ОТНОШЕНИЕ ОДНОВРЕМЕННОСТИ В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
zaripov@mail.knc.ru

Дается новое определение отношения одновременности разноместных событий, устанавливаемое сигнальным методом, в финслеровом пространстве-времени с форм-инвариантной метрической функцией и находятся общие преобразования проективных однородных координат в двух векторных формах. Взаимосвязь между событиями осуществляется плоскими волнами де Бройля по четырем векторам выделенных направлений трехмерного пространства. Исследуются групповые свойства неаддитивного закона композиции элементов группы трехмерных скоростей (неоднородных проективных координат) с квадратичной нелинейностью. Вводится новая аддитивная угловая мера, зависящая от векторов выделенных направлений. Используя гамильтонов формализм, находятся соотношения для энергии и импульса частицы, а также приводятся их преобразования в векторных формах. В частных случаях полученные результаты совпадают с известными. Рассматривается финслерово пространство-время с отношением абсолютной одновременности разноместных событий и преобразованиями Галилея.

1. Введение

В знаменитой работе [1] А. Пуанкаре впервые приводит определение физического понятия отношения одновременности разноместных событий в инерциальной системе отсчета. Геометрическим образом в трёхмерном пространстве выбрана волновая поверхность (или так называемая поверхность постоянной фазы) в виде сферы, обладающей центральной симметрией, а геометрическим объектом является расстояние. Используя методы метрической геометрии, А. Пуанкаре впервые рассмотрел формализм четырехмерного пространства-времени и нашел все инварианты группы Лоренца [2]. Наконец, Г. Минковский [3] использовал формализм четырехмерной метрической геометрии, предложенной А. Пуанкаре, и ввел локальное изотропное четырехмерное псевдоевклидово пространство-время в галилеевых координатах, которое является базисом физической релятивисткой теории (для случая специальной теории относительности). Метрическая функция

$$F = ds = \left[(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2\right]^{1/2}, \tag{1.1}$$

равная расстоянию между событиями в пространстве-времени, имеет при $F = 0$ две характеристики для сигнала.

Работы французского ученого имеют большое значение для релятивисткой механики и в настоящее время незаслуженно принижены. В 1904 году Казанское физико-математическое общество удостаивает А. Пуанкаре золотой медали фонда имени Н. И. Лобачевского, а премия имени Н. И. Лобачевского присуждается Д. Гильберту. Н. И. Лобачевский 19 лет (1827 – 1846 гг.) служил ректором Казанского Императорского университета, учрежденного 17 (5) ноября 1804 года императором Александром I, и в 1826 году впервые открыл неевклидову геометрию [4], которая, в частности, реализуется в трехмерном пространстве скоростей Фока [5]. А. Пуанкаре и Н. И. Лобачевский утверждали, что различные физические явления могут быть описаны в терминах различных геометрий.

Существуют некоторые модели обобщения псевдоевклидовой геометрии. Одним из перспективных подходов является изучение локального финслерового пространства-времени, характерным свойством которого является наличие анизотропии. Недавно в работах [6 − 9] предложена новая модель четырехмерного пространства-времени в виде локальной анизотропной финслеровой геометрии с метрической функцией Бервальда-Моора

$$F = [(cdt + dx + dy + dz)\,(cdt - dx + dy - dz)\,(cdt + dx - dy - dz)\,(cdt - dx - dy + dz)]^{1/4} \quad (1.2)$$

и ее обобщения

$$\begin{aligned} F = \big[&(cdt - dx - dy - dz)^{1+r_1+r_2+r_3}\,(cdt + dx - dy + dz)^{1-r_1+r_2-r_3}\times \\ &\times (cdt - dx + dy + dz)^{1+r_1-r_2-r_3}\,(cdt + dx + dy - dz)^{1-r_1-r_2+r_3}\big]^{1/4}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

имеющих четыре характеристики для сигнала. При $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ и замене $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$ метрическая функция (1.3) совпадает с (1.2).

Геометрическим образом в трёхмерном пространстве выбрана замкнутая волновая поверхность: специально ориентированный координатный тетраэдр, не обладающий центральной симметрией. Геометрическим объектом является объем. В такой модели естественно применять методы проективной геометрии с соответствующей теорией инвариантов и мер, среди которых, как известно, отсутствует понятие расстояния в метрической форме, однако есть мера угла и т. п. Были получены преобразования проективных однородных координат t, x, y и z при переходах между движущимися инерциальными системами отсчетов, которые сохраняют форм-инвариантность метрических функций (1.2) и (1.3), а также преобразования проективных неоднородных координат u_x, u_y, u_z, являющихся компонентами трехмерной скорости движения. Преобразования импульса и энергии частицы в финслеровой геометрии с (1.3) даются в [10].

Метрические функции (1.2) и (1.3) принадлежат к классу функций

$$F = \left[\left(a_i dx^i\right)^{1+a}\left(b_i dx^i\right)^{1+b}\left(c_i dx^i\right)^{1+c}\left(e_i dx^i\right)^{1+e}\right]^{1/4}, \quad a + b + c + e = 0, \quad (1.4)$$

введенному Б. Риманом [11].

Целью настоящей работы является изучение отношения одновременности в общем виде для такой финслеровой структуры четырехмерной проективной геометрии и нахождение соответствующих преобразований проективных однородных и неоднородных координат, а также энергии и импульса частицы.

2. Отношение одновременности разноместных событий

Рассмотрим разноместные события в четырех точках трехмерного пространства инерциальной системы отсчёта (K), взаимосвязанные сигналом, являющимся наиболее быстрым процессом установления причинно-следственной цепи. Пусть из точки O в момент времени T посылаются сигналы в четыре точки A и A^n $(n = 1, 2, 3)$. Сигналы достигают этих точек в момент времени t $(t > T)$. После отражения от точек A^n сигналы возвращаются в точку O в момент времени T^n $(T^n > t)$. Наблюдаемыми величинами являются T и T^n в точке O.

Определение 1. Имеется единое время (или дается отношение одновременности событий) для точек O, A и A^n при выполнении условия

$$(t - T) = \left(T^1 - t\right) + \left(T^2 - t\right) + \left(T^3 - t\right). \quad (2.1)$$

Данное определение означает равенство интервала времени при распространении сигнала от точки O до точки A сумме интервалов времён при распространении от трех точек A^n в точку O, записанное в виде $t_{OA} = t_{A^1O} + t_{A^2O} + t_{A^3O}$ ($t_{OA} = -t_{AO} > 0$, $t_{A^nO} = -t_{OA^n} > 0$). Из (2.1) получим значение момента времени t

$$t = T + \frac{1}{4}\sum_{n}^{3}(T^n - T) = \frac{1}{4}\Big(T + \sum_{n}^{3} T^n\Big), \tag{2.2}$$

зависящее от моментов времен T и T^n в точке O и являющееся их средним арифметическим. Согласно (2.2) часы в точках O, A и A^n являются синхронизованными.

Определение 2. Величина

$$\overline{OA} = \overline{A^1O} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O} \tag{2.3}$$

есть длина отрезка пути от точки O до точки A и равняется сумме длин путей от трех точек до точки O.

Определение 3. Величина

$$c = \frac{\overline{OA} + \overline{A^1O} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O}}{t_{OA} + t_{A^1O} + t_{A^2O} + t_{A^3O}} \tag{2.4}$$

является универсальной постоянной и определяет физическую скорость сигнала в различных инерциальных системах отсчетов.

Согласно (2.1) и (2.3), из (2.4) получим соотношение $t - T = \overline{OA}\big/c$, из которого следует $\overline{OA} = -\overline{AO} > 0$. Аналогичные определения выполняются для точек A^1, A^2 и A^3. Например, используя определения для точки A^1, запишем соотношения

$$\begin{gathered} t_{OA^1} = t_{AO} + t_{A^2O} + t_{A^3O}, \quad \overline{OA^1} = \overline{AO} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O}, \\ c = \frac{\overline{OA^1} + \overline{AO} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O}}{t_{OA^1} + t_{AO} + t_{A^2O} + t_{A^3O}} \end{gathered} \tag{2.5}$$

и получим $T^1 - t = \overline{A^1O}\Big/c$.

Таким образом, для остальных трех точек запишем следующие равенства

$$T^n - t = \frac{\overline{A^nO}}{c}, \quad \overline{A^nO} = -\overline{OA^n} > 0. \tag{2.6}$$

Пусть точка O – начало координат 3-мерного пространства. Из (2.5) и (2.8) следуют, с учетом неравенств для длин отрезков путей, линейные формы для координат

$$\overline{OA} = (\boldsymbol{\varepsilon x}), \quad \overline{A^nO} = (\boldsymbol{\varepsilon}^n \boldsymbol{x}), \tag{2.7}$$

являющиеся скалярными произведениями векторов $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^n = \left\{\varepsilon^n_x, \varepsilon^n_y, \varepsilon^n_z\right\}$ и радиус-вектора $\boldsymbol{x} = \{x, y, z\}$. Длина отрезков путей состоит из длин отрезков, направленных вдоль осей и параллельных им прямых. Имеем четыре выделенных направления в виде векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ и четыре равенства для характеристик

$$T = t - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon x})}{c}, \quad T^n = t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^n \boldsymbol{x})}{c}, \tag{2.8}$$

совпадающих с измеряемыми значениями моментов времен. Данные равенства характерны для проективной геометрии, где t, x, y, z есть проективные однородные координаты. В метрической геометрии пространства-времени Минковского с (1.1) имеют место два равенства для характеристик $T = t - |\boldsymbol{x}|/c$, $T^1 = t + |\boldsymbol{x}|/c$, вытекающих из определения отношения одновременности Пуанкаре, определения расстояния между точками и определения универсальной постоянной c, как физической скорости сигнала.

Из (2.8) следует, что сигнал представляет собой монохроматическую волну. Для такой плоской волны поверхность постоянной фазы есть плоскость, которая движется с фазовой скоростью, не зависящей от частоты. Движение волновой поверхности происходит в направлениях четырёх векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$. Такое количество векторов, концы которых находятся в начале координат, является минимальным для образования в 3-мерном пространстве замкнутой волновой поверхности в виде четырехгранника.

Равенство 1. Выполняется равенство

$$\frac{1}{4}\left(-\varepsilon_i + \varepsilon_i^1 + \varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^3\right) = 0, \tag{2.9}$$

которое является следствием соотношений (2.2), (2.8) и означает линейную зависимость векторов

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n. \tag{2.10}$$

Далее рассмотрим две инерциальные системы отсчетов (K) и (K'), которые совпадают. Тогда используем равенства $T = T'$ и $T^n = T'^n$ и имеем

$$t - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon x})}{c} = t' - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon x}')}{c}, \quad t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^n \boldsymbol{x})}{c} = t' + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^n \boldsymbol{x}')}{c}. \tag{2.11}$$

Складывая равенства (2.11), получим $t' = t$, а для координат находим

$$\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{\varepsilon x}\right) + \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n\left(\boldsymbol{\varepsilon}^n \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{\varepsilon x}'\right) + \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n\left(\boldsymbol{\varepsilon}^n \boldsymbol{x}'\right). \tag{2.12}$$

Поскольку $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$, то необходимо следующее дополнительное требование.

Равенство 2. Выполняется равенство

$$\frac{1}{4}\left(\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_i^1\varepsilon_j^1 + \varepsilon_i^2\varepsilon_j^2 + \varepsilon_i^3\varepsilon_j^3\right) = \delta_{ij}, \tag{2.13}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера (или единичная трехмерная матрица).

Используя (2.13), приведем соотношения для характеристик в различных системах отсчетов

$$t^2 + \boldsymbol{x}^2/c^2 = \frac{1}{4}\left(T^2 + \sum_n^3 (T^n)^2\right), \quad t'^2 + \boldsymbol{x}'^2/c^2 = \frac{1}{4}\left(T'^2 + \sum_n^3 (T'^n)^2\right) \tag{2.14}$$

и перепишем (2.8) в матричном виде $\mathbf{T} = \mathbf{HX}$, где

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_x & -\varepsilon_y & -\varepsilon_z \\ 1 & \varepsilon_x^1 & \varepsilon_y^1 & \varepsilon_z^1 \\ 1 & \varepsilon_x^2 & \varepsilon_y^2 & \varepsilon_z^2 \\ 1 & \varepsilon_x^3 & \varepsilon_y^3 & \varepsilon_z^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T \\ T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} t \\ x/c \\ y/c \\ z/c \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Воспользуемся результатом произведения матриц $\mathbf{HH}^T$ (где $\mathbf{H}^T$ – транспонированная матрица). Соотношения (2.14) справедливы тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия

$$1-(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^n)=0, \quad 1+(\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{\varepsilon}^r)=0 \quad (n\neq r), \quad 1+\boldsymbol{\varepsilon}^2=1+(\boldsymbol{\varepsilon}^n)^2=4. \tag{2.16}$$

Модуль векторов равен $|\boldsymbol{\varepsilon}|=|\boldsymbol{\varepsilon}^n|=\sqrt{3}$, а $\mathbf{HH}^T=4\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ – единичная четырехмерная матрица). Равенства (2.16) означают,что имеет место произвольно ориентированный правильный четырехгранник или координатный тетраэдр. Объем такого координатного тетраэдра с вершинами на концах четырех векторов $(-\boldsymbol{\varepsilon})$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ принимает значение $V_{tetr}=\det\mathbf{H}/6=(\boldsymbol{\varepsilon}^1[\boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{\varepsilon}^3])/3$, равное трети объема параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах $\boldsymbol{\varepsilon}^1$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3$. Волновая поверхность представляет собой другой координатный тетраэдр с четырьмя гранями, перпендикулярными векторам $(-\boldsymbol{\varepsilon})$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$.

Далее получим, согласно (2.2), (2.8), (2.9), (2.13) и (2.14), следующие соотношения

$$\begin{gathered}
t^2+\boldsymbol{x}^2/c^2=\frac{1}{4}\sum_m^4(T^m)^2, \\
\boldsymbol{x}/c=\frac{1}{4}\sum_m^4\boldsymbol{\varepsilon}^mT^m, \quad t=\frac{1}{4}\sum_m^4T^m, \quad \frac{1}{4}\sum_m^4\varepsilon_i^m=0, \quad \frac{1}{4}\sum_m^4\varepsilon_i^m\varepsilon_j^m=\delta_{ij}, \\
3t^2-\boldsymbol{x}^2/c^2=\frac{1}{2}(T_1T_2+T_1T_3+T_1T_4+T_2T_3+T_2T_4+T_3T_4), \\
\boldsymbol{u}=c\frac{\sum_m^4\boldsymbol{\varepsilon}^mT^m}{\sum_m^4T^m}, \quad |\boldsymbol{u}|=\sqrt{\boldsymbol{u}^2}=c\left[\frac{\frac{1}{4}\sum_m^4(T^m)^2}{\left(\frac{1}{4}\sum_m^4T^m\right)^2}-1\right]^{1/2},
\end{gathered} \tag{2.17}$$

выраженные через моменты времени $T^m=t+\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{x}$ $(m=1,2,3,4)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^m\to(-\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^n)$. Поскольку $T^m\geq 0$, справедливо условие $1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})/c\geq 0$ со знаком равенства при движении на характеристиках. В (2.17) имеем квадратичную форму от проективных однородных координат, значения компонент радиус-вектора, координатного времени, координатной скорости сигнала и её модуля. При равенстве единице квадратичная форма определяет гиперповерхность второго порядка в пространстве-времени, пересекающую все четыре характеристики (2.8) для сигнала. Любые две строки матрицы $\mathbf{H}$ ортогональны в четырёхмерном евклидовом пространстве с галилеевыми координатами $\{ct,\boldsymbol{x}\}$. Таким образом, величины T^m линейной вектор-функции первого рода дают четыре оси рассматриваемой гиперповерхности. Рассматриваемый координатный тетраэдр есть граничный тетраэдр некоторого правильного тела в четырехмерном евклидовом пространстве. Известно, что таких тел, ограниченных трехмерными тетраэдрами имеется три.

Определение 4. Собственное время в точке $\{x,y,z\}$ определяется метрической функцией (1.3) в обобщенном виде

$$\begin{gathered}
T_0=\frac{F}{c}=\prod_m^4(T^m)^{p^m}=\left[(T)^{1+(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{r})}(T^1)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{r})}(T^2)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{r})}(T^3)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^3\boldsymbol{r})}\right]^{1/4}= \\
=\left\{\left[t-\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{x})}{c}\right]^{1+(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{r})}\left[t+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{x})}{c}\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{r})}\left[t+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{x})}{c}\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{r})}\left[t+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^3\boldsymbol{x})}{c}\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^3\boldsymbol{r})}\right\}^{1/4}.
\end{gathered} \tag{2.18}$$

Здесь вектор-параметр $\boldsymbol{r}=\{r_1,r_2,r_3\}$ имеет постоянное значение в величинах

$p^m = (1/4)\,[1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})]$, для которых выполняются равенства

$$\frac{1}{4}\left(1+\boldsymbol{r}^2\right)=\sum_m^4 \left(p^m\right)^2, \quad -\boldsymbol{r}=\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m p^m, \quad 1=\sum_m^4 p^m. \tag{2.19}$$

При значении $F = 0$ уравнение (2.18) представляет собой уравнение гиперповерхности с четырьмя характеристиками в пространстве-времени. Это означает наличие четырех вещественных корней для времени t.

Отметим также работы [12 – 16], в которых приводится один из вариантов обоснования финслеровой геометрии, исходя из отношения одновременности [17, 18], устанавливаемого световым сигналом, при котором физическая скорость распространения волновой поверхности анизотропна в прямом и обратном направлениях.

3. Преобразования проективных однородных координат

Рассмотрим преобразования проективных однородных координат при переходе между инерциальными системами отсчетов (K) и (K'), движущимися с относительными скоростями $\boldsymbol{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ и $\boldsymbol{v}' = \left\{v'_x, v'_y, v'_z\right\}$, соответственно. Скорости $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ с $c = 1$ выражаются в масштабных единицах систем отсчетов, согласно принципу относительности. Преобразования оставляет форм-инвариантным метрическую функцию (2.18) в глобальной геометрии и объем координатного тетраэдра. При переходе к локальной финслеровой геометрии проективные однородные координаты заменяются на их дифференциалы, а вектора $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ являются постоянными величинами и имеем

$$\left\{\prod_m^4 \left[dt+(\boldsymbol{\varepsilon}^m d\boldsymbol{x})\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})}\right\}^{1/4}=\left\{\prod_m^4 \left[dt'+(\boldsymbol{\varepsilon}^m d\boldsymbol{x}')\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})}\right\}^{1/4}. \tag{3.1}$$

Обобщая метод коэффициента "k", ранее использованный для случая одной пространственной координаты [12 – 16], запишем соотношения $T^m = k^m(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})\,T'^m$ и $T'^m = k^m(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r})\,T^m$ так

$$\begin{aligned}
&[t+(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x})]=k^m(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})\,[t'+(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}')],\\
&[t'+(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}')]=k^m(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r})\,[t+(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x})],
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где коэффициенты $k^m(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})$ и $k^m(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r})$ характеризуют эффекты Допплера изменения частот ω^m и ω'^m плоской волны по четырем выделенным направлениям

$$\omega^m k^m(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})=\omega'^m, \quad \omega'^m k^m(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r})=\omega^m \tag{3.3}$$

и удовлетворяют условиям

$$\prod_m^4 \left[k^m(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})}=\prod_m^4 \left[k^m(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r})\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})}=1, \quad k^m(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})\,k^m(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r})=1.$$

При $\boldsymbol{x}' = 0$ имеем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}t$, а при $\boldsymbol{x} = 0$, соответственно, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{v}'t'$. Следовательно, из (2.18) и (3.2) вытекают следующие равенства

$$\begin{aligned}
&t=t'N(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r}), \quad k^m(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r})\,t=[1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')]\,t',\\
&t'=tN(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}), \quad k^m(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})\,t'=[1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})]\,t.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь введены выражения с трехмерными скоростями

$$
\begin{gathered}
\frac{T_0}{t} = N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) = \frac{N(\boldsymbol{v})}{A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})} = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})]^{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})} \right\}^{1/4}, \\
\frac{T_0}{t'} = N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r}) = \frac{N(\boldsymbol{v}')}{A(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})} = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')]^{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})} \right\}^{1/4}, \\
N(\boldsymbol{v}) = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})] \right\}^{1/4}, \quad N(\boldsymbol{v}') = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')] \right\}^{1/4}, \\
A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) = \prod_m^4 \left[\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})}{N(\boldsymbol{v})} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})/4}, \quad A(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r}) = \left\{ \prod_m^4 \left[\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')}{N(\boldsymbol{v}')} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})/4} \right\},
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

где множители $A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})$, $A(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})$ зависят от вектора $\boldsymbol{r}$ и $N(\boldsymbol{v}) = N(\boldsymbol{v}, 0)$.

В результате из (3.4) получим значения коэффициентов и соответствующие тождества

$$
\begin{gathered}
k^m(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})}{N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})}, \quad k^m(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r}) = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')}{N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})}, \quad \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})}{N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})} \cdot \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')}{N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})} = 1, \\
\left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})]^2 \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{1 + \boldsymbol{v}^2}}{N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})}, \quad \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})]^2 \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{1 + \boldsymbol{v}'^2}}{N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})}, \\
\frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})}, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r}) = \frac{1}{N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})},
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

в которые входят относительные скорости систем (K) и (K').

Прямые и обратные преобразования характеристик (3.2) примут вид

$$
\begin{gathered}
[t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x})] = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})}{N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})} [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}')] = \frac{N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')} [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}')], \\
[t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}')] = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')}{N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})} [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x})] = \frac{N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})} [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x})],
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

а из (3.3) получим формулы для эффекта Доплера

$$
\omega'^m = \frac{A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})]}{N(\boldsymbol{v})} \omega^m, \quad \omega^m = \frac{A(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r}) [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')]}{N(\boldsymbol{v}')} \omega'^m,
\tag{3.8}
$$

с относительными скоростями движения источника и приемника сигналов в соответствии с принципом относительности.

В дополнение к равенству

$$
\frac{t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x})}{t + (\boldsymbol{\varepsilon}^k \boldsymbol{x})} = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^k \boldsymbol{v})} \cdot \frac{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}')}{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^k \boldsymbol{x}')},
\tag{3.9}
$$

вытекающему из (3.7), имеем с учетом линейной зависимости векторов (2.10) соотношения для взаимосвязи скоростей

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})} = \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})} = \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')} = \frac{1}{1 + (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}')}, \\
1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}') = \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})} \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})} \right]^{-1},
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

$$1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}) = \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')} \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')} \right]^{-1},$$

где $1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}) \neq 0$ и $1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}') \neq 0$. Согласно (3.10), справедливы следующие формулы

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{v}' = \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})} \right]^{-1} = \left[-\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})} \right]^{-1}, \\
\boldsymbol{v} = \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')} \right]^{-1} = \left[-\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')} \right]^{-1}, \\
A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})\, A(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r}) = 1, \quad N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})\, N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r}) = N(\boldsymbol{v})\, N(\boldsymbol{v}').
\end{gathered} \tag{3.11}$$

Учитывая равенства (2.10) и (2.13) получим прямые преобразования

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{x} = \frac{A(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})}{N(\boldsymbol{v}/c)} \left[\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{v}t' + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}') \right] = \frac{N(\boldsymbol{v}'/c)}{4A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{v}'t')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')/c} \right], \\
t = \frac{A(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})}{N(\boldsymbol{v}/c)} \left[t' + \frac{1}{c^2} (\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}') \right] = \frac{N(\boldsymbol{v}'/c)}{4A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})} \sum_m^4 \frac{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}')/c}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')/c}
\end{gathered} \tag{3.12}$$

и обратные между системами отсчетов (K) и (K')

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{x}' = \frac{A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})}{N(\boldsymbol{v}'/c)} \left[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}'t + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}) \right] = \frac{N(\boldsymbol{v}/c)}{4A(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t)}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})/c} \right], \\
t' = \frac{A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})}{N(\boldsymbol{v}'/c)} \left[t + \frac{1}{c^2} (\boldsymbol{v}'\boldsymbol{x}) \right] = \frac{N(\boldsymbol{v}/c)}{4A(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})} \sum_m^4 \frac{t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x})/c}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})/c}
\end{gathered} \tag{3.13}$$

в масштабных единицах с $c \neq 1$ и в векторной форме I.

Пусть система отсчета (K') движется относительно (K) вдоль оси x со скоростью $\boldsymbol{v} = \{v_x, 0, 0\}$. Тогда из (3.13) следуют прямые преобразования координат и времени

$$\begin{gathered}
x = \frac{A(v_x/c, \boldsymbol{r})}{N(v_x/c)} \left[x' + v_x t' + \frac{v_x}{4c} \sum_m^4 (\varepsilon_x^m)^2 (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}') \right] = \frac{N(\boldsymbol{v}'/c)}{4A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}_x^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{v}'t')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')/c} \right], \\
y = \frac{A(v_x/c, \boldsymbol{r})}{N(v_x/c)} \left[y' + \frac{v_x}{4c} \sum_m^4 (\varepsilon_y^m \varepsilon_x^m)(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}') \right] = \frac{N(\boldsymbol{v}'/c)}{4A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}_y^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{v}'t')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')/c} \right], \\
z = \frac{A(v_x/c, \boldsymbol{r})}{N(v_x/c)} \left[z' + \frac{v_x}{4c} \sum_m^4 (\varepsilon_z^m \varepsilon_x^m)(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}') \right] = \frac{N(\boldsymbol{v}'/c)}{4A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}_z^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{v}'t')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')/c} \right], \\
t = \frac{A(v_x/c, \boldsymbol{r})}{N(v_x/c)} \left[t' + \frac{v_x x'}{c^2} \right] = \frac{N(\boldsymbol{v}'/c)}{4A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})} \sum_m^4 \frac{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}')/c}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}')/c},
\end{gathered} \tag{3.14}$$

где

$$N(v_x/c) = \left[\prod_m^4 (1 + \varepsilon_x^m v_x/c) \right]^{1/4}, \quad A(v_x/c, \boldsymbol{r}) = \prod_m^4 \left[\frac{1 + \varepsilon_x^m v_x/c}{N(v_x/c)} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})/4}. \tag{3.15}$$

Скорость системы отсчета (K) относительно (K') равняется

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}' &= \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 + \varepsilon_x^m v_x/c} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + \varepsilon_x^m v_x/c} \right]^{-1} = \\
&= \left[-\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m \varepsilon_x^m v_x}{1 + \varepsilon_x^m v_x/c} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + \varepsilon_x^m v_x/c} \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

4. Закон композиции элементов группы координатных скоростей и его свойства

Рассмотрим закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей с $c = 1$. Воспользуемся равенством

$$N(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{r})\, t' = N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r})\, t, \quad N(0, \boldsymbol{r}) = 1, \tag{4.1}$$

вытекающим из определения метрической функции, и, учитывая (3.12) и (3.13), получим соотношения

$$\begin{gathered} N(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{r}) = \frac{N(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})\, N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}')}, \quad N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) = \frac{N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})\, N(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v})}, \\ N(\boldsymbol{v})\, N(\boldsymbol{v}') = [1 + (\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v})]\,[1 + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}')], \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}/t$ и $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{x}'/t'$ – координатные скорости движения тел в системах (K) и (K').

Закон композиции элементов группы в представлении группы в виде функции $k^m(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r})$ запишется, согласно (3.7) и (4.1), следующим образом

$$\begin{gathered} \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u})}{N(\boldsymbol{u})} = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})}{N(\boldsymbol{v})} \cdot \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}')}{N(\boldsymbol{u}')}, \\ A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) = A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})\, A(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{r}), \quad A(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{r}) = A(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{r})\, A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}). \end{gathered} \tag{4.3}$$

для функции, зависящей только от скорости, и функции $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r})$. Для обеих функций выполняется бинарная операция закона композиции как обычная операция умножения. Пусть $\boldsymbol{w}'$ есть скорость движения третьей инерциальной системы отсчета (K'') относительно второй (K'), а $\boldsymbol{z}''$ – относительно первой (K). Тогда получим операции умножения функций $k^m(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r})$ и, согласно (3.6), равенства

$$\begin{gathered} k^m(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) = k^m(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})\, k^m(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{r}), \quad k^m(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{r}) = k^m(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{r})\, k^m(\boldsymbol{u}'', \boldsymbol{r}), \\ k^m(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) = k^m(\boldsymbol{z}'', \boldsymbol{r})\, k^m(\boldsymbol{u}'', \boldsymbol{r}), \quad k^m(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})\, k^m(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{r}) = k^m(\boldsymbol{z}'', \boldsymbol{r}), \\ \frac{\frac{1}{4}\sum\limits_m^4 k^m(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r})}{\left\{\frac{1}{4}\sum\limits_m^4 [k^m(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r})]^2\right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \boldsymbol{u}^2}}, \\ \frac{\frac{1}{4}\sum\limits_m^4 k^m(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})\, k^m(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{r})}{\left\{\frac{1}{4}\sum\limits_m^4 [k^m(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})]^2\right\}^{1/2} \left\{\frac{1}{4}\sum\limits_m^4 [k^m(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{r})]^2\right\}^{1/2}} = \frac{1 + (\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}')}{\sqrt{1 + \boldsymbol{v}^2}\sqrt{1 + \boldsymbol{u}'^2}}, \end{gathered} \tag{4.4}$$

где имеем закон композиции элементов группы

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{u}', \quad \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{w}' \circ \boldsymbol{u}'', \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{z}'' \circ \boldsymbol{u}'', \quad \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{z}''. \tag{4.5}$$

Прямые и обратные преобразования безразмерных координатных трехмерных скоростей

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \frac{\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v} + \dfrac{1}{4}\sum\limits_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}'\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}\right)}{1 + \left(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}\right)} = \frac{\sum\limits_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \left[\dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{v}'\right)}{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}'\right)}\right]}{\sum\limits_m^4 \dfrac{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}'\right)}{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}'\right)}}, \\
\boldsymbol{u}' &= \frac{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}' + \dfrac{1}{4}\sum\limits_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}'\right)}{1 + \left(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'\right)} = \frac{\sum\limits_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \left[\dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\right)}{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}\right)}\right]}{\sum\limits_m^4 \dfrac{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}\right)}{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v}\right)}}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

в векторной форме I не зависят от вектор-параметра $\boldsymbol{r}$.

Таким образом, имеем неаддитивную группу элементов для координатных трехмерных скоростей, принадлежащих *только разным системам отсчётов*, с законом композиции, содержащим квадратичную нелинейность.

Формулы (4.6) есть дробно-линейные функции скоростей $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ и представляют собой прямые и обратные проективные (коллинеарные) преобразования неоднородных координат в проективной геометрии.

Рассмотрим основные свойства закона композиции $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 \circ \boldsymbol{u}_2$, не различая скорости в разных системах и относительные скорости между ними. Закон композиции

$$
\boldsymbol{u}_1 \circ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \circ \boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \dfrac{1}{4}\sum\limits_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_2\right)}{1 + \left(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\right)} \tag{4.7}
$$

имеет свойство коммутативности, то есть группа является абелевой.

Выполняются групповые аксиомы.

1. Ассоциативность:

$$
\begin{gathered}
\left(\boldsymbol{u}_1 \circ \boldsymbol{u}_2\right) \circ \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \circ \left(\boldsymbol{u}_2 \circ \boldsymbol{u}_3\right) = \Big\{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \frac{1}{4}\sum_m^4 \left[\boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_2\right) + \right. \\
\left. + \boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_2\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_3\right) + \boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_3\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_1\right)\right] + \frac{1}{4}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_2\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_3\right)\Big\} \times \\
\times \Big\{1 + \left(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\right) + \left(\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3\right) + \left(\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1\right) + \frac{1}{4}\sum_m^4 \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_2\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}_3\right)\Big\}^{-1}.
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

2. Единичный элемент: $\boldsymbol{u} \circ \mathbf{E} = \boldsymbol{u}$. Единичный элемент соответствует нулевому значению скорости.

3. Обратный элемент: $\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{u}^{-1} = \mathbf{E}$. Выражение обратного элемента равняется

$$
\boldsymbol{u}^{-1} = \left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}\right)}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{1}{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}\right)}\right]^{-1} = \left[-\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}\right)}{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}\right)}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{1}{1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}\right)}\right]^{-1} \tag{4.9}
$$

при дополнительных условиях $1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}\right) \neq 0$ и $1 + \left(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-1}\right) \neq 0$. Согласно (4.9) следует, что относительная скорость $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}^{-1}$ есть обратный элемент группы для относительной скорости $\boldsymbol{v}$, не равный противоположному элементу $(-\boldsymbol{v})$. Тогда закон композиции $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{u}'$ запишется в виде $\boldsymbol{u} = \left(\boldsymbol{v}'\right)^{-1} \circ \boldsymbol{u}'$. Это означает некоммутативность закона композиции трёхмерных скоростей, принадлежащих *только одной системе отсчёта* при замене $\boldsymbol{v}'$ на $\boldsymbol{u}'$, что также следует из (4.6). Обратный элемент (4.9) равен сумме векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^m$, умноженных на коэффициенты, зависящие от скорости $\boldsymbol{u}$.

Используя закон композиции и приведенные свойства, находим следующие равенства

$$1+\left(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-1}\right)=\left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{1}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{1}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}^{-1}\right)}\right]^{-1}=N\left(\boldsymbol{u}\right)N\left(\boldsymbol{u}^{-1}\right),$$

$$\frac{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^{-1}}{1+\left(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{-1}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{m}+\boldsymbol{u}}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{m}+\boldsymbol{u}^{-1}}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}^{-1}\right)},$$

$$\boldsymbol{u}=\left(\boldsymbol{u}^{-1}\right)^{-1}=\left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{m}}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}^{-1}\right)}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{1}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}^{-1}\right)}\right]^{-1},$$

$$N\left(\boldsymbol{u}\right)=\frac{N\left(\boldsymbol{u}_1\right)N\left(\boldsymbol{u}_2\right)}{1+\left(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\right)},$$

$$\frac{\boldsymbol{u}}{N\left(\boldsymbol{u}\right)}=\frac{\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\frac{1}{4}\sum\limits_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_2\right)}{N\left(\boldsymbol{u}_1\right)N\left(\boldsymbol{u}_2\right)},$$

$$\left[1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)\right]\left[1+\left(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\right)\right]=\left[1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_1\right)\right]\left[1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_2\right)\right],$$

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{u}_2^{-1}=\left\{\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{m}+\boldsymbol{u}}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_2\right)}+\frac{1}{4}\sum_{k}^{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\boldsymbol{u}_2\right)}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\boldsymbol{u}_2\right)}\right\}\left\{\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_2\right)}\right\}^{-1},\quad(4.10)$$

$$\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_1^{-1}\circ\boldsymbol{u}=\left\{\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{m}+u}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_1\right)}+\frac{1}{4}\sum_{k}^{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\boldsymbol{u}_1\right)}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\boldsymbol{u}_1\right)}\right\}\left\{\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)}{1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_1\right)}\right\}^{-1},$$

$$\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)=\boldsymbol{u},\quad\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)=\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{u},$$

$$\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_2\right)=\frac{1}{16}\sum_{k}^{4}\sum_{m}^{4}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_2\right)=\left(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\right),$$

$$\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}_2\right)=\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\boldsymbol{u}_1\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{k}\boldsymbol{u}_2\right)-\left(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\right),$$

$$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{\boldsymbol{u}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{u}\right)}.$$

Для векторов выделенных направлений, не являющихся элементами группы скоростей вследствие отсутствия обратных элементов, справедливо *только формальное равенство*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\circ\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{\varepsilon}^{m}=\boldsymbol{\varepsilon}^{m}.\tag{4.11}$$

Наконец, рассмотрим частный случай, когда закон композиции зависит только от значений неоднородных проективных координат. Необходимо, например, следующее дополнительное требование к **Равенствам 1 и 2**.

Равенство 3. Выполняется равенство

$$\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\varepsilon_i^{m}\varepsilon_j^{m}\varepsilon_r^{m}=\varepsilon_{ijr},\tag{4.12}$$

где ε_{ijr} – симметричный символ со свойствами $\varepsilon_{ijr}=1$ при $i\neq j\neq r$, а остальные значения являются нулевыми. Тогда, закон композиции векторов в координатном представлении имеет следующий вид

$$u_i = \left[u_{1i} + u_{pi} + \sum_{j,k}^{3} \varepsilon_{ijk} u_{1j} u_{2k} \right] \times \left[1 + \sum_{i,j}^{3} \delta_{ij} u_{1i} u_{2j} \right]^{-1}. \tag{4.13}$$

5. Угловая мера

Определение 5. Выражение аддитивной угловой меры равняется

$$\alpha^m (\boldsymbol{u}) = \ln \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u})}{N (\boldsymbol{u})}, \quad \alpha^m (0) = 0. \tag{5.1}$$

Согласно (3.6) и (5.1), имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \alpha^m (\boldsymbol{u}) = \alpha^m (\boldsymbol{u}_1) + \alpha^m (\boldsymbol{u}_2), \quad \sum_m^4 \alpha^m (\boldsymbol{u}) = 0, \\ \frac{1}{4} \sum_m^4 \exp \left[\alpha^m (\boldsymbol{u}) \right] = \frac{1}{N (\boldsymbol{u})}, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \exp \left[-\alpha^m (\boldsymbol{u}) \right] = \frac{1}{N (\boldsymbol{u}^{-1})}, \\ \alpha^m (\boldsymbol{u}^{-1}) = -\alpha^m (\boldsymbol{u}) = \ln \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u}^{-1})}{N (\boldsymbol{u}^{-1})}, \\ \boldsymbol{u} = \frac{\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m e^{\alpha^m (\boldsymbol{u})}}{\sum_m^4 e^{\alpha^m (\boldsymbol{u})}}, \quad \boldsymbol{u}^{-1} = \frac{\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m e^{-\alpha^m (\boldsymbol{u})}}{\sum_m^4 e^{-\alpha^m (\boldsymbol{u})}}. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Определение 6. Вектор-параметр $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ угловой меры определяется так

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{4} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \alpha^m (\boldsymbol{u}). \tag{5.3}$$

Учитывая (2.15), (3.5) и (5.2), получим равенства для угловой меры и соотношения

$$\begin{gathered} \alpha^m (\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta}), \quad (\boldsymbol{r\beta}) = \ln A (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) = \ln \prod_m^4 \left[\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{u})}{N (\boldsymbol{u})} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r})/4}, \quad \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{u}'), \\ t - (\boldsymbol{rx}) / c = \sum_m^4 T^m p^m, \quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{r} ct - \frac{1}{4} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}) (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{r}) = c \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m T^m p^m, \\ (\boldsymbol{u}/c) \circ (-\boldsymbol{r}) = \frac{\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m T^m p^m}{\sum_m^4 T^m p^m}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Преобразования характеристик (3.7) приобретут следующий вид

$$\begin{aligned} t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}) &= e^{(\boldsymbol{r\beta})} e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta})} \left[t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}') \right], \\ t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}') &= e^{(\boldsymbol{r\beta}')} e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta}')} \left[t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{x}) \right]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

В (5.5) выделен конформный множитель, зависящий от вектор-параметров $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{v}') = -\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{r}$.

Согласно (2.17) и (5.1), справедливы представления характеристик

$$\frac{T^m}{\left(\frac{1}{4}\sum_m^4 T^m\right)} = e^{\beta+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{\beta})}, \quad \frac{cT^m}{F} = e^{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{\beta})},$$
$$\frac{F}{\left(\frac{1}{4}\sum_m^4 cT^m\right)} = e^{\beta-(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\beta})}, \quad \beta = \ln N(\boldsymbol{u}). \tag{5.6}$$

Введем значения углов $\alpha_4 = -\alpha(\boldsymbol{v})$, $\alpha_n = \alpha^n(\boldsymbol{v})$ $(n = 1, 2, 3)$ и запишем, согласно (5.5), прямые преобразования координат и времени с $c \neq 1$ в векторной форме II

$$\boldsymbol{x} = e^{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\beta})}\left\{\frac{c}{4}\sum_n^3\left[e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{\beta})} + e^{-(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\beta})}\right]\boldsymbol{\varepsilon}^n t + \frac{1}{4}\sum_n^3\left[e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{\beta})}\boldsymbol{\varepsilon}^n + e^{-(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\beta})}\sum_k^3\boldsymbol{\varepsilon}^k\right](\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{x}')\right\},$$
$$t = e^{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\beta})}\left\{\frac{1}{4}\left[\sum_n^3 e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{\beta})} + e^{-(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\beta})}\right]t' + \frac{1}{4c}\sum_n^3\left[e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{\beta})} - e^{-(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\beta})}\right](\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{x}')\right\}. \tag{5.7}$$

Обратные преобразования имеют такой же вид при замене $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$, $t \to t'$ и $\boldsymbol{\beta} \to -\boldsymbol{\beta}$.

Из (5.2) и (5.3) вытекают выражение вектора трехмерной скорости $\boldsymbol{v}$ и вектор-параметра

$$\boldsymbol{v} = c\frac{\sum_n^3\boldsymbol{\varepsilon}^n\left[e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{\beta})} - e^{-(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\beta})}\right]}{\left[\sum_n^3 e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\beta)} + e^{-(\boldsymbol{\varepsilon}\beta)}\right]}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{4}\sum_n^3\boldsymbol{\varepsilon}^n\left[\alpha^n(\boldsymbol{u}) - \alpha(\boldsymbol{u})\right], \quad (\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\beta}) = \sum_n^3(\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{\beta}), \tag{5.8}$$

зависящие от рассматриваемых углов.

6. Энергия и импульс частицы

Приведем краткое рассмотрение движения частицы в инерциальной системе отсчета (K) и запишем при $c \neq 1$ функцию Лагранжа

$$L = -m_0c^2F(d\boldsymbol{x}/dt, \boldsymbol{r}) = -m_0c^2N(\boldsymbol{u}/c, r), \quad N(\boldsymbol{u}/c, \boldsymbol{r}) = \left\{\prod_m^4\left[1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})/c\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}\right\}^{1/4}. \tag{6.1}$$

Здесь выполняется условие $\boldsymbol{r} \neq -\boldsymbol{\varepsilon}^k$ при $m_0 \neq 0$, так как при равенстве $\boldsymbol{r}$ с вектором одного какого-либо выделенного направления $\boldsymbol{\varepsilon}^k$ из (6.1) вытекает функция Лагранжа $L = -m_0c^2\left[1 - (\boldsymbol{r}\boldsymbol{u})/c\right]$, которая линейно зависит от скорости.

Используя гамильтонов формализм, находим импульс и энергию частицы в векторных формах

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} = m_0cN(\boldsymbol{u}/c, \boldsymbol{r})\left[\frac{1}{4}\sum_m^4\boldsymbol{\varepsilon}^m\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{u}/c + \boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})/c}\right] =$$
$$= \frac{m_0c}{N(\boldsymbol{u}^{-1}/c, \boldsymbol{r})}\left[-\boldsymbol{u}^{-1}/c + \boldsymbol{r} + \frac{1}{4c}\sum_m^4\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u}^{-1})(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})\right], \tag{6.2}$$
$$E = (\boldsymbol{p}\boldsymbol{u}) - L = m_0c^2N(\boldsymbol{u}/c, \boldsymbol{r})\left[\frac{1}{4}\sum_m^4\frac{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})/c}\right] = \frac{m_0c^2}{N(\boldsymbol{u}^{-1}/c, \boldsymbol{r})}\left[1 - (\boldsymbol{u}^{-1}\boldsymbol{r})/c\right],$$

Будем различать три частных случая. В первом при $\boldsymbol{p} = 0$ имеет место $E = m_0c^2N(-\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})$ для движущейся частицы со скоростью $\boldsymbol{u} = -c\boldsymbol{r}$. Второй случай при $\boldsymbol{r} = 0$ соответствует обобщенной метрической функции Бервальда-Моора.

Для подобного пространства-времени имеем значения $\boldsymbol{p} = -m_0\boldsymbol{u}^{-1}/N(\boldsymbol{u}^{-1}/c)$ и $E = m_0c^2/N(\boldsymbol{u}^{-1}/c)$. Если $\boldsymbol{u} = 0$, то в третьем случае получим значения энергии $E_0 = m_0c^2$, импульса $\boldsymbol{p}_0 = m_0c\boldsymbol{r}$ и вектор-параметра $c\boldsymbol{p}_0/E_0 = \boldsymbol{r}$ покоящейся частицы, отмеченные в работе [10]. Отметим также наличие собственного момента импульса $\mathbf{M}_0 = m_0c\,[\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}]$ покоящейся частицы, который изменяется при преобразованиях (3.12). В общем случае выражения (6.2) с учетом (4.10) дают соотношения

$$\begin{aligned} E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}) &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u}^{-1})/c}{N(\boldsymbol{u}^{-1}/c, \boldsymbol{r})}\left[E_0 - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}_0)\right], \\ E_0 - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}_0) &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})/c}{N(\boldsymbol{u}/c, \boldsymbol{r})}\left[E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})\right], \end{aligned} \tag{6.3}$$

из которых вытекают энергия, импульс покоящейся частицы и вектор-параметр

$$\begin{gathered} E_0 = \frac{E - (\boldsymbol{p}\boldsymbol{u})}{N(\boldsymbol{u}/c, \boldsymbol{r})}, \quad \boldsymbol{p}_0 = \frac{1}{N(\boldsymbol{u}/c, \boldsymbol{r})}\left[\boldsymbol{p} - E\boldsymbol{u}/c^2 + \frac{1}{4c}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})\right], \\ \boldsymbol{r} = \frac{c\boldsymbol{p}_0}{E_0} = \frac{\left[\boldsymbol{p} - E\boldsymbol{u}/c^2 + \frac{1}{4c}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})\right]}{E - (\boldsymbol{p}\boldsymbol{u})}. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Согласно (6.3) справедлива следующая формула

$$\left\{\prod_m^4 \left[E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}\right\}^{1/4} = m_0c^2\left\{\prod_m^4 \left[1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}\right\}^{1/4} \tag{6.5}$$

взаимосвязи энергии и импульса, а также значения скоростей

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{p}} = c\sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(1 - \boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}{E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})}\left[\sum_m^4 \frac{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}{E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})}\right]^{-1}, \\ \frac{c^2\boldsymbol{p}}{E} &= \left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})/c}\right]\left[\sum_m^4 \frac{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})/c}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Представим (6.3) в общем виде

$$\begin{aligned} E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}) &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{v}')/c}{N(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})}\left[E' - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}')\right] = \frac{N(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{v})/c}\left[E' - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}')\right], \\ E' - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}') &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{v})/c}{N(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})}\left[E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})\right] = \frac{N(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{v}')/c}\left[E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})\right], \end{aligned} \tag{6.7}$$

где используются коэффициенты $k^m(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})$ и $k^m(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})$. Тогда из (6.7) получим прямые преобразования энергии и импульса между инерциальными системами отсчётов (K) и (K') в векторной форме I

$$\begin{gathered} \boldsymbol{p} = \frac{A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})}{N(\boldsymbol{v}'/c)}\left[\boldsymbol{p}' - \frac{E'\boldsymbol{v}'}{c^2} + \frac{1}{4c}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m v')(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}')\right] = \frac{N(\boldsymbol{v}/c)}{4A(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m\left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{p}' + E'\boldsymbol{v}/c^2)}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{v})/c}\right], \\ E = \frac{A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})}{N(\boldsymbol{v}'/c)}\left[E' - (\boldsymbol{v}'\boldsymbol{p}')\right] = \frac{N(\boldsymbol{v}/c)}{4A(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})}\sum_m^4 \frac{E' - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{v})/c}, \end{gathered} \tag{6.8}$$

которые оставляют форм-инвариантным соотношение (6.5). Обратные преобразования, вытекающие из (6.8), имеют такой же вид при замене $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}'$, $E \to E'$ и $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}'$.

Введем в пространстве с координатами $\{E, c\boldsymbol{p}\}$ четыре характеристики $E^m = E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{p})$, для которых справедливы соотношения

$$E^2 + c^2\boldsymbol{p}^2 = \frac{1}{4}\sum_m^4 (E^m)^2, \quad E = \frac{1}{4}\sum_m^4 E^m, \quad -\boldsymbol{p} = \frac{1}{4c}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m E^m, \quad -\frac{c\boldsymbol{p}}{E} = \frac{\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m E^m}{\sum_m^4 E^m}. \tag{6.9}$$

В (6.9) имеем квадратичную форму, которая при равенстве значению $(m_0c^2)^2$ определяет гиперповерхность второго порядка, пересекающую все четыре характеристики. Величины E^m линейной вектор-функции первого рода дают четыре оси рассматриваемой гиперповерхности.

Преобразования (3.12) и (6.8) также вытекают из инвариантности соотношения для характеристик $E^mT^m = E'^mT'^m$, записанного в форме

$$[E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})]\,[t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{x})/c] = [E' - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p}')]\,[t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{x}')/c]\,. \tag{6.10}$$

Согласно (5.5) из (6.10) получим преобразования с угловой мерой

$$E^m = e^{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\beta}')}e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{\beta}')}E'^m, \quad E'^m = e^{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\beta})}e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{\beta})}E^m. \tag{6.11}$$

Из преобразований (6.2), (6.4) и (6.8) находим законы композиции элементов группы с $c \neq 1$

$$\begin{gathered}(-c\boldsymbol{p}/E) = (\boldsymbol{u}^{-1}/c)\circ(-\boldsymbol{r}), \quad (-\boldsymbol{r})^{-1} = (-c\boldsymbol{p}/E)^{-1}\circ(\boldsymbol{u}^{-1}/c),\\ (-c\boldsymbol{p}/E) = (\boldsymbol{v}'/c)\circ(-c\boldsymbol{p}'/E'), \quad (-c\boldsymbol{p}'/E') = (\boldsymbol{v}/c)\circ(-c\boldsymbol{p}/E),\\ (-\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{u}/c)\circ(-c\boldsymbol{p}/E) = (\boldsymbol{u}'/c)\circ(-c\boldsymbol{p}'/E').\end{gathered} \tag{6.12}$$

Следовательно, безразмерные скорости $\boldsymbol{u}/c$, $(-c\boldsymbol{p}/E)$ и вектор-параметр $(-\boldsymbol{r})$ являются равноправными элементами группы трехмерных скоростей и справедливы следующие условия $1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})\,c/E \geq 0$, $1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r}) > 0$. Последнее равенство в (6.12) означает инвариантность вектор-параметра $\boldsymbol{r}$, что и следовало ожидать.

Для частицы с $m_0 = 0$ из (6.3) следует равенство $E = c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})$ и, с учетом (4.11) и (6.12), имеют место соотношения

$$\begin{gathered}-\boldsymbol{u}^{-1} = \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{\varepsilon}^k, \quad \boldsymbol{p} = mc\boldsymbol{r}\,(1+\boldsymbol{r}^2), \quad E = mc^2\,(1+\boldsymbol{r}^2),\\ m = \lim_{\substack{m_0\to 0\\ \boldsymbol{u}\to c\boldsymbol{\varepsilon}^k}} \frac{m_0}{N(\boldsymbol{u}/c, \boldsymbol{r})}, \quad \boldsymbol{p} = \frac{E\boldsymbol{r}}{c}, \quad E = mc^2\left(1 + \frac{c^2\boldsymbol{p}^2}{E^2}\right).\end{gathered} \tag{6.13}$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ совпадает с фиксированным значением вектора выделенного направления и m есть масса "фотона" в финслеровом пространстве-времени.

Согласно (4.10) выпишем некоторые соотношения

$$\begin{gathered}EN(-c\boldsymbol{p}/E, r) = m_0c^2N(-\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}), \quad N(0, \boldsymbol{r}) = 1,\\ N(-c\boldsymbol{p}/E) = \left\{\prod_m^4 [1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})\,c/E]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}\right\}^{1/4}, \quad N(-\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = \left\{\prod_m^4 [1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}\right\}^{1/4},\\ 1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r}) = \frac{[1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})/c]\,[E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})]}{E - (\boldsymbol{u}\boldsymbol{p})},\end{gathered} \tag{6.14}$$

$$\frac{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}{N(-\boldsymbol{r})}=\frac{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{u})/c}{N(\boldsymbol{u}/c)}\cdot\frac{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{p})\,c/E}{N(-\boldsymbol{p}c/E)},\quad N(-\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})=\frac{N(\boldsymbol{u}/c,\boldsymbol{r})\,N(-c\boldsymbol{p}/E,\boldsymbol{r})}{1-(\boldsymbol{u}\boldsymbol{p})/E}.$$

Имеют место также выражение для обратного элемента вектор-параметра

$$(-\boldsymbol{r})^{-1}=\left[\frac{1}{4}\sum_m^4\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4\frac{1}{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{4}\sum_m^4\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4\frac{1}{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}\right]^{-1}\qquad(6.15)$$

и следующие равенства

$$\begin{gathered}\ln T_0=\sum_m^4 p^m\ln T^m,\quad \ln N(-\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})=\sum_m^4 p^m\ln p^m,\\ T_0=\lim_{q\to0}N_q(T),\quad N(-\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})=\lim_{q\to0}N_q(p),\\ N_q(T)=\left\{\sum_m^4(T^m)^q p^m\right\}^{1/q},\quad N_q(p)=\left\{\sum_m^4(p^m)^{q+1}\right\}^{1/q},\\ \frac{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}{N(-\boldsymbol{r})}\cdot\frac{1+\left[\boldsymbol{\varepsilon}^m(-\boldsymbol{r})^{-1}\right]}{N\left[(-\boldsymbol{r})^{-1}\right]}=1,\\ \prod_m^4\left[t+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{x})/c\right]^{\frac{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{r})}{N(-\boldsymbol{r})}}=\prod_m^4\left[t+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{x})/c\right]^{\frac{N\left[(-\boldsymbol{r})^{-1}\right]}{1+\left[\boldsymbol{\varepsilon}^m(-\boldsymbol{r})^{-1}\right]}}.\end{gathered}\qquad(6.16)$$

При вероятностной трактовке величины p^m интерпретируются как распределение вероятностей, а T^m – как случайные величины, характеризующие объект геометрии. Тогда функция $N_q(T)$ для значения $1\le q<\infty$ есть выражения полунормы [19]. Для полунормы допустимо $N_q(T)=0$ при $T\neq0$. Этим свойством полунорма отличается от нормы $N_2(T)=\left\{\sum_m^4(T^m)^2p^m\right\}^{1/2}$ при $q=2$. Если $\boldsymbol{r}=0$, то имеем равновероятное распределение $p^m=1/4$.

Наконец, представим сигнал для установления отношения одновременности (2.2) в виде плоской волны де Бройля в нормальной форме

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=A\exp i[Et-(\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})]/\hbar=A\exp i\omega\left[t-(\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})/\omega\right],\qquad(6.17)$$

где A – амплитуда, $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор, $E=\hbar\omega$ и $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$. Согласно (6.10) величина

$$\varphi=\frac{[Et-(\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})]}{\hbar}=\frac{1}{4\hbar}\sum_m^4E^mT^m=\frac{1}{4\hbar}\sum_m^4E'^mT'^m\qquad(6.18)$$

есть форм-инвариантная фаза волны.

Для частицы с $\boldsymbol{p}=0$ и $\boldsymbol{u}=0$ имеем, соответственно, волны в формах

$$\begin{gathered}\psi(\boldsymbol{x},t)=A\exp i[Et]/\hbar=A\exp\left[i\omega_0tN(-\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})\right],\quad \omega_0=m_0c^2/\hbar,\\ \psi(\boldsymbol{x},t)=A\exp i[E_0t-(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{x})]/\hbar=A\exp i\omega_0\left[t-(\boldsymbol{r}\boldsymbol{x})/c\right].\end{gathered}\qquad(6.19)$$

Волновая функция в обобщенном пространстве-времени Бервальда-Моора с $\boldsymbol{r}=0$ удовлетворяет, согласно (6.5), следующему уравнению в операторном виде

$$\left\{\prod_m^4\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\varepsilon}^m\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\right]\right\}\psi(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{m_0c^2}{\hbar}\right)^4\psi(\boldsymbol{x},t).\qquad(6.20)$$

7. Обсуждение

В работе приводятся *Определения*, на основе которых строится теория анизотропного финслерова пространства-времени. Рассмотрим некоторые выводы, вытекающие из полученных результатов.

Используем значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon} = (-1,-1,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (-1,1,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (1,-1,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = (-1,-1,1)$ для специально ориентированного координатного тетраэдра, введенные в работах [6−9] и удовлетворяющие *Равенствам 1–3*. В результате симметричная матрица H в (2.15) есть матрица Адамара порядка 4 с элементами равными числам ± 1

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = 1. \tag{7.1}$$

Матрица Адамара находится методом Сильвестра рекуррентным вычислением из матриц $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ и широко используется в теории информации. Поскольку первая строка и первый столбец состоят из чисел $+1$, то имеем нормализованную матрицу Адамара. Причём элементы строк матрицы являются дискретными значениями ортогональных функций Уолша.

Из (3.12), (3.13) и (4.6) получим известные прямые и обратные преобразования проективных однородных и неоднородных координат для метрических функций (1.2) и (1.3), зависящие только от компонент относительных скоростей. Из (6.2) и (6.5) вытекают известные соотношения для энергии и импульса [10]. Например, из (3.14) вытекают следующие прямые преобразования

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{1+v_x/c}{1-v_x/c}\right)^{r_1/2} \frac{x' + v_x t'}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}, \quad t = \left(\frac{1+v_x/c}{1-v_x/c}\right)^{r_1/2} \frac{t' + (v_x/c^2)\, x'}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}, \\ y &= \left(\frac{1+v_x/c}{1-v_x/c}\right)^{r_1/2} \frac{y' + (v_x/c)\, z'}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}, \quad z = \left(\frac{1+v_x/c}{1-v_x/c}\right)^{r_1/2} \frac{z' + (v_x/c)\, y'}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}, \end{aligned} \tag{7.2}$$

которые при $r_1 = 0$ совпадают с известными [9]. Компоненты вектор-параметра угловой меры $\boldsymbol{\beta}$ равняются значениям групповых параметров и аргументов, введенных в работах [7, 8], а выражение β – соответствующему ему значению из работы [8]. Из (6.8) получим известные преобразования импульса и энергии [10], записанные в другой форме.

При формальном пределе $c \to \infty$ из (3.12), (3.13) и (4.6) получим прямые и обратные преобразования Галилея

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{v}t', \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t, \quad t' = t \tag{7.3}$$

и закон композиции в абелевой группе трёхмерных скоростей

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}. \tag{7.4}$$

Здесь имеем относительную скорость $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}^{-1} = -\boldsymbol{v}$, вытекающую из (3.11), а для (7.4) выполняются групповые аксиомы.

Исследуем эффекты, связанные с изменением хода времени. Запишем преобразование времени (3.13) так

$$t' = \frac{A(\boldsymbol{v}'/c, \boldsymbol{r})}{N(\boldsymbol{v}'/c)} \left[t + \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}'\boldsymbol{x})\right] = \frac{N(\boldsymbol{v}/c)}{A(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})} \left[t + \frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t)}{c + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{v})}\right]. \tag{7.5}$$

При $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}t$ находим из (7.5), согласно (3.10), формулу для эффекта замедления времени

$$t' = \frac{N(\boldsymbol{v}/c)}{A(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})}\, t \tag{7.6}$$

в начале координат $\boldsymbol{x}' = 0$ системы отсчёта (K'), что согласуется с (3.4).

Пусть в системе отсчёта (K') два события, происходящие в начале координат и в точке $\boldsymbol{x}'$, произошли одновременно, то есть $\Delta t' = t'(\boldsymbol{x}') - t'(0) = 0$. Тогда с системе отсчёта (K) эти события являются неодновременными и из (7.5) вытекает формула для эффекта относительности одновременности

$$\Delta t = t(\boldsymbol{x}) - t(\boldsymbol{v}t) = -\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(\Delta\boldsymbol{x})}{c + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{v})} \tag{7.7}$$

в точках $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{v}t$ и $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$, где $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$. Эффект сокращения длины отрезков путей отражается в соотношении

$$\boldsymbol{x}' = \frac{N(\boldsymbol{v}/c)\,c}{4A(\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{r})}\sum_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^m\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m\Delta\boldsymbol{x})}{c + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{v})}. \tag{7.8}$$

Приведём краткое строгое кинематическое рассмотрение финслерового пространства-времени с сохранением преобразований (7.3) и (7.4) классической физики с абсолютной одновременностью разноместных событий.

Определение 7. Имеется единое время (или дается отношение одновременности событий) для точек O, A и A^n при выполнении условия

$$\sum_{m}^{4} c^m(T^m - t) = 0, \tag{7.9}$$

где c^m есть скорость сигнала в направлениях выделенных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ $\left(\sum\limits_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^m = 0\right)$ инерциальной системы отсчёта (K).

Длины отрезков путей, проходимых сигналом, есть величины $(\boldsymbol{\varepsilon}^m x)$ и для характеристик имеем следующие равенства

$$T^m = t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{x})}{c^m}. \tag{7.10}$$

Определение 8. Величина

$$c = \frac{1}{4}\sum_{m}^{4} c^m \tag{7.11}$$

является универсальной постоянной и определяет "среднюю" физическую скорость сигнала в различных инерциальных системах отсчётов.

Согласно (7.11), из (7.9) получим следующие соотношения

$$t = \frac{\sum\limits_{m}^{4} c^m T^m}{\sum\limits_{m}^{4} c^m} = \frac{1}{4c}\sum_{m}^{4} c^m T^m, \quad \boldsymbol{x}/c = \frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^m c^m T^m, \quad \boldsymbol{u} = c\,\frac{\sum\limits_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^m c^m T^m}{\sum\limits_{m}^{4} c^m T^m}. \tag{7.12}$$

Определение 9. Форм-инвариантная метрическая функция в локальной финслеровой геометрии определяется так

$$F=\left\{\prod_{m}^{4}\left[c^{m}dt+\boldsymbol{\varepsilon}^{m}d\boldsymbol{x}\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{r})}\right\}^{1/4}=\left\{\prod_{m}^{4}\left[c'^{m}dt'+\boldsymbol{\varepsilon}^{m}d\boldsymbol{x}'\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{r})}\right\}^{1/4} \tag{7.13}$$

и принадлежит классу функций (1.4).

Используем метод коэффициента "k" и запишем соотношения

$$t+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{x})}{c^{m}}=k^{m}\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}\right)\left[t'+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{x}')}{c'^{m}}\right],\quad t'+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{x}')}{c'^{m}}=k^{m}\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r}\right)\left[t+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{x})}{c^{m}}\right] \tag{7.14}$$

в векторных формах, где $k^{m}\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}\right)k^{m}\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r}\right)=1$. Подставим (7.14) в (7.13) и получим

$$\begin{gathered}\prod_{m}^{4}\left(c^{m}\right)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{r})}\prod_{m}^{4}\left[k^{m}\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}\right)\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{r})}=\prod_{m}^{4}\left(c'^{m}\right)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{r})},\\ \prod_{m}^{4}\left(c'^{m}\right)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{r})}\prod_{m}^{4}\left[k^{m}\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r}\right)\right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{r})}=\prod_{m}^{4}\left(c^{m}\right)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{r})}.\end{gathered} \tag{7.15}$$

Далее находим равенства, вытекающие из (7.13) и (7.14), при известных условиях $\boldsymbol{x}'=0$ при $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}t$ и $\boldsymbol{x}=0$ при $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{v}'t'$, а также дополнительном требовании об анизотропии скорости сигнала в движущейся системе отсчёта.

Определение 10. Линейная вектор-функция первого рода

$$c'^{m}=c^{m}+(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{v}) \tag{7.16}$$

является скоростью сигнала в системе (K'), зависящая от относительной скорости.

В итоге получим значения коэффициентов

$$k^{m}\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}\right)=1+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{v})}{c^{m}},\quad k^{m}\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r}\right)=1+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{v}')}{c'^{m}} \tag{7.17}$$

с $\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}$ и равенство $c'^{m}T'^{m}=c^{m}T^{m}$. Согласно (7.14), получим преобразования Галилея (7.3) и формулы для эффекта Допплера

$$\omega'^{m}=\left[1+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{v})}{c^{m}}\right]\omega^{m},\quad \omega^{m}=\left[1+\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\boldsymbol{v}')}{c'^{m}}\right]\omega'^{m} \tag{7.18}$$

по четырём выделенным направлениям.

При $c^{m}=c$ и использовании динамического обоснования трёх эффектов, отраженных в формулах (7.6) – (7.8), имеем равенство $c'^{m}=c$ и преобразования (3.12) для метрической функции (3.1). Такая интерпретация преобразований (3.12) согласуется с идеей неувлекаемого эфира классической физики с преобразованиями Галилея со скоростью сигнала (7.16) и дальнейшей их трансформацией.

Список литературы

[1] Poincare H. La mesure du temps // Rev. Metaphys. Mordle, 1898. V. 6. P. 1–13.

[2] Poincare H. Surla dynamique de l'ectron // Rend. Circolo Mat. Palermo. 1906. V. 21. P. 129–176.

[3] Minkowski H. I. "Raum und Zeit", address delivered at the 80th Assembly of German Scientiests and Physicians (Koln, 1908) //Phys. Ztscht. 1909. Bd. 10. P. 104–134.

[4] Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений, т. II. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 304 с.

[5] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гостехиздат, 1955. 241 с.

[6] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of the phase transitions in the geometric structure of space-time // Phys. Lett. A. 1998. V. 244. P. 222–226.

[7] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. Finslerian Spaces Possessing Local Relativistic Symmetry // Gen. Relativ. Grav. 1999. V. 31. No. 10. P. 1565–1603.

[8] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid // arXiv: gr-gc/0206004. 2002. V. 1. P. 1–16.

[9] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И. Понятие расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 1 (3). С. 1–15.

[10] Богословский Б. Ю. 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 2 (4). С. 27–43.

[11] Riemann B. Abhandlungen der Konigl. Gesellshaft d. Wissenshaften. Gottingen, 1867. V. 13. P. 14.

[12] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности и финслерова структура плоского анизотропного пространства-времени // Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та. 1992. Вып. 29. С. 64–71.

[13] Zaripov R. G. Clock Synchronization and Finsler Structure of a Flat Anisotropic Space-Time // Proceedings International Scientific Meeting PIRT-2003 "Physical Interpretations of Relativity Theory", Moscow, Liverpool, Sunderland, 2003. P. 241–248.

[14] Zaripov R. G. The Law of a Composition of Physical Velocities in Locally Anisotropic Finsler Space-Time// Proceedings International Scientific Meeting PIRT-2005 "Physical Interpretations of Relativity Theory", Moscow, Liverpool, Sunderland, 2005. P. 148–158.

[15] Зарипов Р. Г. Бинарная система чисел и финслерова геометрия локального анизотропного пространства-времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 1 (3). С. 47–60.

[16] Зарипов Р. Г. Синхронизация часов и финслерова геометрия локального анизотропного пространства-времени // Новейшие проблемы теории поля /Под ред. А.В. Аминовой. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 2006. Т. 5. С. 99–114.

[17] Зарипов Р. Г. К определению одновременности в специальной теории относительности //Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1978. Вып. 14–15. С. 60–69.

[18] Зарипов Р. Г. О физическом понятии отношения одновременности //Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1980. Вып. 17. С. 47–51.

[19] Зарипов Р. Г. Новые меры и методы в теории информации. – Казань: Изд-во Каз. гос. техн. ун-та, 2005. 364 с.