитывая альтернативность совокупности и опуская некоторые вычисления:

$$A^2 = aA - |A|^2, \tag{85}$$

$$BA = -c_{ab} + bA - AB + aB, \tag{86}$$

$$B^2 = bB - |B|^2, \tag{87}$$

$$(AB)A = (ab - c_{ab})A + |A|^2 B - b|A|^2, \tag{88}$$

$$(AB)B = -|B|^2 A + bAB, \tag{89}$$

$$A(AB) = -|A|^2 B + aAB, \tag{90}$$

$$B(AB) = -a|B|^2 + |B|^2 A + (ab - c_{ab})B, \tag{91}$$

$$(AB)^2 = (ab - c_{ab})AB - |AB|^2. \tag{92}$$

Таким образом, получена алгебра четвертого ранга над полем действительных чисел, как мы увидим, с базисом $1, A, B, AB$. Она изоморфна алгебре кватернионов. Действительно, переход от $1, A, B, AB$ к каноническому базису $1, i, j, k$ может быть сделан с помощью преобразования

$$i = (A - a/2)/|A - a/2|, \tag{93}$$

$$\bar{j} = \big[(B - b)/|B - b/2|\big] + \big[(ab/2 - c_{ab})/2|A - a/2||B - b/2|\big] i, \tag{94}$$

$$j = \bar{j}/|\bar{j}|, \qquad (95) \qquad k = ij, \tag{95$'$}$$

аналогично тому, как это делается при выводе теоремы Фробениуса [4].

Рассмотрим снова два квазиунитарных элемента A и B квазиунитарно суммируемого векторного пространства. Имеем:

$$|A \pm B|^2 = |A|^2 + |B|^2 \pm (AB^{(+)} + BA^{(+)}),$$

$$|A \pm B| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 \pm (AB^{(+)} + BA^{(+)})}. \tag{96}$$

Но вследствие квазиунитарной суммируемости и (76),

$$(AB^{(+)} + BA^{(+)})/2 = Re\,(AB^{(+)}), \tag{97}$$

$$|A \pm B| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 \pm 2Re\,(AB^{(+)})} \leqslant \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|Re\,(AB^{(+)})|}. \tag{98}$$

Но

$$|Re(AB^{(+)})| \leqslant |AB^{(+)}|. \tag{99}$$

При ассоциативном умножении рассматриваемых элементов

$$|AB^{(+)}| = |A| \cdot |B^{(+)}|. \tag{100}$$

Но, поскольку $|B^{+}| = |B|$, то

$$|AB^{(+)}| = |A| \cdot |B|. \tag{100$'$}$$

Следовательно, в этих случаях

$$|A \pm B| \leqslant \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|} = |A| + |B|,$$

т. е.

$$|A \pm B| \leqslant |A| + |B|. \tag{101}$$

(Формулы (100) и (100$'$)), а также формула

$$|AB| = |A||B|, \tag{100$''$}$$

верны и для случая альтернативного умножения в пространстве квазиантиэрмитовых квазиунитарных квазиунитарно суммируемых элементов. В самом деле, A и B принадлежат или к полю комплексных чисел (при их линейной зависимости), или к некоторому телу кватернионов. Но в обоих случаях формулы (100), $(100'), (100'')$ верны).

Таким образом, выполняется условие (101), а также условия

$$|A| = 0 \quad \text{при} \quad A = 0, \qquad (102) \qquad\qquad |A| > 0 \quad \text{при} \quad A \neq 0, \qquad (103)$$

аналогично для B. Как известно, кольца, для которых выполняется условие $(100'')$, (101) – (103), называются нормированными [4], а при

$$|AB| \leqslant |A||B| \tag{100'''}$$

– псевдонормированными [4]. При выполнении равенств $(100'')$, (101)–(103), модули $|A|$, $|B|$ называются нормами. По аналогии назовем векторные пространства квазиунитарных квазиунитарно суммируемых элементов, для которых выполняются условия $(100'')$, (101)–(103), нормированными векторными пространствами в кольце M. Как известно, векторные пространства, для которых выполняются только условия (101)–(103) и условие

$$|aB| = |a||B|, \qquad (100''''),$$

где a – число (в нашем случае действительное), называются нормированными [5]. Таким образом, рассматриваемое нормированное векторное пространство в кольце M является нормированным в обычном смысле.

§3. Гиперкольца, гипертела, гипералгебры

Не любое векторное пространство квазиунитарных квазиунитарно суммируемых элементов является кольцом или телом (по умножению в кольце M), поскольку не всегда совпадает со всем мультипликативным квазиунитарным группоидом, или полугруппой, или группой (исключая нуль). Может, однако, оказаться, и мы это увидим на примерах, что квазиунитарный группоид разбивается (возможно неоднозначно) на аддитивные группы (в частности, на векторные пространства), обладающие следующими свойствами:

1) они пересекаются только в некоторых нулевых точках;

2) умножение определено для всего рассматриваемого множества (в нашем случае для всего квазиунитарного группоида);

3) произведение любого элемента a_i i-й аддитивной группы на любой элемент a_k k-й аддитивной группы является элементом a_l l-й (фиксированной) аддитивной группы), причём аддитивные группы-сомножители могут совпадать;

4) выполняются правый и левый дистрибутивные законы.

Можно показать, что третье свойство следует из четвертого (дистрибутивности). Множество, обладающее свойствами 1) – 4), назовём *гиперкольцом* m-го порядка, где m – число аддитивных групп. Мы в основном будем рассматривать такие совокупности с одним общим нулем. При этом, как уже говорилось, аддитивными группами могут быть и векторные пространства (в данном случае одинаковой размерности). Если все элементы мультипликативного группоида, кроме нулей, составляют лупу или группу, назовём рассматриваемое множество *гипертелом* m-го порядка. Коммутативное ассоциативное гипертело m-го порядка назовём *гиперполем* m-ого порядка по аддитивным группам. Если аддитивные группы рассматриваемого множества являются векторными пространствами над полем P, то гиперкольцо назовём *гипералгеброй m-го порядка* по этим пространствам, а гипертело или гиперполе – *гипералгеброй m-го порядка с делением* по векторным пространствам. При этом должны выполняться соотношения

$$(aA) \cdot B = A(aB) = a(AB),$$

где a – элемент поля P, A и B – элементы векторного пространства.

Нетрудно показать, что гипертело (гиперполе) с ненулевыми аддитивными группами имеет среди своих аддитивных групп одно и только одно тело или поле. Очевидно, что кольцо, тело, поле или алгебра являются соответственно гиперкольцом, гипертелом, гиперполем или гипералгеброй первого порядка. Кольцо, тело, поле или алгебра могут быть одновременно гиперкольцом, гипертелом, гиперполем, гипералгеброй по каким-либо входящим в него аддитивным группам или пространствам. Если размерности рассматриваемых векторных пространств одинаковы и равны n, а их число m, то мы имеем гипералгебру m-го порядка n-го ранга. Гиперкольца, элементы которых квазиунитарны, назовём квазиунитарными. Гиперкольца, для которых выполняются условия $(100'')$–(103), назовём *нормированными*. Гиперкольца, для которых выполняются условия $(100''')$–(103), назовём *псевдонормированными*. Отметим, что совокупность M, включающая квазиунитарный мультипликативный группоид, может быть не только кольцом, но и гиперкольцом. Более подробное исследование гиперколец (гиперполей, гипертел, гипералгебр) выходит за рамки настоящей статьи.

§4. Пространство квазиунитарных квазиантиэрмитовых квазиунитарно суммируемых элементов как кольцо

Рассмотрим снова квазиунитарное квазиантиэрмитово и квазиунитарно суммируемое пространство. Оно, как уже говорилось, не обязательно является кольцом по умножению в кольце M. Однако, как известно, любую аддитивную группу можно сделать кольцом (например, нулевым [4]). Рассмотрим два других варианта.

1) В рассматриваемом пространстве может быть дополнительно определено умножение по правилу [4]

$$A \circ B = (1/2)(AB + BA), \tag{104}$$

(коэффициент $1/2$ в (104) введён для удобства, но в [4] опущен). При этом наше пространство становится новым коммутативным, но, вообще говоря, неассоциативным кольцом. Оно называется йордановым [4], если

$$((A \circ A) \circ B) \circ A = (A \circ A) \circ (B \circ A). \tag{104'}$$

В нашем случае оно является алгеброй над полем действительных чисел. В самом деле, для элементов A и B, принадлежащих теперь нашему векторному пространству, имеем, в силу квазиантиэрмитовости и квазиунитарной суммируемости A и B:

$$A \circ B = (1/2)[A(b - B^{(+)}) + B(a - A^{(+)})] = (1/2)(bA + aB - c_{ab}), \tag{105'}$$

т. е. $A \circ B$ принадлежит нашему векторному пространству, что и требовалось доказать (a, b, c_{ab} – указанные выше действительные числа). (Эта алгебра, как нетрудно показать, является йордановой, поскольку условие $(104')$ выполняется.) Это кольцо имеет единицу и квазиунитарно. В самом деле,

$$A \circ A^{(+)} = A^{(+)} \circ A = (1/2)(AA^{(+)} + A^{(+)}A) = |A|^2, \tag{105''}$$

$$A \circ 1 = \frac{1}{2}(A \cdot 1 + 1 \cdot A) = A \tag{105'''}$$

(здесь символ $^{(+)}$ совпадает с сопряжением в M, а единицей является единица кольца M). Можно показать, что рассматриваемое йорданово кольцо псевдонормировано, если квазиунитарный мультипликативный группоид альтернативен, за исключением случая, когда рассматриваемое кольцо – нормированная алгебра второго ранга над полем действительных чисел, всегда изоморфная полю комплексных чисел.

2) Введём теперь в нашем пространстве умножение по правилу

$$A \circ B = (1/2)(AB^{(+)} + BA^{(+)}) \tag{105}$$

(коэффициент 1/2, как и в формуле (104), введён для упрощения дальнейших выкладок и рассуждений). При этом наше пространство так же, как и в пункте 1, превращается в коммутативное, но, вообще говоря, неассоциативное кольцо. Покажем, что рассматриваемое векторное пространство само по себе действительно является кольцом. В силу квазиунитарной суммируемости

$$A \circ B = (1/2)(AB^{(+)} + BA^{(+)}) = c_{ab}/2 = Re(A \cdot B^{(+)}). \tag{106}$$

Поскольку действительные числа принадлежат нашему пространству, $A \circ B$ ему принадлежит, что и требовалось доказать.

Поле действительных чисел является идеалом [4] рассматриваемого кольца. Интересно отметить, что произведение $A \circ B$ элементов нашего пространства аналогично скалярному произведению элементов A и B [1]. Введём обозначение

$$(\widetilde{A, B}) = A \circ B \tag{107}$$

(в нашем случае скалярное произведение вещественно). Действительно, имеем:

$$A \circ (B_1 + B_2) = A \circ B_1 + A \circ B_2; \tag{108}$$

пусть c – действительное число, тогда

$$A \circ cB = \frac{1}{2}(AcB^{(+)} + cBA^{(+)}) = c(AB^{(+)} + BA^{(+)})/2 = c(A \circ B), \tag{109}$$

$$A \circ B = B \circ A, \tag{110}$$

$$A \circ A = (1/2)(AA^{(+)} + AA^{(+)}) = AA^{(+)} = |A|^2, \tag{111}$$

откуда

$$A \circ A \geqslant 0, \tag{112}$$

причём $A \circ A = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$. (В частности, если e - единица кольца M, то

$$e \circ e = \frac{1}{2}(ee^{(+)} + ee^{(+)}) = \frac{1}{2}(ee + ee) = e.) \tag{112'}$$

Но условиям (108)–(112) и должно удовлетворять скалярное произведение [5], хотя в рассматриваемом случае аналог скалярного произведения оказался принадлежащим векторному пространству, поскольку действительные числа ему принадлежат. Так, например, единица e поля действительных чисел (и кольца M) может быть выбрана одним из базисных векторов. Назовём $(\widetilde{AB}) = A \circ B$ *внутренним скалярным произведением.* Оно, как легко, видеть, не имеет единицы. Из формулы (111) следует, что внутренний скалярный квадрат вектора A (квадрат его нормы [5]) равен квадрату его модуля (т. е. норма вектора A равна его модулю $|A|$ как квазиунитарного элемента). (Из (105′), (105) и (107) следует

$$\frac{1}{2}(AB+BA)=\frac{1}{2}(Ab+Ba)-(\widetilde{A,B}).) \tag{107′}$$

Далее, как известно,

$$|A\circ B|\leqslant |A|\cdot|B|, \tag{113}$$

$$|A+B|\leqslant |A|+|B|. \tag{113′}$$

Формула (113) представляет собой неравенство Шварца. Оно называется также неравенством Коши-Буняковского [3]. Из (113), (113′) следует псевдонормированность нашего кольца, а из (111) – его квазиунитарность, причём здесь

$$A^{(+)}=A,\quad {}^{(+)}-\text{знак сопряжения в нашем кольце.}$$

Если A и B линейно зависимы, $B=aA$, то неравенство Шварца превращается в равенство [5], [3]. Если действительные числа не входят в рассматриваемое векторное пространство (т.е. если оно не квазиантиэрмитово), оно уже не является кольцом по умножению "$\circ$".

Отметим, однако, что любое евклидово векторное n-мерное пространство L [3] над полем P комплексных чисел, не принадлежащих к этому пространству, совместно с полем P представляет собой гиперкольцо второго порядка с единицей (совпадающей с единицей поля P) по аддитивным группам P и L. Умножением служат:

1) умножение в поле P;

2) умножение векторов A и B, дающее скалярное произведение (A, B);

3) умножение элемента $\tilde a$ поля P на элементы A пространства $L\,\tilde a\cdot A$ согласно определению векторного пространства, причём здесь

$$D=\tilde a\circ A=A\circ\tilde a^*=\tilde a\cdot A\quad (\text{D – вектор}).$$

Нетрудно показать, что указанное гиперкольцо квазиунитарно и псевдонормировано, поскольку

$$|(A,B)|\leqslant|A|\cdot|B|,\quad (A,A)=|A|^2\geqslant 0,\quad A^{(+)}=A,\quad \tilde a\tilde a^*=|\tilde a|^2\geqslant 0,\quad |\tilde a\tilde b|=|\tilde a||\tilde b|,$$

($\tilde a,\tilde b$ – комплексные числа), $|\tilde a\cdot A|=|\tilde a|\cdot|A|$.

(Однако пространство L, будучи вместе с P псевдонормированным гиперкольцом, само по себе нормировано, как говорилось выше, как евклидово векторное пространство [5]). Можно показать, что указанное гиперкольцо, но над полем P действительных чисел, йорданово и является гипералгеброй над ним.

§5. Примеры

а) Квазиунитарные матрицы n-го порядка с обычными правилами умножения и сложения, с комплексными или вещественными матричными элементами.

Кольцо M в данном случае – кольцо матриц n-го порядка. Операция сопряжения записывается обычным образом:

$$(A^+)_{ik}=A^*_{ki}, \tag{114}$$

а для вещественных матриц она совпадает с операцией транспонирования:

$$(A^{(+)})_{ik} = (\tilde{A})_{ik} = A_{ki}. \tag{115}$$

Поскольку кольцо матриц ассоциативно, то к нему применены результаты предыдущих параграфов, полученные для ассоциативного кольца M. Векторные пространства квазиунитарных, квазиантиэрмитовых квазиунитарно суммируемых матриц вследствие ассоциативности кольца матриц нормированы в нём. Условие квазиантиэрмитовости (62) перепишется следующим образом:

$$A_{ii} + A^*_{ii} = f, \tag{62$'$}$$

(f – действительно),

$$A_{ik} + A^*_{ki} = 0. \quad (i \neq k,\ i,k = 1,2,...,n). \tag{62$''$}$$

Действительные части диагональных матричных элементов, согласно (62′), равны. Вещественные квазиунитарные матрицы будем называть квазиортогональными (см. §1). Аргумент детерминанта квазиунитарной матрицы назовём *угловым параметром* этой матрицы. Угловой параметр произведения квазиунитарных (и, в частности, унитарных) матриц одного порядка равен сумме угловых параметров сомножителей. Введём обозначения (см. также §1): $QSU(n)$ – мультипликативная группа квазиунитарных отличных от нуля матриц n-го порядка с положительным детерминантом; $QO^+(n)$ – мультипликативная группа вещественных отличных от нуля квазиортогональных матриц n-го порядка с положительным детерминантом; $QO(n)$ – мультипликативная группа квазиортогональных вещественных отличных от нуля матриц n-го порядка; $QU(n)$ – мультипликативная группа квазиунитарных отличных от нуля матриц n-го порядка. Группы $QSU(n)$ и $QO^+(n)$ представляют собой группы вращения и растяжения, совокупности с отрицательным детерминантом – отражения и растяжения. Они не являются группой.

b) Группоид квазиортогональных вещественных матриц второго порядка. Отличные от нуля матрицы образуют группу $QO(2)$. Несложные вычисления показывают, что эти матрицы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \tag{116}$$

$$B = \begin{pmatrix} X' & Y' \\ Y' & -X' \end{pmatrix}, \tag{117}$$

причём

$$\det A = X^2 + Y^2 \geqslant 0, \tag{118}$$

$$\det B = -X^{12} - Y^{12} \leqslant 0. \tag{119}$$

Матрицы A, представляющие собой линейные функции от X и Y, квазиунитарны и в данном случае квазиортогональны, квазиунитарно суммируемы, образуя аддитивную группу, именно, аддитивную группу кольца, поскольку матрицы A в то же время составляют мультипликативный группоид, а отличные от нуля матрицы A, согласно (118), представляют собой мультипликативную группу $QO^+(2)$. Следовательно, кольцо матриц A представляет собой поле. Оно, как известно, изоморфно полю комплексных чисел [6]. Матрицы B, в силу их линейной зависимости от X' и Y', также образуют аддитивную группу, но не образуют мультипликативного группоида. Однако совокупность матриц A и B совместно не образуют квазиунитарного кольца. Как аддитивные группы матрицы A и B представляют собой двумерные векторные пространства над полем действительных чисел. Произведение двух матриц типа B, как легко показать, является матрицей типа A, хотя $B_1B_2 \neq B_2B_1$. Далее, произведения матриц типа A и типа B суть матрицы типа B, но матрицы типов A и B не коммутируют. Мы видим, что рассматриваемые матрицы представляют собой гиперкольцо и даже гипертело второго порядка, поскольку матрицы типов A и B совместно, исключая нуль, представляют собой группу. Таким образом, поскольку матрицы A и B – действительные векторные пространства, совокупность квазиортогональных матриц второго порядка представляет собой гиперадгебру второго порядка второго ранга над полем действительных чисел с делением.

c) Совокупность A_φ комплексных квазиунитарных матриц второго порядка. Отличные от нуля матрицы образуют группу $QU(2)$. Вычисления, которые здесь опущены, приводят к следующей формуле для этих матриц:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^* e^{i\varphi} & X^* e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{120}$$

Детерминант матриц A_φ равен:

$$\det A_\varphi = (|X|^2 + |Y|^2) e^{i\varphi}. \tag{121}$$

Следовательно, согласно изложенному выше, φ является угловым параметром матрицы A_φ, причём угловые параметры матриц A_φ при их умножении складываются. Очевидно, что при заданном φ матрицы A_φ квазиунитарно суммируемы, образуя аддитивную группу – векторное пространство четвертого порядка над полем действительных чисел. При $\varphi = 0$ получим:

$$A_0 = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^* & X^* \end{pmatrix} \tag{122}$$

– матрицу, которая, как известно, изоморфна кватернионам [7]. Таким образом, мы получаем гиперадгебру бесконечного порядка четвертого ранга с делением над полем действительных чисел. Более подробно примеры a и b рассмотрены в [2]. Там же см. шестой вариант в третьем примере, в целом представляющий собой альтернативное гиперкольцо второго рода, включающее алгебру Кэли.

d) Числа Клиффорда [7] в представлении дираковских матриц.

Как известно, числа Клиффорда в представлении матриц Дирака γ_μ составляют вместе с единицей базис гиперкомплексной системы вида [7, 8]:

$$1, \gamma_\mu, \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \sigma_{\mu\nu} = (1/2i)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \quad \alpha_\mu = i\gamma_5\gamma_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{123}$$

Все указанные матрицы эрмитовы и унитарны. Далее, имеются системы попарно антикоммутирующих матриц:

$$\gamma_\mu, \gamma_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5); \quad \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu, \alpha_\mu \quad (\nu \text{ принимает все значения, не равные } \mu)$$

$$\alpha_\mu, \gamma_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_5);$$

далее

$$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}; \quad \sigma_{14}, \sigma_{24}, \sigma_{12}; \quad \sigma_{23}, \sigma_{24}, \sigma_{34}; \quad \sigma_{14}, \sigma_{13}, \sigma_{34}; \ \ldots \tag{124}$$

– 20 совокупностей, всего 26 совокупностей. Сделаем теперь следующее замечание. Пусть две матрицы A и B эрмитовы и унитарны. Тогда, очевидно, матрицы

$$A' = iA, \quad B' = iB, \tag{125}$$

антиэрмитовы и унитарны, и, следовательно, квазиунитарно суммируемы с действительными числами. Далее,

$$A'B'^{+} + B'A'^{+} = AB + BA. \tag{126}$$

Если

$$AB + BA = c_{ab} \tag{127}$$

– действительное число, то, следовательно,

$$A'B'^{+} + B'A'^{+} = c_{ab}. \tag{128}$$

Таким образом, при выполнении условия (128) матрицы A', B' квазиунитарно суммируемы. С учетом сказанного получаем систему унитарных антиэрмитовых матриц

$$\gamma'_\mu = i\gamma_\mu, \quad \gamma'_5 = i\gamma_5 = i\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3\gamma'_4, \quad \sigma'_{\mu\nu} = i\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma'_\mu\gamma'_\nu - \gamma'_\nu\gamma'_\mu), \quad \alpha'_\mu = i\alpha_\mu = \gamma'_5\gamma'_\mu. \tag{129}$$

Системы антикоммутирующих матриц (124) переходят теперь в системы матриц, каждая из которых совместно с единицей являются базисом (как легко показать, ортонормированным) векторного пространства квазиунитарно суммируемых матриц над полем действительных чисел

$$1, \gamma'_\mu\gamma'_5(1, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4, \gamma'_5); 1, \gamma'_\mu, \sigma'_{\mu\nu}, \alpha'_\mu$$

(ν пробегает значения, не равные μ) – четыре совокупности;

$$1, \alpha'_\mu, \gamma'_5(1, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \gamma'_5); \quad 1, \sigma'_{12}, \sigma'_{13}, \sigma'_{23}; \quad \sigma'_{14}, \sigma'_{24}, \sigma'_{12}; \quad \sigma'_{23}, \sigma'_{24}, \sigma'_{34}; \quad \sigma'_{14}, \sigma'_{13}, \sigma'_{34}; \ldots \tag{130}$$

– всего 26 совокупностей (26 векторных пространств квазиунитарно суммируемых элементов). Как мы видели, в каждом из этих пространств 1 и любая из базисных матриц могут служить базисом комплексных чисел; далее, единица, любые две базисные матрицы и их произведение могут служить базисом кватернионов. Размерности указанных пространств соответственно 6 (одно пространство), 6 (четыре пространства), 6 (одно пространство), 4 (20 пространств). Из указанных пространств четырехмерные могут служить аддитивной группой кватернионов. Каждое из указанных пространств является, согласно (105), кольцом – алгеброй над полем действительных чисел (является также йордановым кольцом, см. (104) и (104′)).

§5. Заключение

Мы видим, что наряду с известными полями и телами, совокупность квазиунитарных матриц включает ряд гипер态алгебр, в том числе и с делением, а также содержит векторные пространства, не являющиеся подкольцами кольца M.

Квазиунитарные матрицы также позволяют рассмотреть обобщенную проблему Гурвица (см. §1).

Дополнение
Вывод формулы $|A_1A_2| = |A_1||A_2|$ для квазиунитарного альтернативного группоида второго рода

Пусть A_1 и A_2 – два элемента квазиунитарного альтернативного группоида второго рода. Имеем, используя условия альтернативности второго рода:

$$[(A_1A_2)(A_1A_2)^{(+)}]A_1 = (A_1A_2)[(A_1A_2)^{(+)}A_1] = (A_1A_2)[(A_2^{(+)}A_1^{(+)})A_1] = (A_1A_2)[A_2^{(+)}|A_1|^2] =$$

$$= |A_1|^2[(A_1A_2)A_2^{(+)}] = |A_1|^2[A_1|A_2|^2] = A_1|A_1|^2|A_2|^2.$$

Итак,

$$[(A_1A_2)(A_1A_2)^{(+)}]A_1 = |A_1A_2|^2A_1 = |A_1|^2|A_2|^2A_1, \qquad \text{т. е.}$$

$$|A_1A_2|^2A_1 = |A_1|^2|A_2|^2A_1.$$

Далее,

$$|A_1A_2|^2(A_1A_1^{(+)}) = |A_1|^2|A_2|^2(A_1A_1^{(+)}), \qquad \text{или}$$

$$|A_1A_2|^2|A_1|^2 = |A_1|^4|A_2|^2,$$

откуда

$$|A_1A_2|^2 = |A_1|^2|A_2|^2, \quad |A_1A_2| = |A_1||A_2|.$$

Литература

[1] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. "Гиперкомплексные числа". "Наука", ГРФМЛ, Москва, 1973.

[2] Л. Г. Соловей. "О некоторых дистрибутивных универсальных алгебрах". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2(2)**, Vol 4, 200.

[3] Гельфанд И. М. "Лекции по линейной алгебре". 4-е изд. доп. "Наука", ГРФМЛ, М., 1971.

[4] Курош А. Г. "Лекции по общей алгебре", 2-е изд., ГИФМЛ, Москва, 1962.

[5] Ю. Верле. "Релятивистская теория реакций (методы, не зависящие от моделей)" Перевод с английского Я. И. Азимова. Атомиздат, Москва, 1969.

[6] Курош А. Г. "Курс высшей алгебры", 2-е изд., ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1949.

[7] Э. Маделунг "Математический аппарат физики". Перевод с 6-го немецкого издания М. А. Иглицкого. Под редакцией В. И. Левина. Издание второе стереотипное. "Наука", ГРФМЛ, Москва, 1968.

[8] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. "Квантовая электродинамика". Издание третье, переработанное. "Наука", ГРФМЛ, Москва, 1969.