ОБОБЩЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВА

С. В. Лебедев

НИИ прикладной математики и механики МГТУ им. Н. Э. Баумана
serleb@rambler.ru

Для финслеровых пространств предлагается расширить определение метрического тензора: метрический тензор может иметь большее количество индексов, определяемое размерностью и свойствами пространства. Анализируется связь обобщенного таким образом метрического тензора с финслеровыми пространствами, связанными с коммутативно-ассоциативными алгебрами. Обсуждаются перспективы обобщения метрического тензора; выводится уравнение для геодезических с обобщенным метрическим тензором.

Как для римановых пространств, так и для финслеровых (которые, как известно, являются обобщением римановых), понятие метрического тензора является центральным понятием, определяющим метрические свойства рассматриваемого пространства (многообразия). Метрический тензор – хорошо известное понятие, и без него невозможно представить тензорный анализ метрических пространств. Стало привычным рассматривать этот тензор как тензор второго ранга. Но нельзя ли расширить или обобщить это фундаментальное понятие на финслеровы пространства, не ограничиваясь a priori только тензорами второго ранга? Если бы такой подход на метрические многообразия оказался приемлемым с математической точки зрения, это позволило бы искать его применения и в современной релятивистской или квантовой физике. Если увеличить ранг метрического тензора, то увеличится и число его компонент, и, например, возможен поиск соответствия между этими компонентами и фундаментальными физическими взаимодействиями. В данной статье предпринимается первая попытка перевести рассмотрение обобщенных метрических тензоров из области спекуляций в научную плоскость.

Из истории развития финслеровой геометрии хорошо известно, что метрический тензор в финслеровых пространствах был введен Сингом, Тейлором и Бервальдом в 1925 году по аналогии с римановым пространством [1]. Хотя данная аналогия и позволила развить финслеров тензорный анализ, она не является полной. В римановой геометрии понятие метрического тензора фундаментально и неоспоримо; иная ситуация в финслеровой геометрии, поскольку двухранговый финслеров метрический тензор обладает некоторыми принципиальными отличиями от своего риманова предшественника. Нижеследующее рассмотрение этих отличий дает возможность усомниться в универсальной роли двухрангового финслерова метрического тензора и поэтому послужит некоторым обоснованием возможности его обобщений.

1. Отличия финслерова метрического тензора от риманова аналога

В римановых пространствах компоненты метрического тензора изначально появляются как коэффициенты квадратичного разложения квадрата расстояния между двумя близкими точками, т. е. квадрат расстояния есть:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \, . \qquad (1)$$

Поэтому в фиксированной системе координат эти компоненты определяются однозначно и являются только функциями рассматриваемой точки риманового многообразия:

$$g_{ij} = g_{ij}(x).$$

В отличие от риманового многообразия, для которого выражение (1) является определяющим, финслерово многообразие определяется заданием в качестве аксиом ряда свойств финслеровой метрической функции, основным из которых является свойство однородности метрической функции. В силу однородности финслерова метрическая функция представляется в виде, аналогичном (1):

$$F^2 = g_{ij}(x,y)y^i y^j \,. \tag{2}$$

Сходство между (1) и (2) неполно, поскольку в (2) значения компонент метрического тензора зависят не только от рассматриваемой точки многообразия, но и от направления смещения из этой точки, характеризуемого вектором. Это обстоятельство кардинальным образом меняет дело: разложение вида (2) является принципиально неединственным, и из этого свойства неединственности следует, что это разложение не имеет универсального характера.

Во всех монографиях по финслеровой геометрии приводится классическая формула для компонент метрического тензора финслерова пространства [2–4]:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial y^i}\,. \tag{3}$$

Однако разложение квадрата метрической функции с помощью тензора из (3) не является единственным.

Для иллюстрации неединственности разложения (2) рассмотрим финслерово пространство, связанное с коммутативно-ассоциативной алгеброй H_3. Эта алгебра является прямым произведением трех алгебр действительных чисел: $H_3 = R \times R \times R$, а финслерова метрическая функция этого пространства есть [5]:

$$F^3 = y^1 y^2 y^3 \,. \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что квадрат данной метрической функции может быть разложен в виде (2) не только с помощью матрицы классического метрического тензора (5), но и с помощью другой матрицы (6):

$$F^2 = g_{ij}y^i y^j = \tilde{y}_{ij}y^i y^j \,,$$

$$g_{ij} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{9}\frac{(y^2y^3)^{2/3}}{(y^1)^{4/3}} & \frac{2}{9}\frac{(y^3)^{2/3}}{(y^1y^2)^{1/3}} & \frac{2}{9}\frac{(y^2)^{2/3}}{(y^1y^3)^{1/3}} \\ \frac{2}{9}\frac{(y^3)^{2/3}}{(y^1y^2)^{1/3}} & -\frac{1}{9}\frac{(y^1y^3)^{2/3}}{(y^2)^{4/3}} & \frac{2}{9}\frac{(y^1)^{2/3}}{(y^2y^3)^{1/3}} \\ \frac{2}{9}\frac{(y^2)^{2/3}}{(y^1y^3)^{1/3}} & \frac{2}{9}\frac{(y^1)^{2/3}}{(y^2y^3)^{1/3}} & -\frac{1}{9}\frac{(y^1y^2)^{2/3}}{(y^3)^{4/3}} \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

$$\tilde{y}_{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{3}{4}g_{12} & \frac{3}{4}g_{13} \\ \frac{3}{4}g_{12} & 0 & \frac{3}{4}g_{23} \\ \frac{3}{4}g_{13} & \frac{3}{4}g_{23} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Во-вторых, в отличие от риманова пространства компоненты финслерова метрического тензора обладают тем свойством, что при приближении к точке основного многообразия ($y^i \to 0$) эти компоненты могут иметь особенность в этой точке при

$y = 0$. Убедиться в этом можно на примере компонент матрицы (5): если знаменатель компоненты при уменьшении компонент вектора стремится к нулю быстрее, чем числитель, то значение компоненты неограниченно возрастает.

Наличие таких особенностей может рассматриваться как еще один недостаток двухрангового тензора. Однако этого недостатка можно избежать, если использовать понятие обобщенного метрического тензора. Например, для исследования пространства, ассоциированного с алгеброй H_3, наиболее подходящим инструментом является обобщенный метрический тензор 3-го ранга, поскольку его компоненты оказываются константами и поэтому не имеют каких-либо особенностей.

2. Трехранговые обобщенные финслеровы метрические тензоры

При определении обобщенных тензоров будем основываться на ключевом для финслеровых пространств свойстве однородности метрической функции:

$$F(x, ky) = kF(x, y)\,.$$

В соответствии с теоремой Эйлера для однородных функций имеем следующие тождества:

$$F^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}}_{y_i} y^i = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial y^i}}_{g_{ij}} y^i y^j\,. \tag{7}$$

Это – обычный способ определения ковариантных компонент касательного вектора y_i и метрического тензора g_{ij}. Их связь с контравариантными компонентами y^i выражается формулой:

$$y_{ij} = g_{ij} y^i$$

Благодаря теореме Эйлера для однородных функций возможно по аналогии с (7) разложить в сумму произведений контравариантных компонент вектора не только вторую, но и большие степени финслеровой функции. Далее последовательно рассматривается разложение третьей и четвертой степени этой функции, в результате которого определяются обобщенные метрические тензоры.

Разложение третьей степени финслеровой функции дает следующую цепочку тождеств:

$$F^3 = \underbrace{\frac{1}{3}\frac{\partial F^3}{\partial y^i}}_{y_i^* = y_i F} y^i = \underbrace{\frac{1}{6}\frac{\partial^2 F^3}{\partial y^j \partial y^i}}_{y_{ij}^{(3)}} y^i y^j = \underbrace{\frac{1}{6}\frac{\partial^3 F^3}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i}}_{G_{ijk}} y^i y^j y^k. \tag{8}$$

На первом этапе разложения (8) возникает ковариантный вектор с компонентами y_i^*, который, как нетрудно видеть, отличается лишь множителем F от ковариантного вектора y_i и поэтому не представляет интереса. На втором этапе этого разложения появляется дважды ковариантный метрический тензор $y_{ij}^{(3)}$; результат деления этого тензора на финслерову функцию F обозначим как $\tilde{y}_{ij}$:

$$\tilde{y}_{ij} = y_{ij}^{(3)} \Big/ F. \tag{9}$$

Тензор (9) – тот самый тензор, который участвует в альтернативном разложении квадрата расстояния финслеровой функции и поэтому может рассматриваться как частичный аналог классического метрического тензора g_{ij} (3). Связь этих двух тензоров выражается следующей формулой:

$$\tilde{y}_{ij} = \left(g_{ij} + y_i y_j / F^2\right)/2\,. \tag{10}$$

Заметим, что тензор (10) формой записи похож на угловой финслеров метрический тензор h_{ij} [4]:

$$h_{ij} = g_{ij} - y_i y_j / F^2 .$$

Рассмотрим свойства тензора $\tilde{y}_{ij}$.

1. Как и метрический тензор g_{ij}, тензор $\tilde{y}_{ij}$ есть однородная функция степени 0, т. е.

$$(x, ky) = \tilde{y}^{ij}(x, y)\,.$$

2. Как и метрический тензор g_{ij}, тензор $\tilde{y}_{ij}$ может использоваться для подъема и опускания индексов у произвольных касательных векторов, т. е.

$$y^i = \tilde{y}^{ij} y_j , \quad y_i = \tilde{y}_{ij} y^j \,.$$

3. В отличие от метрического тензора g_{ij}, тензор $\tilde{y}_{ij}$ не позволяет поднимать и опускать индексы у тензоров второго и высшего рангов. Например, результат опускания индекса у произвольного тензора второго ранга T_{ij}, если этот индекс был поднят с помощью тензора g_{ij}, выглядит так:

$$(\tilde{y}_{ij} g^{jk}) T_{kl} = \frac{1}{2}\left[T_{il} + \frac{y_l}{F}\left(\frac{y^j}{F} \cdot T_{jl} \right)\right] .$$

4. Результат полной свертки тензора $\tilde{y}_{ij}$ с тензором g_{ij} есть 1:

$$\tilde{y}_{ij} g^{ij} = \tilde{y}^{ij} g_{ij} = 1\,.$$

5. Существуют производные от тензора $\tilde{y}_{ij}$ символы Кристоффеля вида

$$\tilde{\gamma}_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \tilde{y}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{y}_{ik}}{\partial x^j} \right] ,$$

и эти символы Кристоффеля подчиняются уравнению для финслеровых геодезических обычного вида:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \tilde{\gamma}^i_{jk} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \qquad \tilde{\gamma}^i_{jk} = g^{il}\tilde{\gamma}_{ljk} = \tilde{y}^{il}\tilde{\gamma}_{ljk}\,. \tag{11}$$

Доказательство этого свойства аналогично доказательству утверждения (20) (см. ниже).

На последнем, третьем этапе разложения (8) определяем 3-ранговый метрический тензор G_{ijk}:

$$G_{ijk} = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F^3}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i}\,. \tag{12}$$

Отметим, что обобщенные метрические тензоры (9) и (12) симметричны по всем своим индексам – это общее свойство всех метрических тензоров.

3. Четырехранговые обобщенные финслеровы метрические тензоры

Аналогичным (8) способом возможно разложение четвертой степени финслеровой функции, т. е. верны следующие тождества:

$$F^4 = \underbrace{\frac{1}{4}\frac{\partial F^4}{\partial y^i}}_{y^*_i = y_i F^2} y^i = \underbrace{\frac{1}{12}\frac{\partial^2 F^4}{\partial y^j \partial y^i}}_{y^{(4)}_{ij}} y^i y^j = \underbrace{\frac{1}{24}\frac{\partial^3 F^4}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i}}_{y_{ijk}} y^i y^j y^k = \underbrace{\frac{1}{24}\frac{\partial^4 F^4}{\partial y^l \partial y^k \partial y^j \partial y^i}}_{G_{ijkl}} y^i y^j y^k y^l\,. \tag{13}$$

На первом этапе разложения (13) получается ковариантный вектор y^*, компоненты которого отличаются от ковариантных компонент y_i множителем F^2, на втором этапе – дважды ковариантный тензор $y_{ij}^{(4)}$, на третьем этапе – трижды ковариантный тензор y_{ijk} и на последнем, четвертом этапе – четырежды ковариантный тензор G_{ijkl}.

Рассмотрим свойства тензора G_{ijkl}.

Во-первых, при рассмотрении индикатрисы (обобщенной сферы единичного радиуса, центром которой является точка основного многообразия) с помощью тензора G_{ijkl} могут быть записаны следующие уравнения не только касательной к индикатрисе плоскости (14), но и касательных поверхностей второго и третьего порядков (15)–(16):

$$G_{ijkl}\left(x^m, y^m_{(0)}\right) \cdot y^i_{(0)} y^j_{(0)} y^k_{(0)} y^l = 1\,, \tag{14}$$

$$G_{ijkl}\left(x^m, y^m_{(0)}\right) \cdot y^i_{(0)} y^j_{(0)} y^k y^l = 1\,, \tag{15}$$

$$G_{ijkl}\left(x^m, y^m_{(0)}\right) \cdot y^i_{(0)} y^j y^k y^l = 1\,. \tag{16}$$

Тогда при помощи тензора G_{ijkl} известные классификации уравнений второго и третьего порядков делают возможным классификацию точек индикатрисы финслерового пространства.

Во-вторых, тензор G_{ijkl} допускает введение пятирангового геометрического объекта, компоненты которого могут быть названы обобщенными символами Кристоффеля 1 рода. Компоненты этого объекта определим так:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = \frac{1}{12}\left\{\frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial G_{i_1 i_3 i_4 i_5}}{\partial x^{i_2}} + \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_4 i_5}}{\partial x^{i_3}} - \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_5}}{\partial x^{i_4}} + \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{\partial x^{i_5}}\right\}. \tag{17}$$

Пятиранговые обобщенные символы Кристоффеля 1 рода обладают свойствами, аналогичными свойствам симметрии классических 3-ранговых символов Кристоффеля:
а) свойство симметрии по 1, 3 и 5, а также по 2 и 4 индексам:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = \gamma_{i_5 i_2 i_3 i_4 i_1} = \gamma_{i_3 i_2 i_1 i_4 i_5} = \gamma_{i_1 i_4 i_3 i_2 i_5}\,; \tag{18}$$

б) свойство, связанное с перестановкой 1 и 2, 4 и 5 индексов:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} + \gamma_{i_2 i_1 i_3 i_5 i_4} = \frac{1}{6}\partial G_{i_1 i_2 i_4 i_5}/\partial x^{i_3}\,;$$

в) свойство свертки при смещении $dx^i (x'^i = dx^i/ds)$ вдоль кривой с естественным параметром s:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} x'^{i_1} x'^{i_2} x'^{i_4} x'^{i_5} = \frac{1}{12}\cdot\frac{\partial G_{i_1 i_2 i_4 i_5}}{\partial x^{i_3}} x'^{i_1} x'^{i_2} x'^{i_4} x'^{i_5}\,. \tag{19}$$

С помощью обобщенных символов Кристоффеля может быть сформулировано следующее утверждение.

Утверждение. *Справедлива следующая обобщенная форма уравнения для геодезических финслерова пространства:*

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \gamma^i_{jklm}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^m}{ds} = 0, \tag{20}$$

где

$$\gamma^i_{jklm} = \tilde{y}^{(4)in}\gamma_{jknlm}, \quad \tilde{y}^{(4)}_{in} = y_i y_n - y^{(4)}_{in}\,.$$

При доказательстве этого утверждения будем основываться на уравнении Эйлера-Лагранжа, в котором в качестве естественного параметра используется длина дуги s:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0\,. \tag{21}$$

Преобразуем первое слагаемое в (21):

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{4F^3}\frac{\partial F^4}{\partial x'^i}\right) = \frac{1}{F^6}\left(\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{4}\frac{\partial F^4}{\partial x'^i}\right]F^3 - \frac{3}{4}F^2\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial F^4}{\partial x'^i}\right). \tag{22}$$

Теперь преобразуем входящие в (22) производные:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial F^4}{\partial x'^i}\right) = \frac{dy_i^*}{ds} = \frac{d}{ds}\left(y_{ij}^{(4)}x'^j\right) = \frac{dy_{ij}^{(4)}}{ds}x'^j + y_{ij}^{(4)}x''^j,$$

где $\frac{dy_{ij}^{(4)}}{ds} = \frac{\partial y_{ij}^{(4)}}{\partial x'^k}\cdot\frac{dx'^k}{ds} = 2y_{ijk}ds\cdot x''^k$, в то время как $\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x'^k}x''^k$.

Подставляя в (22), получим следующее выражение:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'^i}\right) = \frac{1}{F^6}\left\{F^3\left[2y_{ijk}ds\cdot x'^j x''^k + y_{ij}^{(4)}x''^j\right] - 3F^5\frac{\partial F}{\partial x'^k}\frac{\partial F}{\partial x'^i}x''^k\right\}.$$

Заметим, что $F\,(x, x') = 1$ вследствие нашего выбора длины дуги в качестве параметра. Кроме того, из (13) следует, что $y_{ijk}x'^j ds = y_{ik}^{(4)}$. В итоге первое слагаемое в уравнении Эйлера-Лагранжа приобретает следующий простой вид:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'^i}\right) = 3\left(y_{ij}^{(4)} - y_i y_j\right)\cdot x''^j.$$

Возможно преобразование и второго слагаемого уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{1}{4F^{3/4}}\cdot\frac{\partial G_{jklm}}{\partial x^i}\cdot x'^j x'^k x'^l x'^l.$$

С учетом свойства в) обобщенных символов Кристоффеля (19) уравнение экстремалей приобретает вид:

$$\tilde{y}_{ij}^{(4)}x''^j + \gamma_{jkilm}x'^j x'^k x'^l x'^m = 0, \qquad \text{где} \quad \tilde{y}_{ij}^{(4)} = y_i y_j - y_{ij}^{(4)}.$$

Введя матрицу $\tilde{y}^{(4)ij}$, обратную к матрице $\tilde{y}_{ij}^{(4)}$, и обозначая $\gamma^i_{jklm} = \tilde{y}^{(4)in}\gamma_{jknlm}$, получим требуемое уравнение (20).

4. Классификация обобщенных финслеровых метрических тензоров

В заключение с целью упорядочить имеющиеся представления об обобщенных финслеровых метрических тензорах проведем их классификацию.

Определение. *Будем говорить, что обобщенный метрический тензор принадлежит к классу (m, n), если его ранг равен m, а его компоненты есть коэффициенты в разложении n-ой степени финслеровой функции, т. е. верно равенство*

$$F^n = \sum_{i_1,..,i_m=1}^{n} G^{(n)}_{i_1\ldots i_m}\cdot y^{i_1}\cdot\ldots\cdot y^{i_m}. \tag{23}$$

В соответствие с этим определением компоненты метрического тензора класса (m, n) определяются формулой:

$$G^{(n)}_{i_1 \ldots i_m} = \frac{m!}{n!} \frac{\partial^m F^n}{\partial y^{i_1} \ldots \partial y^{i_m}}, \quad (n \geq m > 2)\,. \tag{24}$$

Согласно предлагаемой классификации, фундаментальный метрический тензор принадлежит к классу (2,2).

Заключение

В данной работе определены обобщенные финслеровы метрические тензоры, проведена их классификация и исследованы некоторые их свойства. Кроме того, в результате обобщения символов Кристоффеля 1 рода предложена пятииндексная модификация этих символов, и с помощью этих обобщенных символов выведено обобщенное дифференциальное уравнение для финслеровых геодезических линий.

Благодарности

Необходимо отметить, что идея обобщения метрического тензора не раз высказывалась в ходе обсуждений к. т. н. Д. Г. Павловым, а данная статья есть некоторые шаги по реализации этой идеи. Автор также благодарен к. ф.-м. н., проф. Г. С. Асанову за ряд ценных замечаний при обсуждении работы.

Литература:

[1] Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука. 1981.

[2] D. Bao, S.- S. Chern, Z. Shen. An introduction to Riemann-Finsler geometry. N.-Y.: Springer. 2000.

[3] M. Matsumoto. Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces. Japan: Kaiseisha Press. 1986.

[4] G. S. Asanov. Finsler geometry, relativity and gauge theories. Dordrecht: Reidel. 1985.

[5] Д. Г. Павлов. Хронометрия трехмерного времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1. С. 17–30.

The generalized Finslerian metric tensors

Lebedev S. V.

Baumann University's Institute of Applied Math@Mech, serleb@rambler.ru

The generalized Finslerian metric tensors are proposed. These tensors can have different number of indeces dependent on space dimension as well as space properties. The relationship of these tensors with the Finsler spaces associated with commutative associative algebras is analyzed. Nearest perspectives to research of the tensors of this type are discussed. The generalized differential equations of Finsler geodesics are derived and discussed.