4-ПОЛИФОРМЫ ИМПУЛЬСОВ ПАВЛОВА $K(p)=\sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4}$ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Георге Атанасиу[1], Владимир Балан[2] и Мирсеа Неагу[3]

Цель данной работы состоит в том, чтобы ассоциировать обобщенное гамильтоново пространство с 4-псевдоскалярным произведением, определенным в пространстве Картана-Минковского. Компоненты 4-псевдоскалярного произведения $G^{ijkl}(x,p)$ даются в терминах картановского метрического фундаментального d-тензора $g^{*ij}(x,p)$. В частном случае функции Павлова $K(p)=\sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4}$ выводятся компоненты v-ковариантных производных в этом обобщенном гамильтоновом пространстве.

Mathematics Subject Classification: 53B40, 53C60, 53C07.

1 4-псевдоскалярное произведение в пространстве Картана-Минковского

Пусть M^n является n-мерным дифференцируемым многообразием класса гладкости C^∞, а (T^*M,π^*,M) – его кокасательное расслоение и (x^i,p_i) – локальные координаты в T^*M.

Пусть $K: T^*M\to\mathbf{R}_+$, где $K(x,p)=K(p)>0$ – локально метрическая функция Картана-Минковского. Отметим, что функция $K(p)$ является 1-положительно однородной по аргументу p. Более того, функция Картана-Минковского $K(p)$ порождает фундаментальное метрическое d-тензорное поле

$$g^{*ij}(x,p)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2K^2}{\partial p_i\partial p_j}.$$

Теперь введем *"4-псевдоскалярное произведение"*, задаваемое уравнением:

$$(\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4)=G^{ijkl}(x,p)\omega_i^1\omega_j^2\omega_k^3\omega_l^4,$$

где $\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4\in\Gamma(T^*M)$ и

$$G^{ijkl}(x,p)=\frac{1}{4!}\frac{\partial^4K^4}{\partial p_i\partial p_j\partial p_k\partial p_l}.$$

Замечание. В частном случае 4-мерного многообразия M^4 и метрической функции Павлова

$$K(p)=\sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4},$$

где $p_1p_2p_3p_4>0$, данное 4-псевдоскалярное произведение было изучено Павловым [8]. В этом случае мы имеем

$$G^{ijkl}(x,p)=\frac{1}{4!},$$

[1] Department of Algebra and Geometry, "Transilvania" University, Braşov, Romania, gh_atanasiu@yahoo.com

[2] Department of Mathematics I, University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania, vbalan@mathem.pub.ro

[3] Brasov, Romania, mirceaneagu73@yahoo.com

так что

$$(\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4) = \frac{1}{4!} \sum_{\tau \in \sigma_4} \omega^1_{\tau(1)} \omega^2_{\tau(2)} \omega^3_{\tau(3)} \omega^4_{\tau(4)}.$$

Приняв во внимание 1-однородность функции Картана-Минковского $K(p)$, мы получим, что выполняются следующие утверждения:

- $G^{ijkl}(x,p)$ полностью симметричен относительно индексов i, j, k, l;
- $G^{ijk0}(x,p) = G^{ijkl}(x,p)p_l = \dfrac{1}{4!} \dfrac{\partial^3 K^4}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k}$ является 1-однородным по p;
- $G^{ij00}(x,p) = G^{ijkl}(x,p)p_k p_l = \dfrac{1}{12} \dfrac{\partial^2 K^4}{\partial p_i \partial p_j}$ является 2-однородным по p;
- $G^{i000}(x,p) = G^{ijkl}(x,p)p_j p_k p_l = \dfrac{1}{4} \dfrac{\partial K^4}{\partial p_i}$ является 3-однородным по p;
- $G^{0000}(x,p) = G^{ijkl}(x,p)p_i p_j p_k p_l = K^4$ является 4-однородным по p.

Определим *"псевдоскалярное произведение"*

$$< \omega^1, \omega^2 >_\omega = \frac{1}{K^2} (\omega^1, \omega^2, \omega, \omega),$$

где $\omega = p_i dx^i$ – каноническая 1-форма Лиувилля в пространстве Картана-Минковского $(M^n, K(p))$ и $\omega^1, \omega^2 \in \Gamma(T^*M)$.

Замечание. Для метрики Павлова $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$, очевидно, что форма $<, >_\omega$ билинейна по двум аргументам и она удовлетворяет аксиомам псевдоскалярного произведения [9].

Заметим, что локально мы имеем

$$< \omega^1, \omega^2 >_\omega = \frac{1}{K^2} G^{ijkl}(x,p) \omega^1_i \omega^2_j p_k p_l = \frac{G^{ij00}(x,p)}{K^2} \omega^1_i \omega^2_j$$

и, следовательно,

$$g^{ij}(x,p) = \frac{G^{ij00}(x,p)}{K^2} = \frac{1}{12K^2} \frac{\partial^2 K^4}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Предполагая, что метрический d-тензор $g^{ij}(x,p)$ невырожден, мы можем дать следующий важный результат:

Предложение. Пара $GH^n = (M^n, g^{ij}(x,p))$ – обобщенное гамильтоново пространство. Абсолютная энергия этого пространства в точности равна $\mathcal{E} = K^2$.

Доказательство. Абсолютная энергия обобщенного гамильтонова пространства GH^n равна:

$$\mathcal{E} = g^{ij}(x,p)p_i p_j = \frac{G^{ij00}(x,p)}{K^2} p_i p_j = \frac{G^{0000}(x,p)}{K^2} = \frac{K^4}{K^2} = K^2. \qquad \square$$

Как следствие, метрическое d-тензорное поле, порождаемое абсолютной энергией $\mathcal{E} = K^2$ определяется уравнением

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^2}{\partial p_i \partial p_j} = g^{*ij}(x,p),$$

что в точности является картановским фундаментальным метрическим d-тензорным полем пространства Картана-Минковского $(M^n, K(p))$.

Замечание.

i) Из 1-однородности функции Картана-Минковского K и определения $g^{ij}(x,p)$ следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i} = g^{ij}(x,p)p_j = g^{*ij}(x,p)p_j.$$

ii) Отметим, что мы также имеем $\mathcal{E} = K^2 = g^{ij}p_ip_j = g^{*ij}p_ip_j$.

2 Локальные компоненты 4-псевдоскалярного произведения

Вслед за этим, мы установим соотношение между обобщенной гамильтоновой метрикой $g^{ij}(x,p)$ и метрикой Картана-Минковского $g^{*ij}(x,p)$.

Теорема 1. *Выполняется соотношение:*

$$3g^{ij} = g^{*ij} + 2\frac{g^{*i0}g^{*j0}}{g^{*00}},$$

где $g^{*i0} = g^{*ij}p_j$ *и* $g^{*00} = g^{*ij}p_ip_j$.

Доказательство. Для регулярной обобщенной гамильтоновой метрики мы имеем равенство [5], [6]

$$g^{*ij} = g^{ij} + \frac{\partial g^{ik}}{\partial p_j}p_k. \tag{2.1}$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{E} = K^2$, мы можем записать $g^{ij}(x,p)$ в более удобной форме

$$g^{ij}(x,p) = \frac{1}{12\mathcal{E}}\frac{\partial^2 \mathcal{E}^2}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Теперь, заменяя $g^{ij}(x,p)$ на (2.1) и используя тот факт, что $\mathcal{E}$ является 2-однородной, прямой расчет приводит к

$$g^{*ij} = 3g^{ij} - \frac{1}{2\mathcal{E}}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_j}. \tag{2.2}$$

Поскольку мы имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i} = g^{ij}(x,p)p_j,$$

то мы получим

$$g^{*ij} = 3g^{ij} - 2\frac{g^{i0}g^{j0}}{g^{00}},$$

где $g^{i0} = g^{ij}p_j$ и $g^{00} = g^{ij}p_ip_j = \mathcal{E}$.

Обратное соотношение немедленно следует из (2.2), если мы отметим, что

$$2g^{*i0} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p_i \partial p_j}p_j = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i}$$

и

$$\mathcal{E} = g^{*00} = g^{*ij}p_ip_j,$$

и наше утверждение доказано.

Теперь выразим коэффициенты $G^{ijkl}(x,p)$ в терминах картановского фундаментального метрического d-тензорного поля $g^{*ij}(x,p)$. Посредством прямого вычисления мы получим уравнение

$$4!G^{ijkl} = 2S\mathcal{E}^{ijk}\mathcal{E}^{l} + 2(\mathcal{E}^{ij}\mathcal{E}^{kl} + \mathcal{E}^{ik}\mathcal{E}^{jl} + \mathcal{E}^{il}\mathcal{E}^{jk}) + 2\mathcal{E}\mathcal{E}^{ijkl},$$

где знак S означает циклическую сумму и верхние индексы у $\mathcal{E}$ означают дифференцирование по соответствующим компонентам $p = (p_i)$. Если в выше данном равенстве мы сделаем замену

$$\mathcal{E} = g^{*00}, \mathcal{E}^{i} = 2g^{*i0}, \mathcal{E}^{ij} = 2g^{*ij}, \mathcal{E}^{ijk} = 2g^{*ij,k}, \mathcal{E}^{ijkl} = 2g^{*ij,kl},$$

тогда требуемое соотношение таково:

$$4!G^{ijkl} = 2Sg^{*ij,k}g^{*l0} + 2(g^{*ij}g^{*kl} + g^{*ik}g^{*jl} + g^{*il}g^{*jk}) + 2g^{*00}g^{*ij,kl}.$$

Обозначим $g^{*}_{\omega^1\omega^2} = g^{*ij}\omega^1_i\omega^2_j$, где $\omega^1, \omega^2 \in \Gamma(T^*M)$. Посредством простого вычисления мы получим теорему:

Теорема 2. *Компоненты 4-псевдоскаляра выражаются посредством:*

$$(\theta,\theta,\eta,\eta) = 2\sum g^{*}_{\theta\theta,\eta}g^{*}_{\eta 0} + 2(g^{*}_{\theta\theta}g^{*}_{\eta\eta} + 2g^{*}_{\theta\eta}g^{*}_{\theta\eta}) + 2g^{*00}g^{*}_{\theta\theta,\eta\eta}$$

и

$$\begin{aligned}(\theta,\theta,\theta,\eta) + (\theta,\eta,\eta,\eta) \ =\ & 2\sum g^{*}_{\theta\theta,\theta}g^{*}_{\eta 0} + 6g^{*}_{\theta\theta}g^{*}_{\theta\eta} + 2g^{*00}g^{*}_{\theta\theta,\theta\eta} + \\ & +2\sum g^{*}_{\theta\eta,\eta}g^{*}_{\eta 0} + 6g^{*}_{\theta\eta}g^{*}_{\eta\eta} + 2g^{*00}g^{*}_{\theta\eta,\eta\eta},\end{aligned}$$

где $\theta,\eta \in \Gamma(T^*M)$.

3 v-ковариантное дифференцирование в Павловском случае $K(p) = \sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4}$

Рассмотрим M^4 как 4-мерное многообразие. Пусть

$$K(p) = \sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4},$$

где $p_1p_2p_3p_4 > 0$, – метрика Бервальда-Мора, изученная Павловым в работе [8]. Тогда абсолютная гамильтонова энергия равна:

$$\mathcal{E} = K^2 = \sqrt{p_1p_2p_3p_4}.$$

В этом случае, используя обозначение $(a,b,c,d) = (p_1,p_2,p_3,p_4)$, матрица $(g^{ij}(x,p))$ и обратная к ней $(g_{ij}(x,p))$ выражаются так:

$$g^{ij}(x,p)] = \frac{1}{12K^2}\begin{pmatrix} 0 & cd & bd & bc \\ cd & 0 & ad & ac \\ bd & ad & 0 & ab \\ bc & ac & ab & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$g_{ij}(x,p) = K^2 \begin{pmatrix} -\dfrac{2a}{3dcb} & \dfrac{1}{3cd} & \dfrac{1}{3db} & \dfrac{1}{3cb} \\ \dfrac{1}{3cd} & -\dfrac{2b}{3dca} & \dfrac{1}{3da} & \dfrac{1}{3ca} \\ \dfrac{1}{3db} & \dfrac{1}{3da} & -\dfrac{2c}{3dba} & \dfrac{1}{3ba} \\ \dfrac{1}{3cb} & \dfrac{1}{3ca} & \dfrac{1}{3ba} & -\dfrac{2d}{3cba} \end{pmatrix},$$

где $\det g = -3(abcd)^2 \neq 0$ для $abcd > 0$.

Другими словами, мы имеем

$$g^{ii}(x,p) = 0, \qquad \forall i = \overline{1,4},$$
$$g^{i_1 i_2}(x,p) = \frac{p_{i_3} p_{i_4}}{12\mathcal{E}},\ i_1 \neq i_2,$$

где $\mathcal{E} = K^2 = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}$. Обратная матрица имеет компоненты

$$g_{ii}(x,p) = -\frac{8p_i^2}{\mathcal{E}}, \qquad \forall i = \overline{1,4},$$
$$g_{i_1 i_2}(x,p) = \frac{4\mathcal{E}}{g^{i_1 i_2}} = \frac{48\mathcal{E}^2}{p_{i_3} p_{i_4}} H p_{i_1} p_{i_2},\ i_1 \neq i_2,$$

где $\mathcal{E} = K^2 = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}$. Более того, мы имеем

$$g^{*ii}(x,p) = -\frac{\mathcal{E}}{8p_i^2},\ g^{*i_1 i_2}(x,p) = \frac{p_{i_3} p_{i_4}}{8\mathcal{E}},$$

где $g^{*ij}(x,p) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 K^2}{\partial p_i \partial p_j}$ и $\mathcal{E} = K^2$. Отметим, что мы имеем

$$g^{i_1 i_2}(x,p) = \frac{2}{3} g^{*i_1 i_2}(x,p),\ i_1 \neq i_2.$$

Пусть

$$C^{hjk} = g^{hi} C_i^{jk} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{hk}}{\partial p_j} + \frac{\partial g^{jh}}{\partial p_k} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial p_h}\right)$$

– компоненты, которые определяют коэффициенты C_i^{jk} вертикального ковариантного дифференцирования [6], порождаемого обобщенной гамильтоновой метрикой $g^{ij}(x,p)$.

Замечание. Отметим, что тензорное поле

$$C_i^{jk} = -\frac{1}{2} g_{is}\left(\frac{\partial g^{sk}}{\partial p_j} + \frac{\partial g^{js}}{\partial p_k} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial p_s}\right)$$

дает v-коэффициенты v-ковариантного дифференцирования с метрическим свойством [6]:

$$g^{ij}|^k = \frac{\partial g^{ij}}{\partial p_k} + C_s^{ik} g^{sj} + C_s^{jk} g^{is} = 0.$$

В дальнейшем мы будем придерживаться того же соглашения: мы будем обозначать посредством i_1, i_2, i_3, i_4 различные значения от 1 до 4 ($i_j \neq i_k$ for $j \neq k$). Тогда для различных индексов i_1, i_2, i_3, мы имеем

$$\begin{aligned} C^{i_1 i_2 i_3} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial g^{*i_1 i_3}}{\partial p_{i_2}} + \frac{\partial g^{*i_2 i_1}}{\partial p_{i_3}} - \frac{\partial g^{*i_2 i_3}}{\partial p_{i_1}}\right) = \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^{i_1 i_3 i_2} + \frac{1}{2}\mathcal{E}^{i_2 i_1 i_3} - \frac{1}{2}\mathcal{E}^{i_2 i_3 i_1}\right) = -\frac{1}{6}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_3}. \end{aligned}$$

Тем же способом мы получим, что

$$\begin{aligned} C^{i_1 i_1 i_2} &= C^{i_1 i_2 i_1} = 0, \\ C^{i_2 i_1 i_1} &= -\frac{1}{3}\mathcal{E}^{i_1 i_1 i_2}, \\ C^{i_1 i_1 i_1} &= 0. \end{aligned}$$

Теперь мы получим коэффициенты $C_i^{jk} = g_{is} C^{sjk}$ в терминах энергии $\mathcal{E}$.

Теорема 3. *v-Коэффициенты v-ковариантных дифференцирований в обобщенном гамильтоновом пространстве* $GH^4 = (M^4, g^{ij}(x,p))$ *даются формулами:*

$$\begin{aligned} C_{i_1}^{i_2 i_3} &= \frac{4}{3}\frac{p_{i_1}^2}{\mathcal{E}}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_3} - 8 p_{i_1} p_{i_4}\mathcal{E}^{i_2 i_3 i_4}, \\ C_{i_1}^{i_1 i_2} &= -8 p_{i_1} p_{i_3}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_3} - 8 p_{i_1} p_{i_4}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_4}, \\ C_{i_1}^{i_2 i_2} &= \frac{8}{3}\frac{p_{i_1}^2}{\mathcal{E}}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_2} - 16 p_{i_1} p_{i_3}\mathcal{E}^{i_2 i_2 i_3} - 16 p_{i_1} p_{i_4}\mathcal{E}^{i_2 i_2 i_4}, \\ C_{i_1}^{i_1 i_1} &= -16 p_{i_1} p_{i_2}\mathcal{E}^{i_2 i_1 i_1} - 16 p_{i_1} p_{i_3}\mathcal{E}^{i_3 i_1 i_1} - 16 p_{i_1} p_{i_4}\mathcal{E}^{i_4 i_1 i_1}. \end{aligned}$$

Благодарность. Настоящая работа была частично профинансирована грантом CNCSIS MEN A1478.

References

[1] Gh. Atanasiu, *The invariant expression of Hamilton geometry*, Tensor N. S. 47, 3 (1988), 225-234.

[2] Gh. Atanasiu, M. Hashiguchi, *Semi-symmetric Miron connections in dual Finsler spaces*, Reports of the Faculty of Science, Kagoshima Univ., Japan, 20 (1987), 43-49.

[3] Gh. Atanasiu, F. C. Klepp, *Nonlinear connection in cotangent bundle*, Publ. Math., Debrecen, Hungary 39, f. 1-2 (1991), 107-111.

[4] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, *New aspects in geometry of time dependent generalized metrics*, Tensor N. S. 50, 3 (1991), 248-255.

[5] V. Balan, N. Brînzei, *Einstein equations for the Berwald-Moor type Euclidian-locally Minkowski relativistic model*, (2005), preprint.

[6] R. Miron, *Hamilton geometry*, An. Şt. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, Romania, 35 (1989), 33-85.

[7] R. Miron, *The geometry of Cartan spaces*, Prog. in Math., India, 22 (1988), 1-38.

[8] D. G. Pavlov, *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 31-39.

[9] D. G. Pavlov, *Generalization of scalar product axioms*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 5-18.