КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И МЕТРИКА БЕРВАЛЬДА-МООРА (О ФОРМАЛИЗМЕ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ)

С. В. Сипаров

Кафедра физики, Государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия

sergey@siparov.spb.su

Обсуждаются особенности применения финслеровой геометрии к построению теории пространства-времени. Подчеркивается роль алгебраического подхода, с помощью которого удается получить многие уравнения теоретической физики до введения геометрии. На основе формального использования функции, связанной с метрикой Бервальда-Моора выводятся канонические уравнения Гамильтона, которые можно использовать для дальнейшего построения физической теории в финслеровом пространстве.

1. Введение

Интерес к финслеровым пространствам может быть проявлен с трех направлений.

- Первое соответствует чисто математическому подходу, для которого характерно последовательное рассмотрение самосогласованных конструкций, возникающих на базе произвольно вводимых аксиом.
- Второе соответствует подходу теоретической физики. В его рамках требуется мотивации и имеется в виду сравнение новой теории с ранее известными, а также сопоставление используемых математических объектов и их свойств с результатами измерений, выполняемых в реальном мире.
- Третье направление характерно, скорее, для философии или, по крайней мере, для некоторой метатеории. Здесь обсуждается сама возможность использования данной математической конструкции для описания реального мира, а также смысл используемых понятий.

Второе и третье направления, естественно, перекликаются с возникновением, использованием и достижениями теории относительности Эйнштейна, построенной для изотропного пространства-времени Римана. Отличительной чертой финслеровой геометрии является зависимость метрического тензора не только от координаты, но и от направления некоторого вектора. Это означает, что во втором и третьем подходах речь может идти о возможных экспериментах, в которых проявляется анизотропия окружающего мира и ее следствия, а также о самой возможности такой анизотропии.

В монографии Р. И. Пименова [1] было проведено построение анизотропного финслерова обобщения теории относительности как структуры порядка. В [1] получены уравнения, аналогичные уравнению Эйнштейна в применении к финслеровым пространствам, причем рассмотрены примеры использования различных метрических функций. Работа [1] носит общематематический характер, а ее автор доказывает целый ряд утверждений, важных для всех трех направлений, упомянутых выше. Приведем некоторые из этих утверждений.

1. Финслерова геометрия доставляет модель пространства-времени, которая никакими наблюдениями за планетными орбитами не может быть отличима от Шварцшильдовского решения в пределах одинаковой точности наблюдений. В то же время ее особенностями является то, что она исключает возможность коллапса (образования черных дыр), а для Финслер-Фридмановского случая сценарий первых 6 секунд может быть совершенно иным, хотя красное смещение при этом остается.

2. В анизотропном мире энергия и импульс не обязательно сохраняются.

3. Анизотропия пространства-времени не изменяет структуру гамильтонова подхода при построении физической теории.

4. Для построения формальной базы теоретического рассмотрения финслерова многообразия существенно необходимо правило Лейбница (о дифференцировании произведения).

5. Если понимать одновременность в "радарном смысле" (как это делается в теории относительности Эйнштейна), то опыт типа опыта Майкельсона приведет к заключению об изотропности пространства, даже если оно таковым не является. Т. е. с помощью такого опыта обнаружить анизотропию невозможно. Поэтому принимать радарное определение как единственно верное нецелесообразно. Одновременно зависимость метрического тензора от направления приводит к неоднозначности в определении ортогональной (к мировой линии наблюдателя) гиперплоскости, что, в свою очередь, приводит к фундаментальной проблеме: считать ли "одновременность" понятием каузальной структуры, или считать ее понятием структуры лагранжиана.

6. В ходе построения финслеровой теории анизотропного пространства-времени выявляется неизбежность перехода от привычных гладких функций к функциям более широкого класса

Первые два вывода означают, что обнаружить анизотропию Вселенной как таковую наблюдательными средствами едва ли возможно. В то же время следствия такой анизотропии, проявляющиеся как нарушения законов сохранения, можно пытаться использовать как при интерпретации опытов с частицами (на такую возможность указывалось, в частности, в работе [2]), так и в космологических масштабах.

Выводы 3 и 4 означают, что при изучении финслеровых пространств применимы методы канонических уравнений и алгебр Ли.

Вывод 5 ставит серьезную проблему, решение которой, вероятно, выходит за рамки не только математики, но и физики.

Выводу, изложенному в пункте 6, посвящена отдельная работа [3], в которой автор указывает, что «детерминизм не был "обнаружен в природе", детерминизм не был "выведен логически" или "доказан математически". Мы всего лишь *верили в детерминизм*». В ней также подчеркивается следующее. Существенно недифференцируемые структуры важны в эмпирически-феноменологическом описании физической реальности – в науке о природе появились фрактальные объекты [4]. Общая теория относительности и базирующаяся на ней физическая космология совместимы только с очень хорошо дифференцируемыми структурами. Поэтому следует построить такой аналог общей теории относительности, который был бы свободен от гипотезы дифференцируемости используемых функций.

В связи с использованием конкретно метрики Бервальда-Моора

$$s(X) = \sqrt[4]{x^1x^2x^3x^4} = (x^1x^2x^3x^4)^{1/4} \tag{1}$$

можно упомянуть работу [5], в которой она была использована для описания гравитационного поля в финслеровом пространстве. Автор полагал, что им было использовано понятие объема, однако это скорее просто указывало на вид метрической функции, нежели на действительное использование понятия объема для метризации.

В работах [6–8], в которых авторы также стремились использовать метрику Бервальда-Моора, основой рассмотрения служит введенное в [6] понятие скалярного полипроизведения. Необходимо подчеркнуть, что, несмотря на вполне удовлетворительную аксиоматику, этот объект является новым и пока еще не использовался для непосредственной интерпретации физических экспериментов, поэтому следует внимательно подходить к его применению. Следует отметить также, что одновременность в этих работах понималась именно в радарном смысле, что тоже может создать проблемы при интерпретации.

2. Алгебраический подход Кауфмана

Обстоятельства, отмеченные в выводах 3, 4 и 6 работы [1], привлекают внимание к работе Л. Кауфмана [9]. Алгебры Ли объявляются в [9] возможной новой основой описания физической реальности, что подчеркивает роль формализма при построении физической теории, обсуждавшуюся в работе [10], где было уделено внимание в том числе и роли детерминизма в теории. В работе [9] строится алгебра Ли, в которой сначала вводится операция дискретного дифференцирования, что немедленно приводит к расширению класса используемых функций. Затем выполняется переход к коммутаторам и введение операторов сдвига – элементов алгебры, сопряженных к исходным элементам, что непосредственно связано со стремлением обеспечить выполнение правила Лейбница. На основе тождества Якоби выполняется построение формальных алгебраических структур, вид которых оказывается совпадающим с целым рядом уравнений теоретической физики, в том числе и с каноническими уравнениями Гамильтона. При этом фактически задействовано преобразование Лежандра, характерное для этого подхода.

Накладывая ограничения на коммутационные свойства переменных (и соответствующих им операторов сдвига) с целью получить «пространство с "разумной" кривизной», можно получить алгебраические структуры, в которых легко угадываются уравнения теоретической физики. В частности, если элементам алгебры $\{X_0, X_1, ...X_n\}$ соответствуют коммутационные операторы $\{H, P_1, ...P_n\}$, то, используя введенные определения, получают соотношения

$$\frac{dP_i}{dX_0} = -\frac{\partial H}{\partial X_i}; \qquad \frac{dX_i}{dX_0} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2}$$

вид которых в точности соответствует каноническим уравнениям Гамильтона. Далее в тех же терминах может быть формально введен оператор кривизны, определяющий для двух данных элементов X и Y степень "некоммутативности" соответствующих им операторов ∇_X и ∇_Y по отношению к "некоммутативности" X и Y. Далее появляется коммутатор $g_{ij} = [X_i, \dot{X}_j]$, который может быть естественно соотнесен с метрическим тензором, и связность Леви-Чивиты $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\nabla_i g_{jk} + \nabla_j g_{ik} - \nabla_k g_{ij})$, которая возникает в [9] исключительно из исчисления коммутаторов и тождества Якоби и не имеет изначальной связи с геометрией. Схожим формальным образом получаются соотношения, совпадающие по виду с уравнениями диффузии, Шредингера, Максвелла, калибровочных теорий.

Таким образом, структура некоторых основополагающих уравнений теоретической физики, в частности, уравнений Гамильтона, не связана с предварительным выбором геометрии, используемой для моделирования пространства-времени. Это позволяет удобным образом формально использовать метрическую функцию при построении канонических уравнений.

3. Канонические переменные

Используем последнее обстоятельство для вовлечения в теорию метрики Бервальда-Моора. Рассмотрим векторное пространство с векторами $X = \{x^i\}$, $i = 1, 2, ...n$, и, выбирая координатную систему надлежащим образом и считая, что все $x^i > 0$, введем скалярную функцию вида

$$s^2(X) = \sqrt{x^1 x^2 x^3 x^4}. \tag{3}$$

Она, с одной стороны, очевидным образом связана с метрикой Бервальда-Моора (1), а с другой, – позволяет использовать преобразование Лежандра и определить вектор P, сопряженный вектору X, как градиент введенного скаляра

$$P \equiv \nabla \frac{1}{2} s^2(X) = s(X) \nabla s(X). \tag{4}$$

(Обычно в дальнейшем функцию $s^2(X)$ используют для построения метрического тензора Картана $h_{ik} = \frac{1}{2}\,\partial_i \partial_k s^2(X)$.)

Считая $X = \{x^i\}$ записью вектора X в контравариантных компонентах, получим выражение для ковариантных компонент вектора $P = \{p_i\}$ в n-мерном случае из аналога формулы (3) и формулы (4) в виде

$$p_i = \frac{s^2(X)}{n x^i} = \frac{(x^1 x^2 ... x^n)^{2/n}}{n x^i}\,. \tag{5}$$

Тогда в случае $n = 4$ эти компоненты имеют вид

$$p_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2 x^3 x^4}{x^1}}; \quad p_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^1 x^3 x^4}{x^2}}; \quad p_3 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^1 x^2 x^4}{x^3}}; \quad p_4 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^1 x^2 x^3}{x^4}}\,. \tag{6}$$

Определим (псевдо)скалярное произведение (X, Y) следующим образом

$$(X, Y) = Y \frac{1}{2} \nabla s^2(X) = y^i x_i\,, \tag{7}$$

где по повторяющимся значкам ведется суммирование. Существенно, что скалярное произведение зависит от порядка сомножителей. С учетом (5, 7) скалярное произведение (X, Y) будет задаваться выражением

$$(X, Y) = y^i x_i = Y \frac{1}{2} \nabla s^2(X) = \frac{s^2(X)}{4} \sum_{k=1}^{4} \frac{y^k}{x^k}\,. \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что

$$(X, X) = s^2(X)\,, \tag{9}$$

что соответствует обычному представлению о связи метрики и нормы, квадрат которой связан со скалярным произведением.

(При необходимости можно ввести и угол φ вектора Y относительно X. Это будет число, определяемое формулой $ch\,\varphi = \frac{(X,Y)}{s(X)s(Y)}$. Конечно, угол от X к Y не равен углу от Y к X, поскольку скалярное произведение некоммутативно. Сложение таких углов на 2-плоскости не аддитивно).

Если скалярное произведение $(X,Y)=0$, то вектор Y можно назвать ортогональным к X (при этом, вообще говоря, X не ортогонален Y). Тогда гиперплоскость всех таких Y можно назвать гиперплоскостью, ортогональной прямой λX. В соответствии с (8) она задается выражением

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{y^k}{x^k}=0\,. \tag{10}$$

Последнее соотношение может служить определением поверхности относительной одновременности для инерциального наблюдателя λX. Иными словами, это есть собственное пространство наблюдателя, в котором можно строить траектории движения точек. Его размерность на единицу меньше размерности исходного пространства.

Вводя понятие действия S, видим, что имеет место обычное соотношение для импульсов, т. е.

$$S=-\frac{1}{2}s^2(X)\ \Rightarrow\ p_i=\frac{\partial S}{\partial x^i}\,;\quad i=2,3,4\,. \tag{11}$$

Первую (в обычно используемых обозначениях – нулевую) компоненту из (6) можно считать "гамильтонианом", т. е. определим

$$p_1\equiv H=-\frac{\partial S}{\partial x^1}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2x^3x^4}{x^1}}\,. \tag{12}$$

Тогда выполняется

$$\frac{\partial p_i}{\partial x^1}=-\frac{\partial H}{\partial x^i}\,;\quad i=2,3,4\,, \tag{13}$$

что совпадает с первым из уравнений (2).

Для того чтобы определить компоненты трехмерной скорости, выразим p_1 через p_i $(i=2,3,4)$

$$p_1=H=\frac{16p_2p_3p_4}{(x^1)^2} \tag{14}$$

Тогда для искомых компонент получим

$$\frac{dx^i}{dx^1}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\,;\quad i=2,3,4 \tag{15}$$

– величины, равные отношениям v^i/c, если считать, что $x^1=ct$. Выражение (16) совпадает со вторым уравнением (2).

Полученные канонические уравнения могут быть использованы для описания динамики в пространстве с метрикой Бервальда-Моора, если иметь в виду определения использованных "импульсов" и "гамильтониана" и внести в них физический смысл.

Для того чтобы сделать это, вспомним, что определение действия включает в себя константу:

$$S=-\alpha\int ds\,,$$

где в рассматриваемом случае ds является метрикой Бервальда-Моора (1).

В обычном случае псевдоевклидовой метрики СТО пространство-время было изотропным, а скорость света постоянной и не зависящей от направления. Константу было естественно определить из требования соответствия лагранжиана классическому выражению для лагранжиана свободной частицы $L=\frac{mv^2}{2}$ при $c\to\infty$, и поэтому константа оказывалась равной $\alpha=mc$. Но теперь так действовать нельзя. Пространство-время не является изотропным, поэтому лагранжиан свободной частицы не будет иметь указанного простого вида. Скорость света может зависеть от направления, поэтому предельный переход следует определить точнее. Эти обстоятельства будут подробнее рассмотрены в последующей работе.

Благодарности

Автор выражает свою признательность Д. Г. Павлову за стимулирующие обсуждения и поддержку.

Литература

[1] Пименов Р. И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987.

[2] Богословский Г. Ю. О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени. ДАН СССР, 213, с. 1055, 1973.

[3] Пименов Р. И. Дифференциальные уравнения – насколько они оправданы. *http://www.chronos.msu.ru/public/pimenov_diffury.html*.

[4] Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. W.H.Freeman, New York, 1982.

[5] Асанов Г. С. Гравитационное поле в финслеровом пространстве, основанное на понятии объема. Вестник МГУ, 17, с. 288, 1976.

[6] Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. ГКЧГФ, 1, с. 5, 2004.

[7] Лебедев С. В. Свойства пространств, ассоциированных с коммутативно-ассоциативными алгебрами H_3 и H_4. ГКЧГФ, 1, с. 68, 2004.

[8] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Понятия расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. ГКЧГФ, 3, с. 3, 2005.

[9] Kauffman L. The Non-Commutative Worlds. arXiv: quant-ph/0403012 v. 3.

[10] Siparov S. The Physical World as a Function of Observer's Consciousness. In SS&T, vol. 5, p. 193, 1997.