ФИНСЛЕРОВЫ 4-СПИНОРЫ КАК ОБОБЩЕНИЕ ТВИСТОРОВ

А. В. Соловьев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
anton@spin.phys.msu.ru

Изложены основные положения геометрии финслеровых 4-спиноров. Показано, что твисторы являются частным случаем финслеровых 4-спиноров. Установлена тесная связь между финслеровыми 4-спинорами и геометрией 16-мерного линейного финслерова пространства. Дано описание группы изометрий этого пространства. Изложена процедура размерной редукции к 4-мерным величинам.

Введение

В работах [1,2] были введены *гиперспиноры* и рассмотрены их основные свойства. Эти же математические объекты под названием N-компонентных спиноров совершенно независимо изучались в работах [3, 4]. Наконец, в статье [5] была построена общая алгебраическая теория *финслеровых N-спиноров.* Последний термин представляется наиболее удачным, поскольку отражает тесную связь, существующую между гиперспинорами и финслеровой геометрией.

Настоящая работа посвящена изложению основных положений геометрии финслеровых 4-спиноров. Отмечается, что *твисторы* Р. Пенроуза [6] представляют собой частный случай финслеровых 4-спиноров и могут быть ассоциированы не только с псевдоевклидовой, но и с финслеровой геометрией. После вывода явного выражения для длины вектора в 16-мерном линейном финслеровом пространстве, дается описание соответствующей группы изометрий. Статья завершается изложением процедуры размерной редукции, которая позволяет переписать выражение для финслеровой длины 16-вектора в гораздо более обозримом виде, используя только 4-мерные геометрические объекты.

Геометрия финслеровых 4-спиноров

Пусть $\mathbb{C}^4$ — линейное пространство 4-компонентных столбцов комплексных чисел относительно стандартных матричных операций сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{C}$. Рассмотрим антисимметричную 4-линейную форму

$$[\xi, \eta, \lambda, \mu] = \varepsilon_{abcd}\, \xi^a \eta^b \lambda^c \mu^d, \tag{1}$$

где ξ, η, λ, $\mu \in \mathbb{C}^4$, ε_{abcd} — символ Леви-Чивиты, нормированный условием $\varepsilon_{1234} = 1$, индексы a, b, c, d независимо пробегают значения от 1 до 4, а ξ^a, η^b, λ^c, $\mu^d \in \mathbb{C}$. Здесь и во всех последующих формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Пространство $\mathbb{C}^4$ с заданной на нем формой (1) назовем *пространством финслеровых 4-спиноров.* Само же комплексное число $[\xi, \eta, \lambda, \mu]$ будем называть *симплектическим скалярным 4-произведением* финслеровых 4-спиноров ξ, η, λ и μ.

Поскольку (1) представляет собой не что иное как определитель

$$[\xi,\eta,\lambda,\mu]=\begin{vmatrix}\xi^1 & \eta^1 & \lambda^1 & \mu^1\\ \xi^2 & \eta^2 & \lambda^2 & \mu^2\\ \xi^3 & \eta^3 & \lambda^3 & \mu^3\\ \xi^4 & \eta^4 & \lambda^4 & \mu^4\end{vmatrix} \tag{2}$$

со столбцами ξ, η, λ и μ, то, по известной теореме алгебры [7], симплектическое скалярное 4-произведение $[\xi,\eta,\lambda,\mu]$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда финслеровы 4-спиноры ξ, η, λ и μ линейно зависимы. В частности, $[\xi,\xi,\xi,\xi]=0$ для любого $\xi\in\mathbb{C}^4$.

Найдем изометрии пространства финслеровых 4-спиноров, т. е. линейные преобразования

$$\xi'=D\xi \quad\Longleftrightarrow\quad \xi'^a=d^a_b\xi^b \quad (D=\|d^a_b\|;\,d^a_b\in\mathbb{C};\,a,b=\overline{1,4}), \tag{3}$$

сохраняющие симплектическое скалярное 4-произведение:

$$[\xi',\eta',\lambda',\mu']=[\xi,\eta,\lambda,\mu] \quad \text{для любых} \quad \xi,\eta,\lambda,\mu\in\mathbb{C}^4. \tag{4}$$

Подставляя (3) и аналогичные выражения для η', λ', μ' в условие (4), с учетом (2) получаем:

$$[\xi,\eta,\lambda,\mu]\det D=[\xi,\eta,\lambda,\mu]. \tag{5}$$

Ввиду произвольности ξ, η, λ, $\mu\in\mathbb{C}^4$, из (5) следует унимодулярность матрицы преобразования (3): $\det D=1$. Таким образом, изометрии пространства финслеровых 4-спиноров образуют группу $\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$.

Пространство финслеровых 4-спиноров можно легко превратить в пространство твисторов, если наделить $\mathbb{C}^4$ дополнительной геометрической структурой. А именно, рассмотрим полуторалинейную эрмитову форму

$$\langle\xi,\eta\rangle=\xi^1\overline{\eta^1}+\xi^2\overline{\eta^2}-\xi^3\overline{\eta^3}-\xi^4\overline{\eta^4}, \tag{6}$$

где ξ, $\eta\in\mathbb{C}^4$, а черта обозначает комплексное сопряжение. Комплексное число $\langle\xi,\eta\rangle$ обычно называется (псевдоунитарным) скалярным произведением ξ и η. По отношению к скалярному произведению (6) пространство $\mathbb{C}^4$ является пространством твисторов [6]. Очевидно, преобразования (3), сохраняющие одновременно формы (1) и (6), образуют так называемую твисторную группу $\mathrm{SU}(2,2)\subset\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$. В этом смысле твисторы представляют собой частный случай финслеровых 4-спиноров.

Вернемся, однако, к финслеровым 4-спинорам и рассмотрим подпространство линейного пространства $\mathbb{C}^4\otimes\overline{\mathbb{C}^4}$, состоящее из эрмитовых тензоров. Это подпространство изоморфно 16-мерному *действительному* линейному пространству $\mathrm{Herm}(4)=\{X\mid X=X^+\}$, образованному всеми эрмитовыми $4{\times}4$-матрицами с комплексными элементами. Здесь и далее крест обозначает эрмитово сопряжение.

В качестве базиса пространства $\mathrm{Herm}(4)$ выберем следующие линейно независимые матрицы:

$$\tau_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \tau_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \tau_2=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Тогда для любого $X \in \mathrm{Herm}(4)$ имеет место разложение

$$X = X^A \tau_A \quad (A = \overline{0,15}), \tag{8}$$

где $X^A \in \mathbb{R}$ — компоненты 16-вектора X относительно базиса (7). Наряду с матрицами (7) введем еще один набор эрмитовых 4×4-матриц с верхними индексами: $\tau^B = \tau_B$ $(B \neq 8, 15)$, $\tau^8 = 2\tau_8$, $\tau^{15} = 2\tau_{15}$. При таком выборе матриц выполняются замечательные соотношения

$$\mathrm{Tr}(\tau^A \tau_B) = 2\delta^A_B \quad (A, B = \overline{0,15}), \tag{9}$$

где Tr обозначает операцию вычисления следа матрицы, а δ^A_B — символ Кронекера. На основании (8) и (9) немедленно заключаем, что

$$X^A = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tau^A X). \tag{10}$$

Наделим Herm(4) структурой финслерова пространства. Для этого определим *длину* $|X|$ 16-вектора $X \in \mathrm{Herm}(4)$ следующим образом: $|X| \equiv \sqrt[4]{\det X}$. Вычисляя определитель от левой и правой частей разложения (8), получаем выражение для $|X|^4$ в базисе (7)

$$|X|^4 = G_{ABCD}X^AX^BX^CX^D =$$
$$= X^{15}\big\{[(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2]X^8 -$$

$$
\begin{aligned}
&-[(X^4)^2+(X^5)^2+(X^6)^2+(X^7)^2]X^0+2[X^4X^6+X^5X^7]X^1+\\
&+2[X^5X^6-X^4X^7]X^2+[(X^4)^2+(X^5)^2-(X^6)^2-(X^7)^2]X^3\}-\\
&-[(X^0)^2-(X^1)^2-(X^2)^2-(X^3)^2][(X^{13})^2+(X^{14})^2]+\\
&+[(X^4)^2+(X^5)^2][(X^{11})^2+(X^{12})^2]+[(X^6)^2+(X^7)^2]\times\\
&\times[(X^9)^2+(X^{10})^2]-X^0X^8[(X^9)^2+(X^{10})^2+(X^{11})^2+(X^{12})^2]+\\
&+X^3X^8[(X^9)^2+(X^{10})^2-(X^{11})^2-(X^{12})^2]+2\{[X^0-X^3]\times\\
&\times[X^4X^9X^{13}+X^4X^{10}X^{14}-X^5X^9X^{14}+X^5X^{10}X^{13}]+\\
&+[X^0+X^3][X^6X^{11}X^{13}+X^6X^{12}X^{14}-X^7X^{11}X^{14}+\\
&+X^7X^{12}X^{13}]-X^1[X^4X^{11}X^{13}+X^4X^{12}X^{14}-X^5X^{11}X^{14}+\\
&+X^5X^{12}X^{13}+X^6X^9X^{13}+X^6X^{10}X^{14}-X^7X^9X^{14}+\\
&+X^7X^{10}X^{13}-X^8X^9X^{11}-X^8X^{10}X^{12}]-X^2[X^4X^{11}X^{14}-\\
&-X^4X^{12}X^{13}+X^5X^{11}X^{13}+X^5X^{12}X^{14}-X^6X^9X^{14}+\\
&+X^6X^{10}X^{13}-X^7X^9X^{13}-X^7X^{10}X^{14}+X^8X^9X^{12}-\\
&-X^8X^{10}X^{11}]-X^4[X^6X^9X^{11}+X^6X^{10}X^{12}+X^7X^9X^{12}-\\
&-X^7X^{10}X^{11}]+X^5[X^6X^9X^{12}-X^6X^{10}X^{11}-X^7X^9X^{11}-\\
&-X^7X^{10}X^{12}]\},
\end{aligned} \tag{11}
$$

где G_{ABCD} — компоненты симметричного ковариантного тензора 4-го ранга на $\mathrm{Herm}(4)$. Таким образом, финслерова длина 16-вектора $X \in \mathrm{Herm}(4)$ задается в базисе (7) формой 4-й степени относительно переменных (10). Особо отметим обстоятельство, что форма (11) является знаконеопределенной, т. е. возможны три случая: $|X|^4 > 0$, $|X|^4 < 0$ или $|X|^4 = 0$. Поскольку $|X|^4 = \det X$, последний случай реализуется тогда и только тогда, когда $\det X = 0$.

Всякое линейное преобразование (3) пространства финслеровых 4-спиноров индуцирует в $\mathrm{Herm}(4)$ преобразование вида

$$
X' = DXD^+ \quad \Longleftrightarrow \quad X'^{a\dot b} = d^a_c \overline{d^{\dot b}_{\dot e}} X^{c\dot e} \quad (X' = \|X'^{a\dot b}\|; X = \|X^{c\dot e}\|), \tag{12}
$$

где как пунктирные, так и непунктирные индексы пробегают значения от 1 до 4 (точка над индексом означает, что он относится к элементу матрицы, комплексно сопряженной матрице $D = \|d^a_b\|$), а $X \in \mathrm{Herm}(4)$. Очевидно, преобразование (12) обладает следующими свойствами.

1. Если $X = X^+$, то $X' = X'^+$, т. е. преобразование (12) не выводит за пределы пространства $\mathrm{Herm}(4)$.
2. Преобразование (12) является линейным относительно X.
3. Если $\det D = 1$, то $\det X' = \det X$ для любого $X \in \mathrm{Herm}(4)$.

Поскольку $|X| = \sqrt[4]{\det X}$, последнее свойство означает, что при $D \in \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ линейное преобразование (12) пространства $\mathrm{Herm}(4)$ является финслеровой изометрией: $|X'| = |X|$. Понятно, что все такие изометрии образуют некоторую группу. Дадим явное матричное описание этой группы в базисе (7).

Подставим в (12) вместо $X', X \in \mathrm{Herm}(4)$ их разложения: $X' = X'^A\tau_A$, $X = X^B\tau_B$. Умножим получившееся равенство слева на τ^A, вычислим след от его обеих сторон и воспользуемся соотношениями (9). В результате будем иметь

$$
X'^A = L(D)^A_B X^B \quad (A, B = \overline{0, 15}), \tag{13}
$$

где

$$L(D)^A_B = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tau^A D \tau_B D^+) \tag{14}$$

— элементы матрицы линейного преобразования (12) в базисе (7) (подчеркнем, что $L(D)^A_B \in \mathbb{R}$). Таким образом, при любой унимодулярной комплексной 4×4-матрице D из группы $\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ преобразование (13) – (14) сохраняет форму (11): $G_{ABCD}X'^A X'^B X'^C X'^D = G_{ABCD}X^A X^B X^C X^D$.

Поскольку группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ локально изоморфна собственной ортохронной подгруппе $\mathrm{O}^{\uparrow}_{+}(1,3)$ группы Лоренца [8], имеет смысл рассмотреть преобразования (13) – (14) при $D \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, т. е. с позиций "4-мерного наблюдателя". Помимо всего прочего, это позволит представить выражение (11) для финслеровой длины 16-вектора в полностью 4-мерном виде.

Пусть

$$D_2 = \begin{pmatrix} d^1_1 & d^1_2 & 0 & 0 \\ d^2_1 & d^2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D_2 = 1 \quad (d^{\hat a}_{\hat b} \in \mathbb{C}; \hat a, \hat b = 1,2). \tag{15}$$

Совокупность матриц (15) образует в $\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Подставим в (14) вместо D матрицу D_2 из (15). Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
L(D_2)^0_0 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_1} + d^1_2\overline{d^1_2} + d^2_1\overline{d^2_1} + d^2_2\overline{d^2_2}), & L(D_2)^0_1 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_2} + d^2_1\overline{d^2_2} + d^1_2\overline{d^1_1} + d^2_2\overline{d^2_1}),\\
L(D_2)^0_2 &= \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^1_1} + d^2_2\overline{d^2_1} - d^1_1\overline{d^1_2} - d^2_1\overline{d^2_2}), & L(D_2)^0_3 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_1} + d^2_1\overline{d^2_1} - d^1_2\overline{d^1_2} - d^2_2\overline{d^2_2}),\\
L(D_2)^1_0 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^2_1} + d^2_1\overline{d^1_1} + d^1_2\overline{d^2_2} + d^2_2\overline{d^1_2}), & L(D_2)^1_1 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^2_2} + d^2_1\overline{d^1_2} + d^1_2\overline{d^2_1} + d^2_2\overline{d^1_1}),\\
L(D_2)^1_2 &= \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^2_1} + d^2_2\overline{d^1_1} - d^1_1\overline{d^2_2} - d^2_1\overline{d^1_2}), & L(D_2)^1_3 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^2_1} + d^2_1\overline{d^1_1} - d^1_2\overline{d^2_2} - d^2_2\overline{d^1_2}),\\
L(D_2)^2_0 &= \frac{i}{2}(d^1_1\overline{d^2_1} - d^2_1\overline{d^1_1} + d^1_2\overline{d^2_2} - d^2_2\overline{d^1_2}), & L(D_2)^2_1 &= \frac{i}{2}(d^1_1\overline{d^2_2} - d^2_1\overline{d^1_2} + d^1_2\overline{d^2_1} - d^2_2\overline{d^1_1}),\\
L(D_2)^2_2 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^2_2} + d^2_2\overline{d^1_1} - d^1_2\overline{d^2_1} - d^2_1\overline{d^1_2}), & L(D_2)^2_3 &= \frac{i}{2}(d^1_1\overline{d^2_1} - d^2_1\overline{d^1_1} - d^1_2\overline{d^2_2} + d^2_2\overline{d^1_2}),\\
L(D_2)^3_0 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_1} - d^2_1\overline{d^2_1} + d^1_2\overline{d^1_2} - d^2_2\overline{d^2_2}), & L(D_2)^3_1 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_2} - d^2_1\overline{d^2_2} + d^1_2\overline{d^1_1} - d^2_2\overline{d^2_1}),\\
L(D_2)^3_2 &= \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^1_1} - d^2_2\overline{d^2_1} - d^1_1\overline{d^1_2} + d^2_1\overline{d^2_2}), & L(D_2)^3_3 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_1} - d^1_2\overline{d^1_2} - d^2_1\overline{d^2_1} + d^2_2\overline{d^2_2}),
\end{aligned} \tag{16}$$

$L(D_2)^{3+i}_{3+j} = L(D_2)^{8+i}_{8+j} = M(D_2)^i_j$ $(i,j = \overline{1,4})$, где

$$\begin{aligned}
M(D_2)^1_1 &= \frac{1}{2}(\overline{d^1_1} + d^1_1), & M(D_2)^3_1 &= \frac{1}{2}(\overline{d^2_1} + d^2_1),\\
M(D_2)^1_2 &= \frac{i}{2}(\overline{d^1_1} - d^1_1), & M(D_2)^3_2 &= \frac{i}{2}(\overline{d^2_1} - d^2_1),\\
M(D_2)^1_3 &= \frac{1}{2}(\overline{d^1_2} + d^1_2), & M(D_2)^3_3 &= \frac{1}{2}(\overline{d^2_2} + d^2_2),\\
M(D_2)^1_4 &= \frac{i}{2}(\overline{d^1_2} - d^1_2), & M(D_2)^3_4 &= \frac{i}{2}(\overline{d^2_2} - d^2_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(D_2)^2_1 &= \frac{i}{2}(d^1_1 - \overline{d^1_1}), \quad M(D_2)^4_1 = \frac{i}{2}(d^2_1 - \overline{d^2_1}),\\
M(D_2)^2_2 &= \frac{1}{2}(d^1_1 + \overline{d^1_1}), \quad M(D_2)^4_2 = \frac{1}{2}(d^2_1 + \overline{d^2_1}),\\
M(D_2)^2_3 &= \frac{i}{2}(d^1_2 - \overline{d^1_2}), \quad M(D_2)^4_3 = \frac{i}{2}(d^2_2 - \overline{d^2_2}),\\
M(D_2)^2_4 &= \frac{1}{2}(d^1_2 + \overline{d^1_2}), \quad M(D_2)^4_4 = \frac{1}{2}(d^2_2 + \overline{d^2_2}),
\end{aligned} \tag{17}$$

$L(D_2)^8_8 = L(D_2)^{13}_{13} = L(D_2)^{14}_{14} = L(D_2)^{15}_{15} = 1$, а все оставшиеся элементы матрицы преобразования $X'^A = L(D_2)^A_B X^B$ обращаются в нуль. Таким образом, при $D = D_2$ финслерова изометрия (13) принимает вид

$$\begin{aligned}
X'^\alpha &= L(D_2)^\alpha_\beta X^\beta \quad (\alpha,\beta = \overline{0,3}),\\
\theta'^i &= M(D_2)^i_j \theta^j \quad (i,j = \overline{1,4}),\\
X'^8 &= X^8,\\
\vartheta'^i &= M(D_2)^i_j \vartheta^j \quad (i,j = \overline{1,4}),\\
X'^{13} &= X^{13},\\
X'^{14} &= X^{14},\\
X'^{15} &= X^{15},
\end{aligned} \tag{18}$$

где $L(D_2)^\alpha_\beta$, $M(D_2)^i_j$ даются формулами (16) – (17) и использованы обозначения: $\theta^i = X^{3+i}$, $\vartheta^j = X^{8+j}$.

В работе [5] было показано, что (16) и (17) являются элементами матриц преобразований лоренцева 4-вектора и майорановского 4-спинора соответственно. Поэтому результат (18) сводится к утверждению, что при $D = D_2$ 16-вектор X^A расщепляется на лоренцев 4-вектор X^α, майорановские 4-спиноры θ^i, ϑ^j и лоренцевы 4-скаляры X^8, X^{13}, X^{14}, X^{15}.

Сказанное составляет суть процедуры размерной редукции, позволяющей выявлять “4-мерный состав” встречающихся 16-мерных выражений. Применим эту процедуру к весьма громоздкой формуле (11) для финслеровой длины 16-вектора X^A. Принимая во внимание (18), получаем

$$\begin{aligned}
|X|^4 = {} & X^{15}[X^8 g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu - g_{\mu\nu}X^\mu\overline{\theta}\gamma^\nu\theta] -\\
& - [(X^{13})^2 + (X^{14})^2] g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu - X^8 g_{\mu\nu}X^\mu\overline{\vartheta}\gamma^\nu\vartheta +\\
& + 2X^{13}g_{\mu\nu}X^\mu\overline{\theta}\gamma^\nu\vartheta + 2X^{14}g_{\mu\nu}X^\mu\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\nu\vartheta +\\
& + \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\overline{\theta}\gamma^\mu\theta\,\overline{\vartheta}\gamma^\nu\vartheta,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\mu,\nu = \overline{0,3}$, $\|g_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$ — матрица компонент метрического тензора пространства Минковского в псевдоортонормированном базисе,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\\ -i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix},\ \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ -i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрицы Дирака в майорановском представлении [5], $\theta, \vartheta \in \mathbb{R}^4$ — 4-компонентные столбцы действительных чисел, а черта обозначает дираковское сопряжение: $\overline{\theta} = \theta^\top \gamma^0$, $\overline{\vartheta} = \vartheta^\top \gamma^0$ (здесь $\top$ — значок транспонирования матрицы). Таким образом, выражение (11) записано в гораздо более компактной 4-мерной форме (19).

Заключение

Подводя итоги, сделаем ряд замечаний по поводу полученных результатов.

Прежде всего, следует отметить двойственную природу твисторов: с одной стороны они являются спинорами 6-мерного псевдоевклидова пространства с двумя времениподобными измерениями [6], а с другой, как показано в данной статье, — частным случаем финслеровых 4-спиноров 16-мерного линейного пространства с метрической функцией, определяемой алгебраической формой 4-й степени (11).

Кроме того, в статье дано явное описание изометрий этого 16-мерного финслерова пространства и процедуры размерной редукции, позволившей представить форму (11) в 4-мерном виде (19). Последнее весьма существенно, ибо свидетельствует о выполнимости принципа соответствия со стандартной релятивистской теорией на уровне геометрии.

Автор благодарен Ю. С. Владимирову, С. В. Болохову и А. В. Пилипенко за заинтересованное обсуждение проблем, затронутых в статье.

Литература

[1] D. Finkelstein. *Hyperspin and hyperspace.* Physical Review Letters **56**, 1532–1533 (1986).

[2] D. Finkelstein, S. R. Finkelstein, and C. Holm. *Hyperspin manifolds.* International Journal of Theoretical Physics **25**, 441–463 (1986).

[3] Ю. С. Владимиров, А. В. Соловьев. *Физическая структура ранга* $(4, 4; б)$ *и трехкомпонентные спиноры.* “Системология и методологические проблемы информационно-логических систем”. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1990. — Вычислительные системы, вып. 135. — С. 44–66.

[4] А. В. Соловьев. *К теории бинарных физических структур ранга* $(5, 5; б)$ *и выше.* “Системология и методологические проблемы информационно-логических систем”. — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1990. — Вычислительные системы, вып. 135. — С. 67–77.

[5] A. V. Solov'yov and Yu. S. Vladimirov. *Finslerian N-spinors: Algebra.* International Journal of Theoretical Physics **40**, 1511–1523 (2001).

[6] Р. Пенроуз, В. Риндлер. Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени. — М.: Мир, 1988. — 572 с.

[7] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 1994. — 320 с.

[8] М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1986. — 400 с.