НЕЗАМКНУТОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В. Ф. Чуб

Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королева, г. Королев, Россия

Дается краткий теоретико-групповой сравнительный анализ трех теорий пространства-времени: (теории пространства-времени в рамках) классической механики Ньютона, специальной теории относительности и развитой автором теории, основанной на использовании кватернионов с комплексно-дуальными коэффициентами.

1. Введение

В работе обсуждается один из основных результатов статьи автора, опубликованной в журнале «Известия АН. Механика твердого тела» (2002), связанный с исследованием групповых свойств следующих физических преобразований: сдвигов (переносов, трансляций) пространства и времени, пространственных вращений (поворотов) и движений с постоянной скоростью (бустов), описываемых в рамках специальной теории относительности (СТО) и классической механики, соответственно, преобразованиями Лоренца и Галилея. Вышеупомянутый результат состоит в логической (математической) возможности построения новой теории пространства-времени на основе алгебры кватернионов с комплексно-дуальными коэффициентами и соответствующей «кватернионной группы».

Теоретико-групповые идеи играют основополагающую роль в геометрии и современной теоретической физике, а применение кватернионов представляет специальный интерес для журнала «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике». Автор надеется, что работа, носящая обзорно-методический характер, будет доступна широкому кругу читателей журнала, знакомых с основами теории групп и гиперкомплексных чисел.

2. Незамкнутость преобразований

Замкнутостью относительно операции называют *"свойство подгрупп (или алгебраических подструктур) группы (алгебраической структуры), состоящее в том, что результат операции, производимой над элементами подгруппы (подструктуры), также принадлежит подгруппе (подструктуре)"* [1, с. 254].

В основной части работы в качестве алгебраических структур будут использоваться только группы преобразований, а в качестве операции — только композиция (последовательное выполнение) преобразований. Соответственно, незамкнутостью назовем свойство подмножеств группы преобразований, состоящее в том, что результат композиции преобразований подмножества в общем случае не принадлежит подмножеству. В этом случае преобразования рассматриваемого подмножества не образуют группы (подгруппы исходной группы преобразований). Далее будет показано, что понятие незамкнутости допускает естественное расширение на случай пары подмножеств исходной группы преобразований.

Ниже приведены три таблицы, характеризующие свойства незамкнутости элементарных преобразований в рамках трех физических теорий пространства-времени, допускающих формулировку в рамках теоретико-группового подхода, т.е. свойства трех соответствующих фундаментальных групп преобразований:

- 10-параметрической группы Галилея;
- 10-параметрической группы Пуанкаре;
- 13-параметрической группы, исследуемой в работе [2].

	t	$\mathbf{r}$	ϑ	$\mathbf{v}$
t				$\mathbf{r}$
$\mathbf{r}$				
ϑ				
$\mathbf{v}$	$\mathbf{r}$			

	t	$\mathbf{r}$	ϑ	ψ
t				$\mathbf{r}$
$\mathbf{r}$				t
ϑ				
ψ	$\mathbf{r}$	t		ϑ

	t	$\mathbf{r}$	ϑ	ψ	φ
t					
$\mathbf{r}$				φ	
ϑ					
ψ		φ		ϑ	$\mathbf{r}$
φ				$\mathbf{r}$	

Здесь параметр:
t соответствует переносу (сдвигу, трансляции) во времени;
$\mathbf{r}$ — переносу в пространстве;
ϑ — повороту в пространстве;
ψ (для группы Галилея использован символ $\mathbf{v}$) — бусту;
φ (только для кватернионной теории) — векторному преобразованию, не получившему физической интерпретации в работе [2].

В каждой клетке таблицы (кроме левого столбца и верхней строки) стоит параметр преобразования, возникающего при сложении (перестановке) преобразований, характеризуемых параметрами, стоящими в начале строки и столбца, образующих эту клетку[1)]. Если новых типов преобразований не возникает, то клетка остается пустой.

3. Пояснения

Данные для заполнения таблиц взяты:

- Для кватернионной группы из формул пункта 2.4 статьи [2].
- Для группы Пуанкаре из формулы (ср. [3, с. 13]):

$$\mathrm{X}' = e^{\frac{\psi}{2}} \circ e^{i\frac{\vartheta}{2}} \circ \mathrm{X} \circ e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \circ e^{\frac{\psi}{2}} + t + \mathbf{r} \tag{1}$$

(где $\mathrm{X} = \tau + \rho$ и $\mathrm{X}' = \tau' + \rho'$ – координаты двух “точек”), обычным образом интерпретируемой (активная точка зрения) как преобразование геометрического объекта X типа “точка” под действием преобразования[2)] общего вида из группы Пуанкаре. Для получения, например, перестановочного соотношения для буста и пространственного переноса следует приравнять результат действия буста с последующим переносом результату действия переноса с последующим бустом:

$$e^{\frac{\psi}{2}} \circ \mathrm{X} \circ e^{\frac{\psi}{2}} + \mathbf{r} = e^{\frac{\psi}{2}} \circ (\mathrm{X} + \mathbf{r}' + t) \circ e^{\frac{\psi}{2}}$$

(легко убедиться, что параметр буста не изменяется, а без переноса во времени в общем случае не обойтись).

[1)] Некоторая избыточность информации, связанная с симметричностью таблиц, полезна для визуального отделения диагональных членов.

[2)] Повторное использование слова “преобразование” вряд ли может привести к недоразумениям (хотя, например, согласно работе [4], словосочетание “преобразование из группы Пуанкаре” следовало бы заменить на “переход из группы Пуанкаре”).

- Для группы Галилея из формулы (ср. [5, с. 11]):

$$\mathrm{X}' = e^{i\frac{\vartheta}{2}} \circ \mathrm{X} \circ e^{-i\frac{\vartheta}{2}} + t + \mathbf{r} + \tau\mathbf{v} \tag{2}$$

(где $\mathrm{X} = \tau + \rho$ и $\mathrm{X}' = \tau' + \rho'$), обычным образом интерпретируемой (активная точка зрения) как преобразование геометрического объекта X типа "точка" под действием преобразования общего вида из группы Галилея.

Заметим, что формула (2) получается из (1) не просто в первом порядке малости по параметру ψ (с заменой его на $\mathbf{v}$), но еще и в первом порядке малости по параметру $\frac{\rho}{\tau}$. Мы не будем останавливаться на формальном приеме введения константы, которая потом устремляется к бесконечности, часто используемом в учебниках по специальной теории относительности.

Таблицы для групп Пуанкаре и Галилея можно заполнить и на основании вида коммутаторов инфинитезимальных операторов соответствующих алгебр Ли[3]. Все необходимые формулы приведены также в пункте 2.5 статьи [2][4].

Из приведенных таблиц видно, что во всех трех группах есть подгруппы[5] движений пространства, соответствующие параметрам $\mathbf{r}$ и ϑ, (а также 7-параметрическая "группа Аристотеля"[6], соответствующая параметрам t, $\mathbf{r}$ и ϑ, отвечающая пустым квадратам 3×3 в верхних левых углах таблиц), т.е. есть и логическая возможность использовать бикватернионы Клиффорда [10, с. 67] для описания поворотов и переносов пространства во всех трех теориях.

4. Комментарии

Сделаем еще несколько замечаний по поводу выписанных таблиц.

Во-первых, понятие группы преобразований возникло и приобрело первостепенное значение в теоретической физике значительно позже механики Ньютона. Поэтому представления о пространстве-времени во времена Галилея и Ньютона были сформулированы отнюдь не в рамках теоретико-группового подхода [11]. В этом смысле и термин "группа Галилея" (или "галилей-ньютоновская группа") связан с некоторой "рациональной реконструкцией" истории механики. Однако, *"следует принять во внимание, что группы преобразований — один из наиболее естественных и универсальных инструментов исследования и классификации фундаментальных явлений в точном естествознании"* [8, с. 563].

Во-вторых, 3-параметрическая группа Галилея, элементы которой описывают в рамках механики Галилея-Ньютона переходы *"от одной системы координат к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой", "в механике Ньютона всегда стояла особняком"; "группа, отражающая свойства однородности времени и однородности и изотропности пространства*[7] *и группа Галилея*[8] *имеют независимое существование, и глубокая связь между ними*[9] *долгое время,*

---

[3] См., например, [6–8].

[4] Пользуясь случаем укажем, что выражение для $\mathbf{r}'$ в формулах (2.19) и (2.20) работы [2] выписано с ошибкой.

[5] Легко убедиться, выписав формулы полностью, что соответствующие подгруппы изоморфны.

[6] См. [9, с. 98]. Хотя, сравнив с указанной выше статьей [4], убедимся, что и здесь терминология неоднозначна.

[7] Описывается, соответственно, параметрами t, $\mathbf{r}$ и ϑ в наших обозначениях.

[8] Описывается параметрами $\mathbf{v}$ (тремя компонентами вектора скорости).

[9] Проявляющаяся, в частности, в непустоте выписанной нами таблицы для 10-параметрической группы Галилея.

вплоть до работ Пуанкаре и Минковского, по существу, не была установлена" [12, с. 13]. *"По существу говоря, фундаментальная группа классической механики, т.е. галилей-ньютоновская группа, как единая система преобразований, действующая на пространственно-временном многообразии, была открыта только после построения основ СТО"* [9, с. 77].

В-третьих, в специальной теории относительности переходы *"от одной системы координат к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой"* (которые в механике Ньютона образуют 3-параметрическую группу Галилея), вообще не образуют 3-параметрической группы[10)]. Поскольку в СТО указанные преобразования кратко называют бустами, то отмеченный факт естественно назвать незамкнутостью бустов[11)]. Следует отметить отсутствие единого общепринятого краткого термина для того физического преобразования, которое в механике Ньютона описывается (как известно, при больших скоростях — неадекватно) элементом 3-параметрической группы Галилея, а в СТО — гиперболическим поворотом (бустом). По мнению автора, целесообразно использовать для обозначения указанного физического преобразования термин "буст", который сам по себе не несет прямого указания на конкретную математическую модель этого преобразования (в отличие от эквивалентных ему в СТО терминов "гиперболический поворот", "чистое преобразование Лоренца"). Путаницы при этом возникнуть не должно, так как тем и отличаются различные физические теории, что одни и те же явления могут иметь в них прямо противоположные свойства. В частности, по нашей терминологии, в специальной теории относительности бусты незамкнуты, а в механике Ньютона — замкнуты.

Наконец, обратим внимание на то, что в развитой автором теории переносы во времени независимы от других элементарных преобразований (в отличие от СТО и механики Ньютона[12)]). На уровне выписанных нами таблиц этому факту соответствуют пустые столбец и строка, соответствующие параметру t, в последней из приведенных таблиц[13)].

5. Заключение

В статье рассматривались три теории (модели), претендующие на описание одного и того же физического объекта — пространства-времени. Поэтому по крайней мере две из них ошибочны.

[10)] Во избежание недоразумений укажем, что в литературе нередко встречаются ошибочные утверждения о существовании *"трехпараметрической группы Лоренца"* [5, с. 270] [13, с. 31], *"параметрами которой являются 3 компоненты относительной скорости"* [12, с. 105,109–110] [14, с. 38,43] (наличия трех однопараметрических групп Лоренца, параметрами которых являются 3 компоненты вектора скорости, недостаточно для существования соответствующей трехпараметрической группы; это можно установить прямым исследованием групповых свойств преобразований Лоренца [2], вычислением коммутаторов инфинитезимальных операторов преобразований Лоренца [5, с. 209] или изучением пространства скоростей СТО, т.е. пространства Лобачевского [15, с. 498]).

[11)] В энциклопедиях его обычно называют прецессией Томаса [16], хотя факт незамкнутости бустов был известен и до работ Л. Томаса (1926–1927 гг.). На уровне выписанной нами таблицы для группы Пуанкаре незамкнутость бустов [17, с. 134] [18, с. 403] проявляется в непустоте диагонали этой таблицы.

[12)] В соответствии с развитой выше терминологией можно сказать, что в специальной теории относительности и в классической механике переносы во времени и бусты незамкнуты и порождают новое элементарное преобразование: переносы в пространстве.

[13)] Но в отличие от пространственных поворотов, которым во всех трех таблицах также соответствуют пустые столбцы и строки, переносы во времени в кватернионной теории еще и коммутируют со всеми другими преобразованиями — см. Приложение.

В настоящее время имеется весьма убедительное доказательство ошибочности кватернионной теории пространства-времени как физической теории, связанное именно с независимостью в этой теории переносов во времени от других элементарных преобразований [2]. Также имеется доказательство ошибочности (как физической теории) теории пространства-времени, основанной на группе Галилея, связанное с экспериментально наблюдаемыми следствиями незамкнутости бустов [19].

Приложение. Некоммутативность преобразований

Обсуждаемое в статье понятие незамкнутости элементарных преобразований пространства-времени полезно сравнить с широко известным понятием некоммутативности преобразований и тесно связанным с ним понятием алгебры Ли непрерывной группы преобразований.

Ниже приведены таблицы, определяющие алгебры Ли для трех рассматриваемых в статье групп преобразований, вместе с физической интерпретацией элементов этих алгебр Ли (традиционно называемых операторами) и одним из их математических представлений. В каждой клетке таблиц (кроме левого столбца и верхней строки) стоит оператор, являющийся коммутатором $[\hat{U}, \hat{V}]$ операторов, стоящих в начале строки и столбца, образующих эту клетку. Если операторы перестановочны (коммутируют), то в соответствующей клетке стоит 0. Приведенные таблицы, конечно, содержат всю информацию, содержащуюся в таблицах, выписанных в основном тексте статьи, но не позволяют представить в чистом виде понятие, вынесенное в заголовок статьи.

Алгебра Ли группы Галилея

$\hat{U}\backslash\hat{V}$	$\hat{T}$	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$	$\hat{M}_x$	$\hat{M}_y$	$\hat{M}_z$	$\hat{N}_x$	$\hat{N}_y$	$\hat{N}_z$
$\hat{T}$	0	0	0	0	0	0	0	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$
$\hat{P}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	0	0
$\hat{P}_y$	0	0	0	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	0	0	0
$\hat{P}_z$	0	0	0	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	0	0	0
$\hat{M}_x$	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{M}_z$	$-\hat{M}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$
$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{M}_z$	0	$\hat{M}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$
$\hat{M}_z$	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{M}_y$	$-\hat{M}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0
$\hat{N}_x$	$-\hat{P}_x$	0	0	0	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	0	0
$\hat{N}_y$	$-\hat{P}_y$	0	0	0	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	0	0	0
$\hat{N}_z$	$-\hat{P}_z$	0	0	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	0	0	0

Здесь операторы инфинитезимальных преобразований:

$\hat{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ — перенос (сдвиг, трансляция) во времени;

$\hat{P}_x = \frac{\partial}{\partial x}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси x;
$\hat{P}_y = \frac{\partial}{\partial y}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси y;
$\hat{P}_z = \frac{\partial}{\partial z}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси z;

$\hat{M}_x = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$ — поворот вокруг оси x;

$\hat{M}_y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$ — поворот вокруг оси y;
$\hat{M}_z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ — поворот вокруг оси z;

$\hat{N}_x = t\frac{\partial}{\partial x}$ — буст (преобразование Галилея) по оси x;
$\hat{N}_y = t\frac{\partial}{\partial y}$ — буст (преобразование Галилея) по оси y;
$\hat{N}_z = t\frac{\partial}{\partial z}$ — буст (преобразование Галилея) по оси z;

$[\hat{U}, \hat{V}] = \hat{U}\hat{V} - \hat{V}\hat{U}$ — коммутаторы операторов преобразований.

Алгебра Ли группы Пуанкаре

$\hat{U}\backslash\hat{V}$	$\hat{T}$	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$	$\hat{M}_x$	$\hat{M}_y$	$\hat{M}_z$	$\hat{N}_x$	$\hat{N}_y$	$\hat{N}_z$
$\hat{T}$	0	0	0	0	0	0	0	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$
$\hat{P}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	$\hat{T}$	0	0
$\hat{P}_y$	0	0	0	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	0	$\hat{T}$	0
$\hat{P}_z$	0	0	0	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	0	0	$\hat{T}$
$\hat{M}_x$	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{M}_z$	$-\hat{M}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$
$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{M}_z$	0	$\hat{M}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$
$\hat{M}_z$	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{M}_y$	$-\hat{M}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0
$\hat{N}_x$	$-\hat{P}_x$	$-\hat{T}$	0	0	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	$-\hat{M}_z$	$\hat{M}_y$
$\hat{N}_y$	$-\hat{P}_y$	0	$-\hat{T}$	0	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	$\hat{M}_z$	0	$-\hat{M}_x$
$\hat{N}_z$	$-\hat{P}_z$	0	0	$-\hat{T}$	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	$-\hat{M}_y$	$\hat{M}_x$	0

Здесь операторы инфинитезимальных преобразований:

$\hat{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ — перенос (сдвиг, трансляция) во времени;

$\hat{P}_x = \frac{\partial}{\partial x}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси x;
$\hat{P}_y = \frac{\partial}{\partial y}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси y;
$\hat{P}_z = \frac{\partial}{\partial z}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси z;

$\hat{M}_x = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$ — поворот вокруг оси x;
$\hat{M}_y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$ — поворот вокруг оси y;
$\hat{M}_z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ — поворот вокруг оси z;

$\hat{N}_x = x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}$ — буст (преобразование Лоренца) по оси x;
$\hat{N}_y = y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y}$ — буст (преобразование Лоренца) по оси y;
$\hat{N}_z = z\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial z}$ — буст (преобразование Лоренца) по оси z;

$[\hat{U}, \hat{V}] = \hat{U}\hat{V} - \hat{V}\hat{U}$ — коммутаторы операторов преобразований.

Алгебра Ли кватернионной группы

$\hat{U}\backslash\hat{V}$	$\hat{T}$	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$	$\hat{M}_x$	$\hat{M}_y$	$\hat{M}_z$	$\hat{N}_x$	$\hat{N}_y$	$\hat{N}_z$	$\hat{\Phi}_x$	$\hat{\Phi}_y$	$\hat{\Phi}_z$
$\hat{T}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{P}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$	0	0	0
$\hat{P}_y$	0	0	0	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$	0	0	0
$\hat{P}_z$	0	0	0	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0	0	0	0
$\hat{M}_x$	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{M}_z$	$-\hat{M}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$
$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{M}_z$	0	$\hat{M}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$
$\hat{M}_z$	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{M}_y$	$-\hat{M}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0
$\hat{N}_x$	0	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	$-\hat{M}_z$	$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	$\hat{P}_y$
$\hat{N}_y$	0	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	$\hat{M}_z$	0	$-\hat{M}_x$	$\hat{P}_z$	0	$-\hat{P}_x$
$\hat{N}_z$	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	$-\hat{M}_y$	$\hat{M}_x$	0	$-\hat{P}_y$	$\hat{P}_x$	0
$\hat{\Phi}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$	0	$-\hat{P}_z$	$\hat{P}_y$	0	0	0
$\hat{\Phi}_y$	0	0	0	0	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$	$\hat{P}_z$	0	$-\hat{P}_x$	0	0	0
$\hat{\Phi}_z$	0	0	0	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0	$-\hat{P}_y$	$\hat{P}_x$	0	0	0	0

Здесь операторы:

$\hat{T} = \varepsilon i/2;$ $\exp(t\hat{T})$ — перенос (сдвиг, трансляция) во времени;

$\hat{P}_x = \varepsilon \mathbf{i}/2;$ $\exp(x\hat{P}_x)$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси x;
$\hat{P}_y = \varepsilon \mathbf{j}/2;$ $\exp(y\hat{P}_y)$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси y;
$\hat{P}_z = \varepsilon \mathbf{k}/2;$ $\exp(z\hat{P}_z)$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси z;

$\hat{M}_x = \mathbf{i}/2;$ $\exp(\vartheta_x\hat{M}_x)$ — поворот вокруг оси x;
$\hat{M}_y = \mathbf{j}/2;$ $\exp(\vartheta_y\hat{M}_y)$ — поворот вокруг оси y;
$\hat{M}_z = \mathbf{k}/2;$ $\exp(\vartheta_z\hat{M}_z)$ — поворот вокруг оси z;

$\hat{N}_x = \mathbf{e}_x/2;$ $\exp(\psi_x\hat{N}_x)$ — буст (преобразование Лоренца) по оси x;
$\hat{N}_y = \mathbf{e}_y/2;$ $\exp(\psi_y\hat{N}_y)$ — буст (преобразование Лоренца) по оси y;
$\hat{N}_z = \mathbf{e}_z/2;$ $\exp(\psi_z\hat{N}_z)$ — буст (преобразование Лоренца) по оси z;

$\hat{\Phi}_x = \varepsilon \mathbf{e}_x/2;$ $\exp(\varphi_x\hat{\Phi}_x)$ — неинтерпретированное преобразование по оси x;
$\hat{\Phi}_y = \varepsilon \mathbf{e}_y/2;$ $\exp(\varphi_y\hat{\Phi}_y)$ — неинтерпретированное преобразование по оси y;
$\hat{\Phi}_z = \varepsilon \mathbf{e}_z/2;$ $\exp(\varphi_z\hat{\Phi}_z)$ — неинтерпретированное преобразование по оси z;

$[\hat{U}, \hat{V}] = \hat{U} \circ \hat{V} - \hat{V} \circ \hat{U}$ — коммутаторы половинок гиперкомплексных ортов;

$\varepsilon^2 = 0;$ $i^2 = \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1;$ $\mathbf{i} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \circ \mathbf{i};$ $\mathbf{i} = i\mathbf{e}_x;$ $\mathbf{j} = i\mathbf{e}_y;$ $\mathbf{k} = i\mathbf{e}_z;$

$\circ$ — традиционное обозначение для кватернионного умножения.

Литература

[1] *Э. Фрид.* Элементарное введение в абстрактную алгебру. М.: Мир, 1979.

[2] *В. Ф. Чуб.* Изв. АН. МТТ. 2002. *N* 6. С. 3.

[3] *Ю. В. Новожилов.* Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.

[4] *Н. П. Клепиков.* Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1995. Т. 36. С. 3.

[5] *В. Ф. Журавлев.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997.

[6] *Б. В. Медведев.* Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977.

[7] *Г. А. Зайцев.* О связи теории относительности с теорией групп. В кн.: М.–А. Тоннела. Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: Изд-во иностр. литературы, 1962. С. 447.

[8] *Л. М. Мархашов.* ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 563.

[9] *В. П. Визгин.* “Эрлангенская программа” и физика. М.: Наука, 1975.

[10] *В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.

[11] *Вл. П. Визгин.* Галилеевский принцип относительности. В сб.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983. С. 200.

[12] *А. А. Логунов.* Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987.

[13] *В. Ф. Журавлев.* Основания механики. Методические аспекты. Препринт *N* 251 Института проблем механики АН СССР. М.: ИПМ, 1985.

[14] *А. А. Логунов.* Лекции по теории относительности: Современный анализ проблемы. М.: Изд-во Московского университета, 1983.

[15] *И. Ю. Кобзарев.* Относительности теория. В кн.: Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: БРЭ, 1992. С. 493.

[16] *М. И. Войцеховский.* Буст. В кн.: Математическая физика. Энциклопедия. М.: БРЭ, 1998. С. 63.

[17] *А. Пуанкаре.* О динамике электрона. В сб.: Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973. С. 118[14)].

[18] *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер.* Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977.

[19] *Г. Б. Малыкин, Г. В. Пермитин.* Томасовская прецессия. В кн.: Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: БРЭ, 1998. С. 123.

Nonclosure of elemenary space-time transformations

V. F. Chub

Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”

The article gives a brief group-theoretical comparative study of three space-time theories: (space-time theory in frames of) classical Newton mechanics, special theory of relativity and author-developed theory based on complex-dual quaternions.

[14)] См. также с. 51–54 монографии: *А. А. Логунов.* К работам Анри Пуанкаре “О динамике электрона”. М.: ИЯИ АН СССР, 1984.