ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ АССОЦИАТИВНО-КОММУТАТИВНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР И АССОЦИИРОВАННЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ

В. М. Чернов

Институт систем обработки изображений РАН
vche@smr.ru

В работе рассматриваются алгебраические уравнения, которым удовлетворяют элементы ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр. Исследована связь этих уравнений автоморфизмами алгебр. Вычислены однородные формы компонент элементов алгебр, являющиеся коэффициентами определяющих уравнений и которые могут быть ассоциированы, в частности, с известными метриками Минковского и Бервальда-Моора.

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Эффективность использования теории и аппарата конечномерных алгебр (см., например, [1], [2]) при решении задач геометрии, физики, информатики определяется, по мнению автора, следующим основным фактором.

Наиболее широкое распространение в приложениях получили *композиционные алгебры*, то есть алгебры с единицей, на векторных пространствах которых определены невырожденные квадратичные формы $N(x)$ (*нормы*) с условием $N(xy) = N(x)\,N(y)$. Рекурсивный метод их построения и классификация над различными полями связана с существованием в алгебрах, получаемых на каждом шаге рекурсии (анти)автоморфизма $x \mapsto \bar{x}$ второго порядка, продолжаемого рекурсивно для последующих шагов построения и порождающих указанные выше формы $N(x)$. За желание иметь алгебры, отличные от R и C, но с аналогами вещественной или комплексной нормы, приходится расплачиваться некоммутативностью и/или неассоциативностью таких алгебр. Кроме того, рекурсивный процесс Кэли-Диксона построения композиционных алгебр уже на третьем шаге приводит к неассоциативности и не может быть продолжен дальше [3]. Тем не менее, например, некоммутативная четырехмерная алгебра кватернионов успешно используется при решении задач механики, машинного зрения, в физике. Это связано как и с наличием нормы, так и, например, с элегантным представлением ортогональных преобразований трехмерного пространства не на "внешнем" матричном языке, а в терминах внутренних операций алгебры кватернионов, то есть "бескоординатно". Автор полностью согласен с мнением Э. Артина, что "...преподавание математики все еще страдает от энтузиазма, вызванного открытием этого изоморфизма (сопоставляющего линейному преобразованию векторного пространства некоторую матрицу – *В. Ч.*). Следствием было то, что геометрия фактически исключалась и заменялась вычислениями. Вместо наглядных отображений пространства, сохраняющих сложение векторов и умножение их на скаляры $<\ldots>$, в рассмотрение вводились матрицы. Мой опыт показывает, что доказательства, включающие в себя матрицы, могут быть сокращены на 50%, если выбросить матрицы"[1] [4]. Так, например, представление элемента четырехмерной алгебры, изоморфной алгебре (2×2)-матриц $M_2\,(R)$ в "клиффордовом" базисе с правилом умножения базисных элементов в форме

$$e_0^2 = e_0,\; e_1^2 = e_0,\; e_2^2 = e_0,\; e_3^2 = -e_0;$$
$$e_1 e_2 = -e_2 e_1,\; e_1 e_3 = -e_3 e_1,\; e_2 e_3 = -e_3 e_2;\; e_1 e_2 = e_3,$$

и инволютивным отображением (т. н. *симплектическая инволюция*)

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\mapsto \bar{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

естественным вложением $R \to M_2\,(R)$ с $y \mapsto y e_0,\; y \in R$, позволяет записать определяющее квадратное уравнение для элемента X с коэффициентами, выраженными в бескоординатной форме в терминах нормы $N\,(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и следа $Tr\,(X) = X + \bar{X} = a + d$:

$$X^2 - Tr\,(X)\, e_0 X + N\,(X)\, e_0 = 0, \qquad (1.1)$$

то есть, фактически, в форме частного (двумерного) случая теоремы Гамильтона-Кэли. Отсюда при надлежащей интерпретации следует, что все результаты "линейной" *геометрии двумерной плоскости* могут быть получены как следствия *алгебраических свойств четырехмерной алгебры* $M_2\,(R)$. Наиболее наглядным примером такой интерпретации является "хестеновский" формализм для алгебр Клиффорда, в котором за счет переопределения операций строится изоморфная алгебра, элементы которой могут быть интерпретированы как скаляры, векторы, бивекторы и т. д. (т. н. *"геометрическая алгебра"*).

В такой алгебре указанные объекты ведут себя "равноправным" образом по отношению к введенным операциям, несмотря на то, что при канонических интерпретациях линейных геометрических объектов эти объекты принадлежат разным множествам с различными структурами [5]. Тем не менее, "клиффордов" подход к геометрии все же принципиальным образом связан с анализом симметрий, ассоциированных с автоморфизмами (или антиавтоморфизмами) *только второго порядка* (т. е., инволюциями).

В отличие от композиционных алгебр, ассоциативно-коммутативные конечномерные алгебры уже не являются все квадратичными алгебрами над полем R. Поэтому алгебраические уравнения для их элементов естественным образом ассоциированы с автоморфизмами более высоких порядков, что дает основание предполагать возможность анализа свойств геометрических интерпретаций этих алгебр, выражаемых в терминах группы "симметрий" более высокого порядка, чем второй.

Первым шагом к реализации отмеченного выше комплекса идей и пониманию роли автоморфизмов высокого порядка при создании геометро-физических моделей пространства-времени является, по мнению автора, определение инвариантных характеристик уравнений, которым удовлетворяют элементы ассоциативно-коммутативных алгебр. То есть, определение аналогов форм $N\,(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и $Tr\,(X) = X + \bar{X} = a + d$ соотношения (1.1). Настоящая работа и представляет собой указанный первый шаг.

[1]Далее, правда, Э. Артин не без юмора замечает: "Иногда это невозможно; бывает, например, что нужно вычислить определитель".

Как ни парадоксально, но идея использования дополнительных (или переопределенных) операций на той или иной конечномерной алгебре, ассоциированных с автоморфизмами порядка выше второго, с целью алгебраической поддержки решения геометрических задач имеет почтенную историю. Существует достаточно экзотическая и малоизвестная алгебраическая структура, известная как "конечные почти-поля Цассенхауза" [6]. Именно, в поле F_q, $q = p^m$, (p – простое) вводится операция $x * y = y$ $(x, y \in F_q)$, выражающаяся через операцию умножения в поле F_q по закону $x * y = y \cdot \eta\,(x)$, где η – автоморфизм Фробениуса специального вида. Эта операция некоммутативна и неассоциативна (последнее -– в силу теоремы Веддербёрна). Тем не менее, некоторая $(*)$-степень $((((x * x) * x\ ) * ...) * x)$ элемента x есть элемент простого поля F_p и может рассматриваться как специфическая "норма" элемента алгебры F_q над полем F_p, порождаемая некоторым "полилинейным скалярным произведением". В соответствующей интерпретации, авторские результаты, цитированные в [6] и касающиеся конечных геометрий, могут быть переформулированы и передоказаны в терминах "полилинейного скалярного произведения". Естественно, что конечность полей F_q, следовательно, и почти-полей Цассенхауза, ограничивает круг задач, решаемых с применением такой техники, исключительно конфигурационными задачами конечной геометрии. Идея рассмотрения "полилинейных", в отличие от классических "билинейных", скалярных произведений в ассоциативно-коммутативных алгебрах с целью создания адекватных геометро-физических моделей принадлежит, по всей видимости, Д. Г. Павлову [7].

Отметим несколько результатов работы, которые, по мнению автора, не лишены некоторой методологической значимости.

1. Следствие 2.1. Инвариантность коэффициентов определяющего многочлена $\Phi\,(\xi; w)$ для w относительно действия 24-элементной группы автоморфизмов S_4. То есть, многочлен четвертой_степени $\Phi\,(\xi; w)$ наряду с корнем w имеет своими корнями все его автоморфные образы этого корня относительно автоморфизмов $\sigma \in S_4$.

2. Следствие 2.2. Четыре автоморфизма, использованные в доказательстве Теоремы 2.1 для построения определяющего многочлена, образуют подгруппу группы S_4, изоморфную циклической группе C_4 четвертого порядка. Однако, тот же самый многочлен порождают другие четыре автоморфизма образующие подгруппу четвертого порядка группы S_4, но изоморфную другой группе – прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка.

3. Следствие 2.3. Более того, тот же самый определяющий многочлен могут порождать четыре автоморфизма, не образующие группу относительно операции композиции отображений. Это позволяет сделать осторожное предположение, что требование групповой структуры порождающих автоморфизмов не является обязательным.

О терминологии. Автор сознательно дистанцируется от возможности какой-либо геометрической или физической интерпретации полученных результатов, оставляя эту работу профильным специалистам. Именно поэтому в работе используется "нейтральная" по отношению к интерпретации терминология: "определяющее уравнение", "определяющие формы", хотя, например, в таких "определяющих" формах, полученных в результате анализа *алгебраических* структурных свойств соответствующих алгебр, легко узнаются *метрические* формы типа Минковского или Бервальда-Моора (см., например, равенства (2.6)).

Обозначения. Без специальных оговорок в работе используются обозначения R, C для обозначения полей вещественных и комплексных чисел, соответственно. Для обозначения прямой суммы алгебр используется символ $\dot{+}$, а символ $\oplus$ используется обозначения для поразрядного сложения $(mod\,2)$ битового представления целых чисел. Символом $H(k)$ обозначается прямая сумма k экземпляров поля R иногда с некоторыми контекстными оговорками

1.2. Теорема Вейерштрасса

Исчерпывающая классификация ассоциативно-коммутативных алгебр без нильпотентных элементов содержится в *теореме Вейерштрасса* [8]:

Теорема 1.1. Любая ассоциативно-коммутативная конечномерная алгебра без нильпотентных элементов над R изоморфна прямой сумме алгебр R и C.

Из этой теоремы легко следует, что существует не более трех неизоморфных четырехмерных алгебр этого класса, а именно:

$$R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong \left(R\dot{+}R\right) \dot{+} \left(R\dot{+}R\right) \cong H\left(2\right) \dot{+} H\left(2\right) \cong H\left(4\right), \tag{1.2}$$

$$R\dot{+}R\dot{+}C \cong H\left(2\right) \dot{+} C, \tag{1.3}$$

$$C\dot{+}C. \tag{1.4}$$

Докажем неизоморфность этих трех алгебр. Выберем в каждой из алгебр базис, согласованный с ее представлением в виде прямой суммы:

- для алгебры $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ – базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей Кэли:

Таблица 1.1.

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	0	0	0
E_2	0	E_2	0	0
E_3	0	0	E_3	0
E_4	0	0	0	E_4

- для алгебры $R\dot{+}R\dot{+}C$ – базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей Кэли:

Таблица 1.2.

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	0	0	0
E_2	0	E_2	0	0
E_3	0	0	E_3	E_4
E_4	0	0	E_4	$-E_3$

- для алгебры $C\dot{+}C$ – базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей Кэли:

Таблица 1.3.

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	0	0
E_2	E_2	$-E_1$	0	0
E_3	0	0	E_3	E_4
E_4	0	0	E_4	$-E_3$

С учетом приведенных таблиц Кэли легко заметить, что умножение "постоянного" элемента $(aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4)$ на "переменный" элемент $(tE_1 + xE_2 + yE_3 + zE_4)$ равносильно действию линейных операторов на векторы компонент элементов $(tE_1 + xE_2 + yE_3 + zE_4)$, то есть вычислению матричных произведений

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

для алгебр $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$, $R\dot{+}R\dot{+}C$ или $C\dot{+}C$, соответственно. Ни одна из (4×4)-матриц в (1.5) не может быть представлена как матрица, соответствующая умножению в другой алгебре с базисом, полученным линейным преобразованием. Действительно, характеристические уравнения для матриц (1.5), являясь инвариантами относительно линейных преобразований базисов, соответствуют различным случаям корней многочленов четвертой степени: четырем вещественным, двум вещественным и паре комплексно сопряженных и двум парам комплексно сопряженных корней, соответственно.

2. Алгебра $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong H\,(4)$, ее автоморфизмы и метрические формы

2.1. Случай "изотропного" базиса

Рассмотрим алгебру $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong H\,(2)\,\dot{+}H\,(2) \cong H\,(4)$ с введенным выше базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.1. (Такой базис мы далее будем называть *изотропным*).

Мультипликативно нейтральным элементом (единицей алгебры) в этом базисе является элемент $I = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, а поле R канонически вкладывается в алгебру $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$:

$$R \to R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong H\,(4)\,, \quad x \mapsto xI, \quad x \in R.$$

Теорема 2.1. Алгебра $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ является алгеброй четвертой степени над R, то есть, любой элемент $w \in R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ удовлетворяет алгебраическому уравнению степени не выше четвертой с вещественными коэффициентами.

Доказательство. Пусть $w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \leftrightarrow (a, b, c, d)$. Рассмотрим четыре отображения алгебры $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ в себя, являющихся, очевидно, автоморфизмами:

$$\begin{aligned} \tau_0 :\ & w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto\ aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4, \\ \tau_1 :\ & w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto\ bE_1 + cE_2 + dE_3 + aE_4, \\ \tau_2 :\ & w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto\ cE_1 + dE_2 + aE_3 + bE_4, \\ \tau_3 :\ & w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto\ dE_1 + aE_2 + bE_3 + cE_4. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Другими словами, отображения переставляют циклическим образом компоненты (a, b, c, d) элемента w алгебры. Нетрудно показать, что элемент w является корнем многочлена

$$\Phi\,(\xi; w) = (\xi - \tau_0\,(w))\,(\xi - \tau_1\,(w))\,(\xi - \tau_2\,(w))\,(\xi - \tau_3\,(w))\,, \tag{2.2}$$

а также то, что коэффициенты полинома $\Phi(\xi; w)$ вещественные. Действительно, непосредственным вычислением получаем:

$$\Phi(\xi; w) = \xi^4 - s_1(w) I\xi^3 + s_2(w) I\xi^2 - s_3(w) I\xi^1 + s_4(w) I, \tag{2.3}$$

где вещественные коэффициенты $s_\nu(w)$ являются однородными симметричными формами компонент (a, b, c, d) элемента w алгебры:

$$\begin{aligned} s_1(w) &= a + b + c + d, \\ s_2(w) &= ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ s_3(w) &= bcd + acd + abd + abc, \\ s_4(w) &= abcd. \qquad \square \end{aligned} \tag{2.4}$$

Определение 2.1. Многочлен $\Phi(\xi; w)$ минимальной степени с вещественными коэффициентами и с коэффициентом при старшей степени ξ, равным единице, такой что $\Phi(\xi; w)|_{\xi=w} = 0$ будем называть *определяющим многочленом элемента* w, а его коэффициенты – *определяющими формами.*

Ясно, что один и тот же элемент w, представленный в разных базисах алгебры может иметь определяющие формы, различающиеся как функции этих компонент. В частности, формы (2.4) записаны как функции компонент элемента w, представленного в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.1 и т. д.

Несмотря на тривиальность результата Теоремы 2.1, она имеет важные следствия, нехарактерные для "классической" теории многочленов над полем.

Следствие 2.1. Формы (2.4) инвариантны относительно любой перестановки $\sigma \in S_4$ четырех компонент (a, b, c, d) элемента w алгебры. Следовательно, так как $\sigma \in S_4$ является автоморфизмом алгебры $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ над R , то из равенства $\Phi(\xi; w) = 0$ следует

$$\begin{aligned} &0 = \sigma\left(\Phi(\xi; w)|_{\xi=w}\right) = \\ &= \sigma(w)^4 - \sigma(s_1(w)) I\sigma(w)^3 + \sigma(s_2(w)) I\sigma(w)^2 - \sigma(s_3(w)) I\sigma(w)^1 + \sigma(s_4(w)) I = \\ &= \sigma(w)^4 - s_1(\sigma(w)) I\sigma(w)^3 + s_2(\sigma(w)) I\sigma(w)^2 - s_3(\sigma(w)) I\sigma(w)^1 + s_4(\sigma(w)) I = \\ &= \Phi\left(\xi; \sigma(w)|_{\xi=\sigma(w)}\right) = 0 \end{aligned}$$

То есть, многочлен *четвертой* степени $\Phi(\xi; w)$ наряду с корнем w имеет своими корнями еще, по крайней мере, 23 корня $\sigma(w)$, $\sigma \in S_4$, то есть, *все* его автоморфные образы относительно автоморфизмов $\sigma \in S_4$. Заметим, что применение автоморфизма σ к обеим частям равенства нулю определяющего многочлена $0 = \sigma\big(\Phi(\xi; w)|_{\xi=w}\big)$ в форме (2.2) с целью получения соотношения $\Phi\big(\xi; \sigma(w)|_{\xi=\sigma(w)}\big) = 0$ посредством цепочки равенств

$$\begin{aligned} &0 = \sigma(\Phi(w; w)) = \\ &= (\sigma(w) - (\sigma\circ\tau_0)(w))(\sigma(w) - (\sigma\circ\tau_1)(w))(\sigma(w) - (\sigma\circ\tau_2)(w))(\sigma(w) - (\sigma\circ\tau_3)(w)) = \\ &= (\sigma(w) - \tau_0(\sigma(w)))(\sigma(w) - \tau_1(\sigma(w)))(\sigma(w) - \tau_2(\sigma(w)))(\sigma(w) - \tau_3(\sigma(w))) = \\ &= \Phi(\sigma(w); \sigma(w)) \end{aligned}$$

не является корректным в силу некоммутативности группы автоморфизмов S_4. Существенным является факт вещественности форм $s_1(w), s_2(w), s_3(w), s_4(w)$, обеспеченный специальным выбором автоморфизмов $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$.

Следствие 2.2. Четыре автоморфизма $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, использованные в доказательстве Теоремы 2.1, образуют подгруппу группы S_4, изоморфную циклической группе C_4 четвертого порядка. Однако, как легко убедиться непосредственно, *тот же самый* многочлен (2.3) порождают *другие* четыре автоморфизма $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &: w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4, \\
\lambda_1 &: w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto cE_1 + dE_2 + aE_3 + bE_4, \\
\lambda_2 &: w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto bE_1 + aE_2 + dE_3 + cE_4, \\
\lambda_3 &: w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto dE_1 + cE_2 + bE_3 + aE_4,
\end{aligned}$$

образующие подгруппу четвертого порядка группы S_4, но изоморфную *другой группе* – прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка.

Следствие 2.3. Более того, *тот же самый* многочлен (2.3) порождают другие четыре автоморфизма $\{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$:

$$\begin{aligned}
\nu_0 &: w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto dE_1 + aE_2 + bE_3 + cE_4, \\
\nu_1 &: w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto bE_1 + cE_2 + dE_3 + aE_4, \\
\nu_2 &: w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto cE_1 + bE_2 + aE_3 + dE_4, \\
\nu_3 &: w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto aE_1 + dE_2 + cE_3 + bE_4,
\end{aligned}$$

не образующие группу относительно операции композиции отображений.

2.2. Случай "гиперболического" базиса

Под *базисом из гиперболических единиц* (или, для краткости, под *гиперболическим базисом*) мы далее будем понимать базис $\{E, I, J, K\}$ алгебры $H(4) \cong R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 2.1.

	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	E	K	J
J	J	K	E	I
K	K	J	I	E

Элемент $w \in H(4)$ представляется в форме $w = tE + xI + yJ + zK \ \ (t, x, y, z \in R)$, E – мультипликативно нейтральный элемент (единица) алгебры. Связь между изотропным базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и гиперболическим базисом $\{E, I, J, K\}$ осуществляется посредством линейного преобразования с ортогональной матрицей Адамара

$$had_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

где $\otimes$ – знак кронекеровского произведения. Получение точных формул, связывающих компоненты элемента $w \in H\left(4\right)$ при представлении в этих двух базисах, является хрестоматийным упражнением по линейной алгебре. Автор счел возможным опустить рутинные выкладки.

Совершенно очевидно, что каждому автоморфизму, определяемому действием элемента группы S_4, то есть, переставляющему компоненты элемента $w \in H\left(4\right)$, представленного в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, соответствует линейное преобразование компонент t, x, y, z элемента $w = tE + xI + yJ + zK$, и также реализующее некоторый автоморфизм алгебры $H\left(4\right)$. В частности, такими автоморфизмами являются:

$$\begin{aligned} \mu_0: &\quad w \mapsto \mu_0\left(w\right) = tE + xI + yJ + zK, \\ \mu_1: &\quad w \mapsto \mu_1\left(w\right) = tE + xI - yJ - zK, \\ \mu_2: &\quad w \mapsto \mu_2\left(w\right) = tE - xI + yJ - zK, \\ \mu_3: &\quad w \mapsto \mu_3\left(w\right) = tE - xI - yJ + zK. \end{aligned} \tag{2.5}$$

При представлении элемента $w \in H\left(4\right)$ в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ этой четверке преобразований соответствует действие на компоненты элемента некоторой подгруппы четвертого порядка (изоморфной прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка) группы S_4.

Записывая в этом случае определяющий многочлен, непосредственным вычислением получаем:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\xi; w\right) &= \left(\xi - \mu_0\left(w\right)\right)\left(\xi - \mu_1\left(w\right)\right)\left(\xi - \mu_2\left(w\right)\right)\left(\xi - \mu_3\left(w\right)\right) = \\ &= \left(\xi^4 - S_1\left(w\right)\xi^3 + S_2\left(w\right)\xi^2 - S_3\left(w\right)\xi^1 + S_4\left(w\right)\right)E, \end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered} S_1\left(\omega\right) = 4t \\ S_2\left(\omega\right) = 6t^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 \\ S_3\left(\omega\right) = -4tx^2 - 4y^2t - 4z^2t + 4t^3 + 8yzx = 4t(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 8yzx \\ S_4\left(\omega\right) = x^4 + y^4 + z^4 - 2t^2x^2 - 2t^2y^2 - 2t^2z^2 + t^4 + 8txyz - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. Необходимо отметить, что факты, приведенные в Следствиях 2.1.–2.3. остаются, разумеется, справедливыми и в базисе $\{E, I, J, K\}$, но с соответствующей интерпретацией представлений автоморфизмов.

2.3. Случай "смешанного " базиса

Под *смешанным базисом* мы далее будем понимать базис $\{B, AB, D, CD\}$ алгебры $H\left(4\right) \cong R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$, согласованный с ее изоморфным представлением в форме прямой суммы $H\left(2\right)\dot{+}H\left(2\right) \cong H\left(4\right)$ двух двумерных алгебр двойных чисел с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 2.2.

	B	AB	D	CD
B	B	AB	0	0
AB	AB	B	0	0
D	0	0	D	CD
CD	0	0	CD	D

При выборе такого базиса элемент $w \in H(2)\dot{+}H(2) \cong H(4)$ можно считать представленным в форме $w = (t + xA)B + (y + zC)D$, а мультипликативно нейтральным элементом алгебры $H(2)\dot{+}H(2)$ является $I = B + D$.

Выбирая четверку автоморфизмов

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &: w \to \zeta_0(w) = (t + xA)B + (y + zC)D,\\
\zeta_1 &: w \to \zeta_1(w) = (y + zA)B + (t + xC)D,\\
\zeta_2 &: w \to \zeta_2(w) = (y - zC)B + (t - xC)D,\\
\zeta_3 &: w \to \zeta_3(w) = (t - xC)B + (y - zC)D,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

получаем определяющий многочлен $\Phi(\xi; w)$ в форме

$$\Phi(\xi; w) = \xi^4 - \Sigma_1(w)I\xi^3 + \Sigma_2(w)I\xi^2 - \Sigma_3(w)I\xi^1 + \Sigma_4(w)I,$$

где

$$\begin{gathered}
\Sigma_1(w) = 2(t + y)\\
\Sigma_2(w) = 4ty + t^2 + y^2 - x^2 - z^2 = (t + 2y)^2 - 3y^2 - x^2 - z^2,\\
\Sigma_3(w) = 2ty^2 + 2t^2y - 2tz^2 - 2x^2y,\\
\Sigma_4(w) = t^2y^2 - t^2z^2 - x^2y^2 + x^2z^2.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Подробное рассмотрение в работе различных представлений определяющих многочленов и форм, ассоциированных с разными базисами, именно для алгебры $H(4)$ обуславливается разнообразием изоморфных представлений этой алгебры

$$R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong H(2)\dot{+}H(2) \cong H(4)$$

и наличием 24-элементной группы ее автоморфизмов над R, изоморфной S_4. Для алгебры $C\dot{+}C$ и, в особенности, алгебры $H_2\dot{+}C$ эти группы автоморфизмов над R более бедные, что требует более существенных ограничений произвола выбора четверки автоморфизмов и базисов в этих алгебрах для получения определяющего многочлена с действительными коэффициентами.

3. Алгебра $C\dot{+}C$

Под *базисом из эллиптическо-гиперболических единиц* (или, для краткости, под *ЭГ-базисом*) мы далее будем понимать базис $\{E, I, J, K\}$ алгебры $C\dot{+}C$ с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 3.1.

	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	J
J	J	K	$-E$	I
K	K	J	I	E

Элемент $w \in C\dot{+}C$ представляется в форме $w = tE + xI + yJ + zK$ $(t, x, y, z \in R)$, E – мультипликативно нейтральный элемент (единица) алгебры.

Под *смешанным базисом* в алгебре $C\dot{+}C$ мы далее будем понимать базис $\{B, AB, D, CD\}$, согласованный с ее изоморфным представлением в форме прямой суммы двух двумерных алгебр комплексных чисел с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 3.2.

	B	AB	D	CD
B	B	AB	0	0
AB	AB	$-B$	0	0
D	0	0	D	CD
CD	0	0	CD	$-D$

Элемент $w \in C\dot{+}C$ представляется в форме $w = (t + xA)\,B + (y + zC)\,D$, мультипликативно нейтральным элементом алгебры $C\dot{+}C$ является $I = B + D$.

Выбирая, в случае ЭГ-базиса четверку автоморфизмов в виде

$$\begin{aligned}
\mu_0 :&\quad w \mapsto \mu_0\,(w) = tE + xI + yJ + zK,\\
\mu_1 :&\quad w \mapsto \mu_1\,(w) = tE + xI - yJ - zK,\\
\mu_2 :&\quad w \mapsto \mu_2\,(w) = tE - xI + yJ - zK,\\
\mu_3 :&\quad w \mapsto \mu_3\,(w) = tE - xI - yJ + zK.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

а в случае смешанного базиса в виде

$$\begin{aligned}
\zeta_0 : w \to \zeta_0\,(w) = (t + xA)\,B + (y + zC)\,D,\\
\zeta_1 : w \to \zeta_1\,(w) = (y + zA)\,B + (t + xC)\,D,\\
\zeta_2 : w \to \zeta_2\,(w) = (y - zC)\,B + (t - xC)\,D,\\
\zeta_3 : w \to \zeta_3\,(w) = (t - xC)\,B + (y - zC)\,D,
\end{aligned}$$

получаем определяющие формы

$$\begin{gathered}
S_1\,(\omega) = 4t,\\
S_2\,(\omega) = 6t^2 + 2x^2 - 2y^2 + 2z^2,\\
S_3\,(\omega) = +4tx^2 - 4y^2t + 4z^2t + 4t^3 + 8yzx = 4t(t^2 + x^2 - y^2 + z^2) + 8yzx,\\
S_4\,(\omega) = x^4 + y^4 + z^4 + 2t^2x^2 - 2t^2y^2 + 2t^2z^2 + t^4 - 8txyz + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2
\end{gathered} \tag{3.2}$$

и

$$\begin{gathered}
\Sigma_1\,(w) = 2\,(t + y)\,,\\
\Sigma_2\,(w) = 4ty + t^2 + y^2 + x^2 + z^2 = (t + 2y)^2 - 3y^2 + x^2 + z^2,\\
\Sigma_3\,(w) = 2ty^2 + 2t^2y + 2tz^2 + 2x^2y,\\
\Sigma_4\,(w) = t^2\,y^2 + t^2z^2 + x^2\,y^2 + x^2z^2,
\end{gathered} \tag{3.3}$$

соответственно. Заметим, что формы (3.3) получаются из форм (2.8), а формы (3.2) из форм (2.6) формальной заменой $x \mapsto ix,\ z \mapsto iz$.

4. Алгебра $H_2\dot{+}C$

Под *смешанным базисом* в алгебре $H_2\dot{+}C$ мы далее будем понимать базис $\{B, AB, D, CD\}$, согласованный с ее изоморфным представлением в форме прямой суммы двух двумерных алгебр (алгебры двойных и алгебры комплексных чисел) с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 4.1.

	B	AB	D	CD
B	B	AB	0	0
AB	AB	B	0	0
D	0	0	D	CD
CD	0	0	CD	$-D$

Как и в предыдущих разделах, элемент $w \in H_2 \dot{+} C$ представляется в форме $w = (t + xA)\,B + (y + zC)\,D$, мультипликативно нейтральным элементом алгебры $H_2 \dot{+} C$ является $I = B + D$. Однако, в отличие от алгебр $C \dot{+} C$ и $H\,(2) \dot{+} H\,(2) \cong H\,(4)$, прямые слагаемые алгебры $H_2 \dot{+} C$ уже не обладают явно выраженной симметрией над полем R. Не останавливаясь на подробном обосновании правомочности "комплексной" замены переменной, заметим, что в этом случае характеристические формы получаются из форм (2.8) формальной заменой $x \mapsto ix$ и могут быть представлены в виде:

$$\begin{gathered}
\Sigma_1\,(w) = 2\,(t + z)\,, \\
\Sigma_2\,(w) = 4ty + t^2 + y^2 + x^2 - z^2 = (t + 2y)^2 - 3y^2 - x^2 + z^2, \\
\Sigma_3\,(w) = 2ty^2 + 2t^2y + 2tz^2 - 2x^2y, \\
\Sigma_4\,(w) = t^2\,y^2 + t^2z^2 - x^2\,y^2 - x^2z^2 = (t^2\, - x^2)\,(\,y^2 + z^2)\,.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

5. Некоторые обобщения на случай алгебр высших размерностей

Рассмотренный в работе подход к метрическим структурам на конечномерных ассоциативно коммутативных алгебрах был бы недостаточно общим, если бы автор не попытался перенести его на алгебры размерностей выше четвертой.

Разумеется, теорема Вейерштрасса остается справедливой в любых размерностях, однако количество неизоморфных алгебр растет с увеличением размерности, что затрудняет подробный анализ всевозможных метрических структур, порожденных коэффициентами определяющих уравнений для элементов этих алгебр. Тем не менее, мы остановимся на относительно подробном анализе структуры группы автоморфизмов, порождающих определяющие многочлены, для одного класса алгебр, получаемых рекурсивным применением процедуры удвоения размерности Грассмана-Клиффорда [9]–[11].

5.1. Процедура удвоения размерности Грассмана-Клиффорда

Рассмотрим алгебру A_1 над полем R. Пусть:

$$z_1 = z_0 + z_0'\varepsilon_1 \in A_1, \tag{5.1}$$

где

$$\varepsilon_1^2 = \beta_1, \quad z_0, z_0', \beta_1 \in R.$$

Процедура удвоения Грассмана-Клиффорда состоит в последовательном выполнении следующих шагов.

Шаг 1. Умножение элементов $z_1 = a_0 + b_0\varepsilon_1$, $z_1' = a_0' + b_0'\varepsilon_1 \in A_1$ определим следующим образом:

$$z_1 z_1' = (a_0 a_0' + \beta_1 b_0 b_0') + (a_0' b_0 + a_0 b_0')\,\varepsilon_1. \tag{5.2}$$

В зависимости от значения параметра β_1 получаются двумерные алгебры комплексных, двойных или дуальных чисел.

Шаг 2. На втором шаге рассмотрим алгебру A_2:

$$z = z_1 + z_1'\varepsilon_2 \in A_2,$$

где

$$\varepsilon_2^2 = \beta_2, \quad \beta_2 \in R,\ z_1, z_1' \in A_1,$$

с законом умножения базисных элементов в форме:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \alpha_{12}\varepsilon_2\varepsilon_1, \quad \alpha_{12} \in R.$$

Произведение $\varepsilon_1\varepsilon_2$ понимается как базисный элемент алгебры большей размерности.

Шаг 3. Продолжая индуктивно описанную процедуру, на n-м шаге получим алгебру A_n с элементами вида

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-1}'\varepsilon_n \in A_n,$$

где z_{n-1} , z_{n-1}' – элементы алгебры, построенной на $(n-1)$-м шаге, а ε_n – новый образующий элемент. Очевидно, что типичный элемент z_n новой алгебры A_n имеет вид

$$z_n = \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\\ \alpha_j \in \{0,1\}}} C_{\alpha_1\ldots\alpha_d}\varepsilon_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_d^{\alpha_d}, \tag{5.3}$$

где $C_{\alpha_1\ldots\alpha_d} \in R$.

Приведенный процесс построения охватывает значительное число алгебр, используемых в прикладных задачах и в физике для построения математических моделей. Отметим некоторые из них в качестве примеров [9]:

- алгебра Клиффорда размерности 2^n при $\varepsilon_s^2 = \pm 1, \quad \varepsilon_s\varepsilon_l = -\varepsilon_l\varepsilon_s,\ 1 \le s, l \le n$;
- алгебра Грассмана размерности 2^n при $\varepsilon_s^2 = 0, \quad \varepsilon_s\varepsilon_l = -\varepsilon_l\varepsilon_s,\ 1 \le s, l \le n$;
- алгебра Паули $n = 3$ при $\beta_s = 1$, $\alpha_{ls} = -1$;
- алгебра Дирака $n = 4$ при $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = -1$, $\alpha_{ls} = -1$;
- алгебра Калуцы $n = 4$ при $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = \beta_4 = -1$, $\alpha_{ls} = -1$.

5.2. Классификация алгебр размерности 2^d, полученных методом Грассмана-Клиффорда

Рассмотренные выше алгебры $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong H_R(4)$ и $C\dot{+}C \cong H_C(2)$ получались на втором шаге процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда. Заметим, что алгебра $R\dot{+}R\dot{+}C \cong H_R(2)\dot{+}C$ не получается с помощью этой процедуры. Оказывается, такое положение дел имеет место для любой размерности 2^d алгебр, полученных методом Грассмана-Клиффорда: существует ровно две "грассмано-клиффордовых" R-алгебры, хотя согласно теореме Вейерштрасса коммутативно-ассоциативных алгебр данной размерности существенно больше. Докажем классификационную теорему для "грассмано-клиффордовых" R-алгебр.

Пусть V есть d-мерное пространство над R с базисом ε_1, ε_2, $\ldots\varepsilon_d$.

Определение 5.1. Коммутативно-ассоциативной гиперкомплексной алгеброй B_d будем называть 2^d-мерную R-алгебру с базисом:

$$\Lambda = \left\{ \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \{0,1\}\ ;\ I = \{1, \ldots, d\} \right\}, \tag{5.4}$$

где $\varepsilon_i^0 = 1$, $\varepsilon_i^1 = \varepsilon_i$, и законом умножения базисных элементов алгебры, индуцированным следующим правилом преобразования произведений базисных элементов пространства V:

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = \beta_i,\ i, j \in I. \tag{5.5}$$

Алгебры B_d могут быть получены применением процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда. Действительно, связывая с двоичными наборами индексов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ соответствующие целые числа

$$t = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \ldots + \alpha_d 2^{d-1}, \quad \alpha_j \in \{0,1\}, \tag{5.6}$$

где $t \in T = \left\{0,\, 1, \ldots, 2^d - 1\right\}$, можем занумеровать элементы множества Λ:

$$E_t = \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_d^{\alpha_d}. \tag{5.7}$$

Тогда произвольный элемент $g \in B_d$ может быть представлен в форме

$$g = \xi_0 E_0 + \ldots + \xi_{2^d-1} E_{2^d-1} = \sum_{t \in T} \xi_t E_t. \tag{5.8}$$

Операция сложения в алгебре B_d реализуется покомпонентно. Пусть

$$g = \sum_{t \in T} \xi_t E_t, \quad h = \sum_{t \in T} \eta_t E_t, \quad g, h \in B_d, \tag{5.9}$$

тогда

$$(g + h) = \sum_{t \in T} (\xi_t + \eta_t)\, E_t. \tag{5.10}$$

Операция умножения элементов B_d, представленных в виде (5.8), определяется правилами (5.5) для умножения базисных элементов пространства V, как элементов алгебры.

Следующая лемма позволяет указать явную связь между нумерацией (5.6) сомножителей и нумерацией произведений (5.4).

Лемма 5.1. Пусть $\oplus$ – поразрядное сложение по модулю 2:

$$\oplus : T \times T \to T, \quad t \oplus \tau = \sum_{i \in I} \left(\left(\alpha_i + \alpha_i^{'} \right) mod\, 2 \right) 2^{i-1}, \tag{5.11}$$

где

$$t = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \quad \tau = (\alpha_1', \ldots, \alpha_d'); \quad t, \tau \in T; \quad \alpha_i, \alpha_i' = 0, 1; \quad i \in I. \tag{5.12}$$

Пусть функция $h_i : T \times T \to \{0,1\}$ определена равенством

$$h_i\,(t, \tau) = \alpha_i \alpha_i', \quad i \in I, \tag{5.13}$$

а функция $\Psi : T \times T \to \{-1, 1\}$ равенством

$$\Psi\,(t, \tau) = \prod_{i \in I} \beta_i^{h_i(t,\tau)}, \quad \beta_i = \{-1, 1\}. \tag{5.14}$$

Тогда правила умножения базисных элементов Λ можно записать в форме:

$$E_t E_\tau = \Psi\left(t, \tau\right) E_{t \oplus \tau}, \quad \forall\, t, \tau \in T. \tag{5.15}$$

Доказательство. Пусть, согласно (5.7)

$$E_t = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i}, \quad E_\tau = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i'},$$

тогда

$$E_t \cdot E_\tau = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i + \alpha_i' \pm 2h_i\left(\alpha_i, \alpha_i'\right)}.$$

Учитывая, что $\alpha_i + a_i' - 2h_i\left(\alpha_i, \alpha'\right)_i \equiv \alpha_i + a_i' \ (mod\, 2)$, получаем

$$\prod_{i \in I} \varepsilon_i^{2 \cdot h_i\left(\alpha_i, \alpha_i'\right)} E_{t \oplus \tau} = \Psi\left(t, \tau\right) E_{t \oplus \tau}. \qquad \square$$

Из Определения 5.1. непосредственно не следует единственность алгебры B_d с базисом Λ и умножением, определенным соотношением (5.5). Классификация алгебр, введенных этим определением, приводится в Теореме 5.1. Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 5.2. Если для некоторого индекса $l \in I$ в (5.5) справедливо равенство $\beta_l = -1$, то

$$\sum_{t \in T} E_t^2 = 0. \tag{5.16}$$

Доказательство. Разобьем сумму в левой части доказываемого равенства (5.16) на две суммы таким образом, что в одну сумму будут входить базисные элементы, содержащие ε_l^2, а в другую – не содержащие ε_l^2. Тогда получим:

$$\sum_{t \in T} E_t^2 = \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t,t) \neq 0}} E_t^2 + \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t,t) = 0}} E_t^2.$$

Количество слагаемых в обеих суммах одинаково:

$$\sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t,t) \neq 0}} 1 = \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t,t) = 0}} 1 = 2^{d-1}$$

Поэтому, так как $\beta_l = -1$, получаем

$$\left(1 + \beta_l\right) \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t,t) \neq 0}} E_t^2 = 0. \qquad \square$$

Следствие 5.1. Если существует $t \in T$ такое, что $E_t^2 = -1$, тогда среди базисных элементов алгебры B_d содержится ровно 2^{d-1} элементов, квадрат которых равен (-1). Ясно, что если $\beta_i = 1$, для всех $i \in I$, то для всех квадратов базисных элементов алгебры B_d также справедливо равенство $E_t^2 = +1$. Для единообразия обозначений в этом разделе алгебру B_d, в которой $\beta_i = 1$ для каждого $i \in I$, будем обозначать B_d^+. Нетрудно показать, что

$$B_d^+ \cong \underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^d} \cong H_R\left(2^d\right)$$

Основным результатом раздела является теорема, утверждающая, что структура коммутативно-ассоциативной алгебры с базисом (5.4) (то есть, алгебры, построенной методом Грассмана-Клиффорда) зависит от существования *хотя бы одного* базисного элемента $\varepsilon_j \in V$ "порождающего" векторного пространства V, квадрат которого равен (-1).

Теорема 5.1. Для любого $d \geq 1$ существует только две неизоморфных 2^d-мерных алгебры с операциями, определенными соотношениями (5.10), (5.15), а именно:

$$B_d^+ \cong \underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^d} \cong H_R\left(2^d\right) \cong \underbrace{H_R\left(2\right)\dot{+}H_R\left(2\right)\dot{+}\ldots\dot{+}H_R\left(2\right)}_{2^{d-1}}, \tag{5.17}$$

$$B_d^- \cong \underbrace{C\dot{+}C\dot{+}\ldots\dot{+}C}_{2^{d-1}} \cong H_C\left(2^{d-1}\right). \tag{5.18}$$

Доказательство. Согласно следствию 5.1, если $\beta_i = 1$, для всех $i \in I$ то соответствующая алгебра есть

$$B_d^+ \cong \underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^d} \cong H_R\left(2^d\right).$$

Поэтому предположим, что существует, по крайней мере, один базисный элемент ε_l пространства V, для которого $\varepsilon_l^2 = -1$, $l \in I$. Без ограничения общности будем считать $l = 1$. В базисе Λ этому элементу соответствует элемент E_1. Выберем E_t такой, что $E_t^2 = 1$. Такой элемент существует, так как, либо существует $\beta_k = 1$, либо можно взять комбинацию $\varepsilon_1\varepsilon_k = E_{1\oplus k}$, где $\beta_k = -1$, $k \neq 1$. Тогда любой элемент $h \in B_d^-$ можно представить в виде

$$h = \sum_{i \in T} \eta_i E_i = \sum_{\substack{i \in T \\ h_k(i,i)=0}} \eta_i E_i + \sum_{\substack{i \in T \\ h_i(i,i)=1}} \eta_i E_i.$$

Из леммы 5.1 следует, что

$$E_i = \frac{1}{\Psi\left(t,t\right)} E_i E_t E_t$$

или, в данном случае, $E_i = E_i E_t E_t$. Отсюда легко получаем равенство

$$h = \sum_{\substack{i \in T \\ h_k(i,i)=0}} \eta_i E_i + \Bigg(\sum_{\substack{i \in T \\ h_k(i,i)=1}} \eta_i E_i E_t\Bigg) E_t.$$

Заметим, что все возможные произведения $E_i E_t$ не содержат образующего элемента ε_k, поэтому $h = a + bE_t$, где a, $b \in B_{d-1}$.

Непосредственно проверяется, что отображение $\Theta : B_d \to B_{d-1}\dot{+}B_{d-1}$, задаваемое соотношением $h = \alpha + \gamma E_t \mapsto \left(\alpha + \gamma, \alpha + \Psi\left(k,k\right)\gamma\right) \in B_{d-1}\dot{+}B_{d-1}$, является изоморфизмом. Применяя последовательно Θ к B_{d-1}^-, по индукции получаем

$$B_d \cong \Big(\underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^{(d-1)}}\Big) + \varepsilon_1 \cdot \Big(\underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^{(d-1)}}\Big). \tag{5.19}$$

Так как $\varepsilon_1^2 = -1$, то

$$B_d \cong \underbrace{C\dot{+}C\dot{+}\ldots\dot{+}C}_{2^{d-1}} = B_d^-.$$

Таким образом, доказано, что любая алгебра, в которой существует базисный элемент векторного пространства V, квадрат которого равен -1, изоморфна алгебре B_d^-. □

Учитывая доказанную выше классификационную теорему, далее везде под алгеброй B_d^- будем понимать алгебру со следующим правилом умножения базисных элементов пространства V:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_j\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = -1,\, i \in I, \tag{5.20}$$

а под алгеброй B_d^+ будем понимать алгебру со следующим правилом умножения базисных элементов пространства V:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_j\varepsilon_i,\ \ \varepsilon_i^2 = +1,\, i \in I, \tag{5.21}$$

Легко проверить, что для произвольного номера $l,\ l \in T$ верны равенства

$$0 = 0 \oplus 0 = l \oplus l,\ \ l = l \oplus 0 = 0 \oplus l. \tag{5.22}$$

Для функции Ψ и произвольного номера $l \in T$ справедливы равенства

$$\Psi\left(0,0\right) = \Psi\left(0,l\right) = \Psi\left(l,0\right) = \tfrac{1}{\beta_l}\Psi\left(l,l\right) \tag{5.23}$$

и, согласно (5.20), равенства

$$\Psi\left(0,0\oplus 0\right) = \tfrac{1}{\beta_l}\Psi\left(l,l\oplus 0\right) = \Psi\left(0,l\oplus 0\right) = \Psi\left(l,0\oplus 0\right). \tag{5.24}$$

5.3. Автоморфизмы алгебр размерности 2^d, полученных методом Грассмана-Клиффорда

Нижеследующая теорема обобщает утверждение, касающееся автоморфности отображений (2.5) и (3.1) на случай произвольной размерности 2^d.

Теорема 5.2. Пусть $\psi:\ T \times T \to \{-1,1\}$:

$$\psi\left(j,t\right) = \prod_{i\in I}\left(-1\right)^{h_i(j,t)}. \tag{5.25}$$

Тогда множество из 2^d отображений $\sigma_j : B_d \to B_d$, таких, что

$$\sigma_j\left(\chi\right) = \sum_{i\in T} c_i\psi\left(j,i\right)E_i, \tag{5.26}$$

где $\chi = (c_0,\ldots,c_{2^d-1}) \in B_d$, $c_i \in R$, $j \in T$, является множеством автоморфизмов алгебры B_d, независимо от того, какая именно алгебра рассматривается: алгебра B_d^+ или алгебра B_d^-.

Доказательство. Проверим, что отображения системы (5.25) биективны и сохраняют операции сложения и умножения. Действительно, базисные элементы Λ

не являются делителями нуля и отображения σ_j линейны. Таким образом, отображения σ_j являются биекциями. Покажем, что отображения σ_j сохраняют операции сложения и умножения. Пусть элементы $g, h \in B_d$ представлены в форме (5.8), тогда должны выполняться равенства:

$$\sigma_j\,(g+h) = \sigma_j\,(g) + \sigma_j\,(h)\,, \tag{5.27}$$

$$\sigma_j\,(gh) = \sigma_j\,(g) \cdot \sigma_j\,(h)\,. \tag{5.28}$$

Справедливость (5.27) легко следует из равенств:

$$\sigma_j\,(g+h) = \sum_{i\in T} (\xi_i + \eta_i)\,\psi\,(j,i)\,E_i = \sum_{i\in T} \xi_i \psi\,(j,i)\,E_i + \sum_{i\in T} \eta_i \psi\,(j,i)\,E_i = \sigma_j\,(g) + \sigma_j\,(h)\,.$$

Докажем (5.28). Справедливо равенство

$$\begin{aligned}\sigma_j\,(gh) &= \sum_{i\in T}\sum_{t\in T} \Psi\,(t, t\oplus i)\,\xi_{i\oplus t}\eta_t \psi\,(j,i)\,E_i = \\ &= \sum_{t\in T} \eta_t \sum_{i\in T} \Psi\,(t, t\oplus i)\,\xi_{i\oplus t} \psi\,(j,i)\,E_i.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Далее, используя (5.15), (5.22) и учитывая, что $i = t \oplus i \oplus t$, преобразуем (5.29) к виду:

$$\sigma_j\,(gh) = \sum_{t\in T} \eta_t \psi\,(j,t)\,\Psi\,(t,t)\,E_t \sum_{i\in T} \xi_{i\oplus t} \psi\,(j, i\oplus t)\,\Psi\,(t, t\oplus i)\,E_{i\oplus t}. \tag{5.30}$$

Так как индекс i принимает все значения множества T, то и индекс $i \oplus t$ принимает все значения множества T. Поэтому, полагая в (5.29) $\tau = t \oplus i$, получаем:

$$\sigma_j\,(gh) = \sum_{t\in T} \eta_t \psi\,(j,t)\,E_t \sum_{\tau\in T} \xi_\tau \psi\,(j,\tau)\,E_\tau = \sigma_j\,(g) \cdot \sigma_j\,(h)\,.$$

Предположим, что существуют отображения $\sigma_j\,(\chi) = \sigma_p\,(\chi)$, где $j \neq p$. Тогда последовательно получаем цепочку равенств:

$$\sigma_j\,(\chi) = \sigma_p\,(\chi)\,,$$

$$\prod_{i\in T} (-1)^{h_i(j,l)} = \prod_{i\in T} (-1)^{h_i(p,l)}\,,\ \ l = \overline{0, 2^d - 1},$$

$$\sum_{i\in T} h_i\,(j,l) = \sum_{i\in T} h_i\,(p,l)\,, \quad l = \overline{0, 2^d - 1},$$

откуда следует равенство $j = p$, что является противоречием. Тогда, если $j \neq p$, то и $\sigma_j\,(\chi) \neq \sigma_p\,(\chi)$. Поэтому все автоморфизмы σ_j, индексированные числами множества T с $card\,T = 2^d$ различны. □

Рассмотрим множество из 2^d отображений $\sigma_j : B_d \to B_d$, определенных в теореме 5.2.

Следующее утверждение гарантирует вещественность коэффициентов определяющего уравнения элемента алгебры B_d в случае использования для получения этого уравнения автоморфизмов, рассмотренных в Теореме 5.2. Мы опускаем достаточно громоздкое, но совершенно прозрачное индуктивное доказательство этого утверждения.

Теорема 5.3. Пусть для элемента $w \in B_d$ многочлен $\Phi(\xi, w)$ определен равенством

$$\Phi(\xi, w) = \prod_{\sigma_j} (\xi - \sigma_j(w)) = \sum_{k=0}^{2^d} \xi^k (-1)^{2^d - k} S_{2^d - k}(w).$$

Тогда:

a) элемент w и его автоморфные образы $\sigma_j(w)$ являются корнями многочлена $\Phi(\xi, w)$;

b) значения функций $S_{2^d-k}(w)$ суть вещественные числа;

c) функции $S_{2^d-k}(w)$ являются однородными функциями степени $\left(2^d - k\right)$ вещественных компонент $(c_0, c_1, ..., c_{2^d-1})$ элемента w. $\square$

Работа выполнена при поддержке некоммерческого фонда развития исследований по финслеровой геометрии.

Литература

1. E. Bayro-Corrochano, G. Sobczyk (Eds). *Advanches in Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering.*-Birkhauser, Boston, 2001

2. G. Sommer (Eds) *Geometric Computing with Clifford Algebras.* Springer Verlag, 2000

3. *Общая алгебра.* (Под ред. Л. А. Скорнякова). М.: Наука, 1990

4. Э. Артин. *Геометрическая алгебра*, М.: Наука, 1969.

5. Lasenby, A. N., Doran, C. J. L. and Gull, S. F. (1996). *Lectures in Geometric Algebra,* In: W. E. Baylis, Ed., *Clifford (Geometric) Algebras with Applications to Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhauser, Boston, 1996.

6. М. Холл. *Теория групп.* ИЛ, 1962.

7. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.* № 1, 2004, с. 5–19.

8. Allenby, R. B. J. T., *Rings, Fields and Groups: An Introduction to Abstract Algebra*, 2nd edition, 1991.

9. Березин Ф. А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.* М., Изд-во МГУ, 1983.

10. Бурлаков М. П. Клиффордовы структуры на многообразиях. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения.* М.: ВИНИТИ, 1995. Т. 30: Геометрия 3, с. 205–257.

11. Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа.* М.: Наука, 1973.