РАСШИРЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Я. А. Фурман, А. В. Кревецкий

Марийский государственный технический университет, г. Йошкар-Ола,
каф. радиотехнических и медикобиологических систем
inf@marstu.mari.ru

Путем замены одномерной мнимой единицы i на многомерную $3D$ или $7D$ мнимую единицу r введены расширенные комплексные числа. Показано, что при таком подходе полные кватернионы и октавы возникают в результате поворота вокруг вещественной оси $0Re$ плоскости, в которой задано число $a+ib$, на ненулевой угол в $4D$ и $8D$ пространствах. Рассмотрены появляющиеся в результате подобных преобразований ротативно–компланарные классы кватернионов и октав, представляющих собой коммутативно-ассоциативные алгебры.

Введение

Пусть p и q – два полных кватерниона (КТ), равные $p = 0,5 + 0,5i + 0,707j$ и $q = 0,175 + 0,586i + 0,805j$. Если найти их произведение, то получим, что $pq = qp = -0,765 + 0,371i + 0,526j$. Пусть, далее, u, v и l – три полных октавы, равные

$$u = 0,5 + 0,2i + 0,3j + 0,2k + 0,6E + 0,3I + 0,2J + 0,3K,$$
$$v = 0,707 + 0,163i + 0,245j + 0,163k + 0,49E + 0,245I + 0,163J + 0,245K,$$
$$l = 0,866 + 0,116i + 0,173j + 0,115k + 0,347E + 0,173I + 0,115J + 0,173K.$$

Для этих октав справедливо:

$$uv = vu = -0,261 + 0,222i + 0,335j + 0,223k + 0,669E + 0,335I + 0,222J + 0,334K;$$
$$u\,(vl) = (uv)\,l = 0,575 + 0,188i + 0,284j + 0,189k + 0,567E + 0,284I + 0,188J + 0,283K.$$

Здесь приведены нехарактерные для КТ и октав результаты: операция их перемножения является коммутативной и ассоциативной: $pq = qp$, $uv = vu$, $u\,(vl) = (uv)\,l$. Гиперкомплексные числа из данного примера условно названы ротативно-компланарными (РК). Рассмотрим в связи с чем РК полные кватернионы и октавы обладают подобными исключительными свойствами.

Постановка задачи

Как известно, система комплексных чисел строится на базе действительных чисел путем введения “мнимой” единицы. Необходимость рассмотрения таких чисел возникает при формальном решении уравнения вида $(x-a)^2+b^2=0$. Корнем такого уравнения будет число $a+b\sqrt{-1}$. Л. Эйлер ввел буквенное обозначение $i=\sqrt{-1}$. Эта величина была названа мнимой единицей, а выражение вида $z=a+ib$ – комплексным числом. Здесь a и b – вещественные числа, а символу i приписывается свойство

$$i^2 = -1. \tag{1}$$

Операции над комплексными и вещественными числами носят одинаковый характер:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\,, \tag{2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1; \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\,, \tag{3}$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3. \tag{4}$$

Процедурой удвоения Кэли-Диксона на основе комплексных чисел вводятся кватернионы и октавы, для которых операция умножения является некоммутативной, т.е. $z_1 z_2 \neq z_2 z_1$, а для октав еще и неассоциативной, т. е. $(z_1 z_2)\, z_3 \neq z_1\, (z_2 z_3)$.

В данной работе предлагается принцип обобщения комплексных чисел, состоящий в расширении перечня объектов, которые в соответствии с выражением (1) могут быть приняты в качестве мнимой единицы, т. е. i – это не только $\sqrt{-1}$.

В результате такого обобщения для специфических условий "хорошими" свойствами комплексных и вещественных чисел, задаваемых выражениями (2), (3) и (4), будут обладать также КТ и октавы.

Ротативно-компланарные кватернионы и октавы

Без большого ущерба для полученных результатов ниже будет дан анализ некоторых представлений и операций только над полными нормированными кватернионами и октавами:

$$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k, \quad |p| = 1,$$

$$u = u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k + u_4 E + u_5 I + u_6 J + u_7 K, \quad |u| = 1.$$

В тригонометрической форме эти числа имеют вид:

$$p = \cos\varphi + r\sin\varphi; \quad r = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}; \quad |r| = 1$$

и

$$u = \cos\varphi + r\sin\varphi;$$

$$r = \frac{u_1 i + u_2 j + u_3 k + u_4 E + u_5 I + u_6 J + u_7 K}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2}}; \quad |r| = 1.$$

Здесь r – нормированный по длине 3D или 7D вектор, задаваемый соответственно векторными (мнимыми) числами полных кватерниона и октавы. Эти мнимые части чисел p и u обозначим через $p^{(v)}$ и $u^{(v)}$:

$$r = \frac{p^{(v)}}{|p^{(v)}|}, \quad r = \frac{u^{(v)}}{|u^{(v)}|}.$$

Величину r назовем *многомерной мнимой единицей*, соответственно *3D-единицей* (для кватернионного анализа) и *7D-единицей* (для анализа октав), а угол φ – аргументом соответственно полного КТ и октавы:

$$\varphi = \arg p, \quad \varphi = \arg u.$$

На рис. 1 условно в 4D-пространстве показан вектор p полного КТ $p = p_0 + p^{(v)}$. Здесь по оси $0Re$ откладывается вещественная часть p_0 кватерниона p, рассматриваемая как вектор, по осям x, y и z – соответственно значения p_1, p_2 и p_3. Ось $0Re$ с вещественной частью p_0, векторы $p^{(v)}$ и $p = p_0 + p^{(v)}$ находятся в одной 4D плоскости, которую назовем собственной плоскостью полного КТ p.

Эту 4D плоскость далее будет обозначать через Ω с соответствующим нижним индексом. 4D векторы $p^{(v)} = (0, p_1, p_2, p_3)$ и $p_0 = (p_0, 0, 0, 0)$ ортогональны. Как видно из рис. 1, аргумент φ – это угол в собственной плоскости Ω_p, образуемый вектором

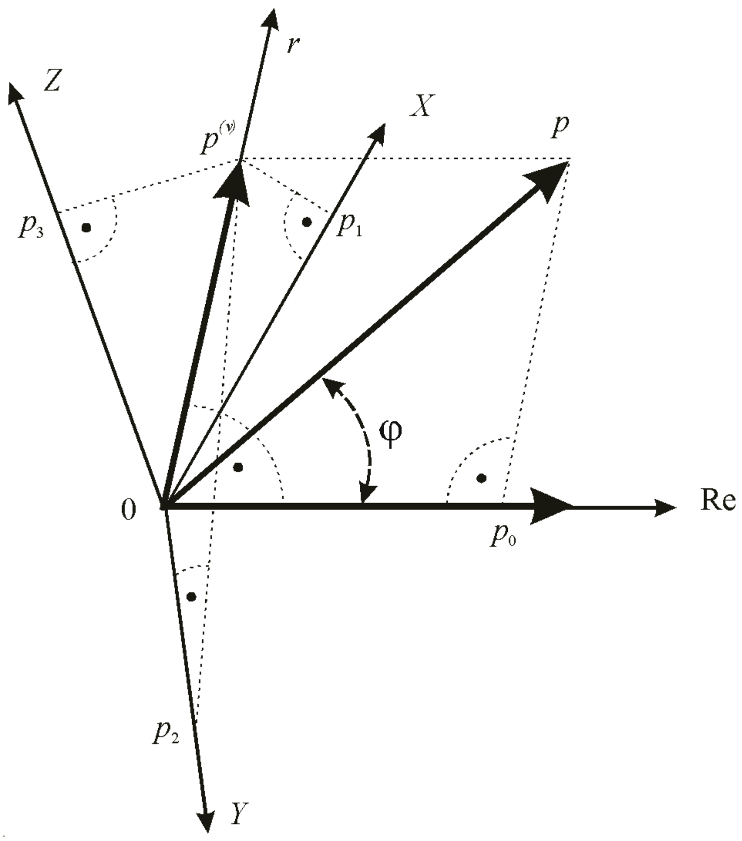

Рис. 1: Графическая интерпретация основных обозначений

полного КТ p и осью $0Re$. Векторы $p^{(v)}$ и r, $|r| = 1$, $\left|p^{(v)}\right| < 1$, коллинеарны, причем $p^{(v)} = r\sin\varphi$, а $p_0 = \cos\varphi$. Варьируя значения аргумента φ при фиксированном r в собственной плоскости Ω_p можно задать целый ряд полных КТ $p\left(\varphi\right)$, отличающихся друг от друга лишь значением φ:

$$p\left(\varphi\right) = \cos\varphi + r\sin\varphi, \quad r = const, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

4D вектор $p\left(\varphi\right)$ есть результат вращения вектора в своей собственной плоскости Ω_p. Поэтому, естественно, векторы $p\left(\varphi\right)$ и связанные с ним полные КТ $p\left(\varphi\right)$ назвать ротативно-компланарными с КТ p. Таким образом, РК кватернионы – это полные КТ, порождаемые вращением вектора p в собственной плоскости Ω_p. Аналогично можно ввести собственную 8D плоскость Ω_p для полной октавы $u = u_0 + u^{(v)}$ с аргументом $\varphi = \arccos u_0$ и ротативно-компланарные с u октавы $u\left(\varphi\right)$,$r = const$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Аналитические соотношения для РК кватернионов и октав

Квадрат нормированного векторного кватерниона или октавы

Покажем, что квадрат векторного КТ r, задающего 3D вектор $r = r_1 i + r_2 j + r_3 k$, $|r| = 1$, есть минус единица:

$$r^2 = -1. \tag{5}$$

В общем случае произведение двух векторных КТ $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ и $g = g_1 i + g_2 j + g_3 k$ равно

$$qg = -\left(q, g\right) + \left[q, g\right],$$

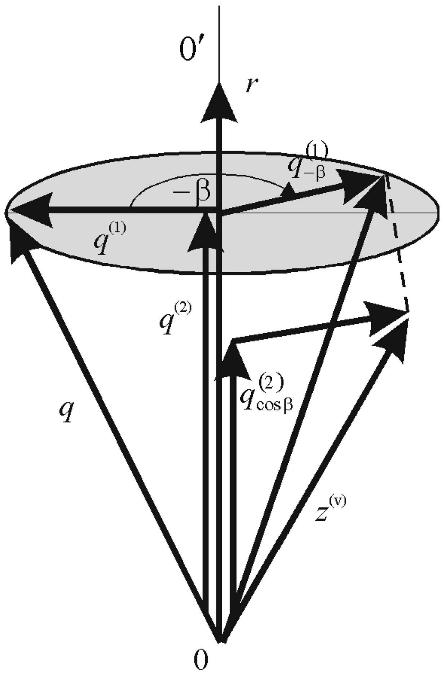

Рис. 2: Формирование векторной части $z^{(v)}$ произведения $z = qp$

где $(q, g) = ((q_1, q_2, q_3), (g_1, g_2, g_3))$ – скалярное произведение, а $[q, g] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$ – векторное произведение векторов q и g.

Для случая перемножения двух одинаковых нормированных векторных КТ r будем иметь: $(r, r) = 1$ и $[r, r] = 0$. Эти соотношения вытекают из автоколлинеарности любого нормированного вектора и приводят к равенству (5).

Аналогичный результат получается для произведения двух нормированных векторных октав $u^{(v)}$ и $l^{(v)}$, $\left|u^{(v)}\right| = \left|l^{(v)}\right| = 1$ при $u^{(v)} = l^{(v)} = r$.

Вращение вектора полного кватерниона в собственной плоскости

Пусть $p = \cos\varphi + r\sin\varphi$ и $q = \cos\psi + r\sin\psi$ – два полных нормированных КТ с одинаковым 3D вектором r и аргументами φ и ψ. При их перемножении с учетом (5) получим

$$t = pq = \cos(\varphi + \psi) + r\sin(\varphi + \psi). \tag{6}$$

КТ $t = pq$ характеризуется аргументом $\theta = \varphi + \psi$, единичным модулем и расположением в собственной плоскости КТ сомножителей p и q. Поэтому t является РК с кватернионами p и q и его можно рассматривать как результат поворота p в собственной плоскости вектора кватерниона на угол ψ. Если $\psi = \pi/2 - \varphi$, то в результате такого поворота получим чисто мнимый КТ $p = r$, а при $\psi = -\varphi$ – вещественное число $t = 1$. При изменении порядка следования сомножителей p и q результат (6) сохраняется:

$$qp = \cos(\varphi + \psi) + r\sin(\varphi + \psi) = pq = t.$$

Таким образом, операция умножения полных РК кватернионов является коммутативной. Рассмотрим геометрическую интерпретацию этого факта. На рис. 2 поясняется геометрический смысл получения векторной части $z^{(v)}$ произведения $z = qp$ при умножении произвольного векторного КТ $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ на полный КТ

$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = \cos\beta + r\sin\beta$, $|p| = 1$. Здесь через $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ обозначены квадратурные составляющие вектора q относительно вектора r. В процессе формирования $z^{(v)}$ ортогональная компонента $q^{(1)}$ поворачивается вокруг оси $00'$ с направляющим вектором r на угол $(-\beta)$ и затем складывается с коллинеарной компонентой $q^2\cos\beta$. Вещественная часть КТ z равна $z_0 = -\left(q,p\right)^{(v)}\sin\beta$. Если q – не векторный, а полный КТ, то механизм перемножения q и p принципиально не меняется. Для нас здесь важен поворот квадратурной компоненты $q^{(1)}$ на угол $(-\beta)$ вокруг оси $00'$, приводящий к выходу вектора $z = qp$ из 4D плоскостей Ω_q. В результате операция $z = qp$ теряет свойство коммутативности.

Если же q и p – ротативно-компланарные КТ, то вектор $q^{(v)}$ одного из КТ коллинеарен вектору r, а значит и вектору $p^{(v)}$ другого перемножаемого КТ. Поэтому ортогональная квадратурная компонента $q^{(1)}$ будет равна нулю и вектор $z = qp$ остается в собственной плоскости Ω кватернионов сомножителей, т.е. ротативно-компланарен с ними. В результате операция $z = qp$ становится коммутативной.

Отметим, что выражение (6) сохраняет свою структуру и дает такой же результат при перемножении полных РК октав. При этом операция перемножения таких октав становится не только коммутативной, но и ассоциативной.

Расширение комплексных чисел

Полные нормированные КТ и октавы $p = \cos\varphi + r\sin\varphi$ и $u = \cos\varphi + r\sin\varphi$ формально можно рассматривать в качестве комплексных чисел $a + br$, $r^2 = -1$, представленных в своих собственных 4D и 8D плоскостях Ω_p и Ω_u. Каждая из таких собственных плоскостей задается углом α_p или α_u, который она образует с координатной плоскостью $X0Re$. Если $\alpha_p = \alpha_u = 0$, то $r = i$ и числа p и u становятся равными $p = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$, т.е. обычными комплексными числами. По мере роста этих углов возникают ненулевые проекции вектора r на оси Y и Z для 3D вектора и на оси $X_2, X_3, ..., X_6$ для 7D вектора, т.е. возникают полные кватернионы и октавы.

Если учесть возможность вращения вектора r вокруг оси $0X$, то при повороте собственной плоскости вокруг оси $0Re$ может быть получен произвольный КТ p или октава u. При этом векторы r и p_0 (r и u_0) сохраняют ортогональность. РК кватернионы p и октавы u являются расширенными комплексными числами, заданными только не в 2D плоскости $0Re$, а в собственной плоскости Ω, расположенной в 4D или 8D-мерной координатных системах. Именно этим и объясняется совпадение свойств РК кватернионов и октав со свойствами комплексных чисел, определяемых выражениями (2), (3) и (4).

Тригонометрические и показательные функции связаны формулой Эйлера. Для рассматриваемого случая данная связь имеет вид:

$$\cos\varphi + r\sin\varphi = \exp\left\{i\varphi\right\}. \tag{7}$$

С учетом (7) результаты умножения и деления РК кватернионов и октав могут быть получены как

$$pq = \exp\left\{r\left(\varphi+\psi\right)\right\}; \quad uv = \exp\left\{r\left(\varphi+\psi\right)\right\};$$
$$\frac{p}{q} = \exp\left\{r\left(\varphi-\psi\right)\right\}; \quad \frac{u}{v} = \exp\left\{r\left(\varphi-\psi\right)\right\}, \quad q \neq 0.$$

Воспользовавшись формулой Муавра получим выражение возведения КТ или октавы в степень и извлечения квадратного корня:

$$p^n = \exp\left\{nr\varphi\right\}; \quad u^n = \exp\left\{nr\varphi\right\}, \quad n = 1, 2, ...$$

$$\frac{1}{p^n} = p^{-n} = \exp\left\{-nr\varphi\right\}; \quad \frac{1}{u^n} = u^{-n} = \exp\left\{-nr\varphi\right\}, \quad n = 1, 2, ...$$

$$p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p} = \exp\left\{r\frac{\varphi + 2s\pi}{n}\right\}; \quad u^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{u} = \exp\left\{r\frac{\varphi + 2s\pi}{n}\right\}, \quad s = 0, 1, ..., n-1.$$

Необходимо отметить, что все участвующие в приведенных выше арифметических операциях КТ, p^n, p^{-n}, $p^{\frac{m}{n}}$, а также октавы u^n, u^{-n}, $u^{\frac{m}{n}}$ являются ротативно-компланарными с исходными произвольно выбранными КТ p и октавы u. Это связано с тем, что при данных операциях гиперкомплексная мнимая единица r не меняется. Также следует отметить, что если в операции участвуют ненормированные КТ и октавы, то модуль результата вычисляется на основе полной формулы Эйлера:

$$p = |p|\left(\cos\varphi + r\sin\varphi\right) = |p|\exp\left\{r\varphi\right\}.$$

В завершение этого раздела запишем выражение для скалярного произведения РК кватернионов и октав в виде расширения скалярного произведения РК комплексных чисел в унитарном пространстве [4]:

$$(q, p) = qp^* = \left(\cos\psi + r\sin\psi\right)\left(\cos\varphi - r\sin\varphi\right) = \cos\left(\psi - \varphi\right) + r\sin\left(\psi - \varphi\right),$$

$$(v, u) = vu^* = \left(\cos\psi + r\sin\psi\right)\left(\cos\varphi - r\sin\varphi\right) = \cos\left(\psi - \varphi\right) + r\sin\left(\psi - \varphi\right).$$

Из этих выражений видно, что скалярное произведение РК кватернионов и октав есть также РК кватернион и октава. Вещественная часть скалярного произведения равна скалярному произведению векторов q и p (v и u), заданных в действительном пространстве. Кроме того, наличие мнимой части $r\sin\left(\psi - \varphi\right)$ делает данные скалярные произведения более информативными по сравнению со скалярными произведениями, полученных для векторов q и p, (v и u), в действительном пространстве.

Заключение

Обычно мнимая единица была лишена конкретного содержания примерно так же, как точка, по Эвклиду, “есть то, что не имеет частей”. Представление $i = \sqrt{-1}$ связано лишь с историей комплексных чисел, потому что далее аксиоматически, без связи с конкретными объектами, было введено, что $i^2 = -1$. В данной работе была сделана одна из возможных попыток наполнить понятие мнимой единицы в составе комплексного числа определенным содержанием. В результате было показано существование ротативно-компланарных кватернионов и октав и на их основе введены арифметические операции над произвольными октавами и кватернионами по правилам аналогичных операций с комплексными числами. Также для ротативно-компланарных кватернионов и октав была показана коммутативность операции умножения, а отдельно для – октав еще и ассоциативность этой операции. Хотя подобные гиперкомплексные числа представляют собой узкий, скорее экзотический, класс кватернионов и октав, но их существование требует осторожности при утверждении вообще о некоммутативности операции перемножения кватернионов или октав и невыполнении сочетательного закона для октав.

Литература

1. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.

2. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов. Я. А. Фурман, А. В. Кревецкий, и др.; Под ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2004. 456 с.

3. Furman Y. A. Processing of quaternion signals specifying spatially located group point objects. Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. V. 12, N 2, P. 173-191.

4. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974.

5. Ротативно-компланарные кватернионы и октавы/ Фурман Я. А., Кревецкий А.В.; МарГТУ. Йошкар-Ола. Деп. в ВИНИТИ 4.11.2004 № 1736-В2004.

Expansion of Complex Number

Y. A. Furman, A. V. Krevetsky

Mari state technical university, Yoshkar Ola, Radio engineering faculty, inf@marstu.mari.ru

The expanded complex numbers are introduced by means of imaginary unit i replacement by one-dimensional on multivariate $3D$ or $7D$ imaginary unit r. It is shown, full quaternions and octaves appear as a result of a turn around the material axis $0Re$ plane where $a + ib$ number is set in $4D$ and $8D$ spaces. Rotor-complanar classes of quaternions and the octaves appearing as a result of similar transformations are considered. They represent commutative-associative algebras.