

# 4-ИМПУЛЬС ЧАСТИЦЫ И УРАВНЕНИЕ МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПОЛНОСТЬЮ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Г. Ю. Богословский

*НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына,  
МГУ им. М. В. Ломоносова  
bogoslov@theory.sinp.msu.ru*

Работа посвящена исследованию модели плоского полностью анизотропного пространства-времени, метрика которого является обобщением финслеровой метрики Бервальда-Моора. Действие для массивной частицы в таком анизотропном пространстве определено исходя из соображений релятивистской инвариантности и минимальности на прямой мировой линии. С помощью вариационного принципа получены формулы, связывающие канонический 4-импульс частицы с ее 3-скоростью. Показано, что соответствующая массовая поверхность является инвариантом группы релятивистской симметрии полностью анизотропного пространства-времени.

## Введение

Как известно, в рамках Общей теории относительности пространство-время является римановым. При этом, в силу уравнений Эйнштейна, распределение и движение материи определяет лишь его кривизну и никак не влияет на геометрию касательных пространств. Другими словами, вне зависимости от распределения и свойств материальной среды, заполняющей риманово пространство-время, любое плоское касательное пространство-время остается пространством-временем Специальной теории относительности, т. е. — пространством Минковского.

Вообще говоря, плоское пространство-время не обязательно должно обладать геометрией Минковского. Такая геометрия присуща ему только в том случае, если в качестве однородной группы изометрий оно допускает 6-параметрическую группу Лоренца. Последняя, как известно, включает в себя 3-параметрические лоренцевы бусты и подгруппу 3D вращений. Если же 3D изотропия плоского пространства-времени каким-либо образом нарушена, то его метрика уже не описывается квадратичной формой дифференциалов координат, а является некоторой (вообще говоря, достаточно произвольной) однородной функцией дифференциалов координат второй степени однородности. В таком случае говорят, что плоское пространство-время обладает финслеровой геометрией [1].

Уже сравнительно давно (см., в частности, [2]–[7]) предпринимаются попытки обобщить теорию поля и уравнения Эйнштейна для финслерова пространства-времени. Сложность такой задачи состоит прежде всего в том, что финслеров метрический тензор зависит не только от точек основного многообразия, но и от геометрических объектов, вообще говоря, произвольной природы. Поэтому всякий заметный прогресс в этой области связан с привлечением дополнительных физических идей. Отметим, в частности, исключительно плодотворную идею о нарушении лоренцевой симметрии при относительных скоростях инерциальных систем отсчета,

крайне близких к скорости света. Эта идея была высказана в работах [8], [9] в качестве наиболее вероятной причины отсутствия так называемого эффекта GZK [10], [11] и привела в конечном счете [12] к открытию жизнеспособной модели плоского пространства-времени с частично нарушенной 3D изотропией. Модель, о которой идет речь, описывается следующей финслеровой метрикой :

$$ds^2 = \left[ \frac{(dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2}{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} \right]^r (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2), \quad (1)$$

где единичный вектор  $\boldsymbol{\nu}$  указывает выделенное направление в 3D пространстве, а безразмерный параметр  $r$  определяет величину анизотропии, т. е. степень отклонения финслеровой метрики (1) от метрики изотропного пространства Минковского. При этом ясно, что метрика Минковского является предельным случаем метрики (1) при  $r = 0$ .

Для построения целостной картины динамики пространственно-временного многообразия важное значение имеет и другой предельный случай, а именно,  $r = 1$ . Согласно (1), метрика  $ds$  вырождается в этом случае в полный дифференциал абсолютного времени. Такая трансформация метрики позволяет сделать вывод о возможности фазовых переходов в геометрической структуре пространства-времени и связать их с фазовыми переходами, которые возникают в системе взаимодействующих фундаментальных полей при спонтанном нарушении калибровочной симметрии. Ниже, данную проблему мы обсудим более подробно, а сейчас обратим внимание на еще одно важное обстоятельство, касающееся конкретного вида финслеровой метрики (1).

Любая из финслеровых метрик  $ds^2 = f((dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2 / (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2))(dx_0^2 - d\mathbf{x}^2)$ , где  $f((dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2 / (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2))$  – во многом произвольная функция своего аргумента, тоже описывает некоторое плоское финслерово пространство-время с частично нарушенной 3D изотропией, т. е. — аксиально симметричное финслерово пространство. Однако, если и только если  $f$  имеет вид  $f = ((dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2 / (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2))^r$ , соответствующая метрика (1) описывает плоское анизотропное пространство-время, которое, помимо 1-параметрической группы вращений вокруг вектора  $\boldsymbol{\nu}$ , допускает однородную 3-параметрическую группу изометрий, состоящую лишь из некомпактных преобразований. Такие преобразования связывают физически эквивалентные инерциальные системы отсчета в анизотропном пространстве-времени (1) и называются обобщенными преобразованиями Лоренца, или обобщенными лоренцевыми бустами. В результате можно утверждать, что при переходе от пространства Минковского к финслерову пространству (1) с частично нарушенной 3D изотропией лоренцева пространственно-временная симметрия оказывается тоже нарушенной, но релятивистская симметрия, представленная группой обобщенных лоренцевых бустов, остается в силе [13]–[21].

В рамках описанной финслеровой модели источником анизотропии плоского пространства-времени является релятивистски инвариантный аксиально симметричный фермион-антифермионный конденсат, который возникает при спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии и появлении масс у фундаментальных полей материи. В отличие от стандартного механизма Хиггса и альтернативной ему схемы [22], [23], когда вместо конденсата Хиггса рассматривается скалярный фермион-антифермионный конденсат, перестройка вакуума с образованием релятивистски инвариантного аксиально симметричного фермион-антифермионного конденсата приводит к изменению геометрии плоского пространства-времени; вместо геометрии Минковского возникает финслерова геометрия с метрикой (1). При этом, как

уже отмечалось, такой геометрический фазовый переход сохраняет релятивистскую симметрию, но нарушает лоренцеву симметрию теории.

В последнее время, наряду с финслеровым, разрабатывается и другой, струнно мотивированный подход к проблеме нарушения лоренцевой симметрии. Дело в том, что, даже если исходная единая теория обладает лоренцевой симметрией на наиболее фундаментальном уровне, эта симметрия может спонтанно нарушиться за счет образования конденсата векторного или, например, тензорного поля. Предположение о существовании такого конденсата, или постоянного классического поля на фоне пространства Минковского подразумевает, что оно может влиять на динамику фундаментальных полей и тем самым модифицировать Стандартную модель сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий. Поскольку при пассивных преобразованиях постоянное классическое поле преобразуется как лоренцев вектор или тензор, естественным способом учета этого влияния является расширение лагранжиана Стандартной модели с помощью дополнительных членов, представляющих собой всевозможные лоренц-ковариантные свертки конденсата со стандартными фундаментальными полями. Феноменологическая теория, основанная на такой лоренц-ковариантной модификации Стандартной модели, получила название расширенной Стандартной модели (SME) [24]–[27]. Эта теория по построению не является лоренц-инвариантной, поскольку ее лагранжиан не остается инвариантным при активных лоренцевых преобразованиях фундаментальных полей на фоне фиксированного конденсата. К сказанному нужно добавить, что в контексте SME нарушение лоренцевой симметрии относительно активных лоренцевых преобразований подразумевает нарушение и релятивистской симметрии, т. к. наличие неинвариантного конденсата нарушает физическую эквивалентность различных инерциальных систем отсчета.

Не исключено, конечно, что природа устроена так, что при планковских масштабах энергии не только лоренцева, но и описанная выше обобщенная лоренцева симметрия окажутся полностью или частично [28] нарушенными. Однако, даже в этом случае более адекватной по сравнению с римановой может оказаться финслерова геометрическая модель пространства-времени. Хотя похожая точка зрения уже нашла свое место в работе [29], нелишне отметить, что при отсутствии у финслерова пространства-времени какой-либо группы локальных изометрий необходимы дополнительные физические критерии, позволяющие выбрать из множества финслеровых метрик лишь те, которые подходят для описания геометрических свойств пространственно-временного многообразия. Например, используя в качестве таких критериев наличие конформной и проективной структур у финслерова пространства, авторы работ [30]–[32] показали, что финслерово пространство-время, удовлетворяющее данным критериям, должно являться специальным финслеровым пространством Бервальда.

Возвращаясь к финслеровым пространствам, допускающим однородные некомпактные 3-параметрические группы изометрий и, следовательно, обладающие релятивистской симметрией, мы в настоящей работе сосредоточимся на дальнейшем исследовании плоского финслерова пространства-времени с полностью нарушенной 3D изотропией.

### **Релятивистски инвариантное плоское финслерово пространство-время с полностью нарушенной 3D изотропией**

С точки зрения теории относительности основное свойство аксиально симметричного финслерова пространства-времени (1) состоит в том, что оно является

еще и релятивистски симметричным. Другими словами, преобразования, связывающие различные инерциальные системы отсчета, принадлежат группе его изометрий и сами образуют 3-параметрическую группу. Что касается аксиальной симметрии, то она означает, что при переходе от пространства Минковского к финслерову пространству-времени (1) изотропия 3D пространства нарушается лишь частично. Если в качестве источника анизотропии 3D пространства рассматривать анизотропию фермион-антифермионного конденсата, который образуется при том или ином спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии системы взаимодействующих фундаментальных полей, то напрашивается следующий вывод. Если аксиально симметричный конденсат порождает аксиально симметричное релятивистски инвариантное финслерово пространства-времени (1) и если помимо аксиально симметричного может также возникать полностью анизотропный конденсат, то последний должен порождать полностью анизотропное релятивистски инвариантное финслерово пространство-время. В наиболее общей форме соответствующая полностью анизотропная финслерова метрика была найдена в работе [33]. Как оказалось, она зависит от трех безразмерных параметров  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  и имеет следующий вид:

$$ds = (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)/4} (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)/4} \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)/4} (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)/4}. \quad (2)$$

Область возможных значений параметров  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  ограничена условиями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &\geq 0, & 1 + r_1 - r_2 - r_3 &\geq 0, \\ 1 - r_1 + r_2 - r_3 &\geq 0, & 1 - r_1 - r_2 + r_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

и представляет собой тетраэдр  $ABCD$ , изображенный на Рис. 1.

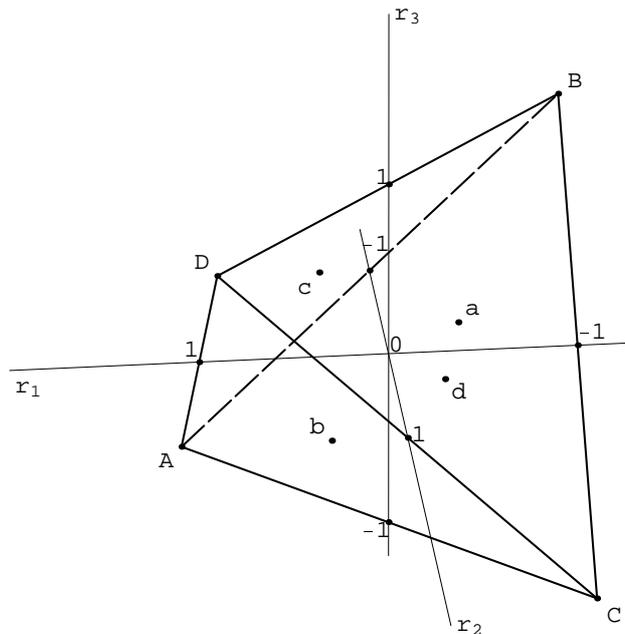


Рис. 1: Область возможных значений параметров  $r_1, r_2, r_3$ .

При  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  метрика (2) сводится к корню четвертой степени из произведения четырех 1-форм

$$ds_{B-M} = [(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)]^{1/4}. \quad (3)$$

Если, подобно тому, как это сделано в [34], ввести новые координаты  $\xi_i$  так, что

$$\xi_i = A_{ij}x_j, \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

то в этих координатах (3) примет стандартный вид метрики Бервальда-Моора [35], [36], т.е.  $ds_{B-M} = \sqrt[4]{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}$ . Таким образом мы видим, что метрика Бервальда-Моора, представленная с помощью формулы (3), является частным случаем метрики (2) при значении параметров  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  (на Рис. 1 это – центральная точка тетраэдра  $ABCD$ ).

Вершине  $A$  тетраэдра отвечают следующие значения параметров  $r_\alpha$  ( $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = -1$ ); вершине  $B$  – ( $r_1 = -1, r_2 = -1, r_3 = 1$ ); вершине  $C$  – ( $r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = -1$ ) и, наконец, вершине  $D$  – ( $r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1$ ). В каждой из этих вершин метрика (2), описывающая пространство-время с полностью нарушенной 3D изотропией, вырождается в соответствующую 1-форму, т.е. – в полный дифференциал абсолютного времени

$$ds_A = dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3; \quad ds_B = dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3; \\ ds_C = dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3; \quad ds_D = dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3.$$

Если теперь сопоставить данное наблюдение с уже отмеченным выше фактом, что метрика (1), описывающая пространство-время с частично нарушенной 3D изотропией, тоже вырождается при  $r = 1$  в полный дифференциал абсолютного времени, то такое сопоставление наводит на мысль, что абсолютное время не является стабильным вырожденным состоянием пространства-времени и может трансформироваться либо в частично анизотропное пространство-время (1), либо в полностью анизотропное пространство-время (2). В любом случае соответствующий геометрический фазовый переход от абсолютного времени к четырехмерному пространству-времени можно рассматривать как "Акт Сотворения" 3D пространства. Это явление сопровождается перестройкой вакуумного состояния системы взаимодействующих фундаментальных полей, в результате чего появляются массы у элементарных частиц. Только после завершения описанного процесса понятие пространственной протяженности и понятие системы отсчета наполняются реальным физическим содержанием (в безмассовом мире бессмысленно говорить о пространственной протяженности чего-либо, равно как и о какой-либо системе отсчета<sup>1</sup>). Наконец, обратим внимание еще и на то, что с формальной точки зрения абсолютное время играет роль того связующего звена, посредством которого удовлетворяется принцип соответствия для финслеровых пространств с частично и полностью нарушенной 3D изотропией.

<sup>1</sup> Отметим кстати, что уже в одной из первых единых калибровочных теорий – конформной теории Вейля [37], [38] само понятие пространственно-временного интервала приобретает физический смысл только после нарушения локальной конформной симметрии и появления массы у первоначально безмассового абелева векторного калибровочного поля.

Чтобы исследовать "тонкую структуру" геометрических фазовых переходов, целесообразно рассмотреть здесь некоторые финслеровы метрики, которые можно получить, используя метрику (2) в качестве производящей и выделяя из множества допустимых значений параметров  $r_1, r_2, r_3$  соответствующие характерные подмножества.

Согласно Рис. 1, на грани  $ABC$  параметры  $r_\alpha$  связаны соотношением  $r_3 = -1 - r_1 - r_2$ . Поэтому с помощью (2) мы получаем

$$ds_{ABC} = (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1)/2} (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1+r_2)/2} \times (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{-(r_1+r_2)/2}. \quad (4)$$

В центральной точке  $d$  грани  $ABC$  параметры  $r_\alpha$  имеют значения  $r_1 = r_2 = r_3 = -1/3$ , а (4) сводится к следующему кубическому корню

$$ds_d = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)}. \quad (5)$$

На грани  $BCD$  параметры  $r_\alpha$  связаны соотношением  $r_3 = 1 + r_1 - r_2$ . Соответственно, формула (2) дает

$$ds_{BCD} = (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1)/2} (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_2)/2} \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{-(r_1-r_2)/2}. \quad (6)$$

В центральной точке  $a$  грани  $BCD$   $r_1 = -1/3, r_2 = r_3 = 1/3$  и, вследствие (6), мы снова получаем метрику в форме кубического корня

$$ds_a = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)}. \quad (7)$$

На грани  $ABD$   $r_3 = 1 - r_1 + r_2$ . В результате

$$ds_{ABD} = (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1)/2} (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_2)/2} \times (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(r_1-r_2)/2}. \quad (8)$$

В центральной точке  $c$  грани  $ABD$   $r_2 = -1/3, r_1 = r_3 = 1/3$ , а метрика имеет вид

$$ds_c = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)}. \quad (9)$$

На последней, четвертой грани  $ACD$   $r_3 = r_1 + r_2 - 1$  и мы получаем

$$ds_{ACD} = (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1)/2} (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1-r_2)/2} \times (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(r_1+r_2)/2}. \quad (10)$$

В центральной точке  $b$  этой грани  $r_1 = r_2 = 1/3, r_3 = -1/3$ . Поэтому

$$ds_b = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)}. \quad (11)$$

Выясним, наконец, какую форму метрика (2) принимает на шести ребрах тетраэдра  $ABCD$ . Начнем с ребра  $BD$ . Согласно Рис. 1 это ребро является пересечением граней  $ABD$  и  $BCD$ . Поэтому на нем параметры  $r_\alpha$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 - r_1 + r_2 - r_3 &= 0, \\ 1 + r_1 - r_2 - r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $r_3 = 1$ ,  $r_1 = r_2 = \tilde{r}$ . В результате мы получаем

$$ds_{BD} = \left[ \frac{(dx_0 - dx_3) - (dx_1 + dx_2)}{(dx_0 - dx_3) + (dx_1 + dx_2)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 - dx_3)^2 - (dx_1 + dx_2)^2}. \quad (12)$$

В середине ребра  $BD$   $r_3 = 1$ ,  $r_1 = r_2 = \tilde{r} = 0$  и (12) сводится к двумерной метрике Минковского  $ds^2 = (dx_0 - dx_3)^2 - (dx_1 + dx_2)^2$ .

Рассмотрим ребро  $AD$ , которое является пересечением граней  $ABD$  и  $ACD$ . Параметры  $r_\alpha$  связаны на этом ребре соотношениями

$$\begin{aligned} 1 - r_1 + r_2 - r_3 &= 0, \\ 1 - r_1 - r_2 + r_3 &= 0. \end{aligned}$$

В результате  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = r_3 = \tilde{r}$  и

$$ds_{AD} = \left[ \frac{(dx_0 - dx_1) - (dx_2 + dx_3)}{(dx_0 - dx_1) + (dx_2 + dx_3)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 - dx_1)^2 - (dx_2 + dx_3)^2}. \quad (13)$$

В середине ребра  $AD$   $r_1 = 1$ ,  $r_2 = r_3 = \tilde{r} = 0$  и (13) снова сводится к двумерной метрике Минковского  $ds^2 = (dx_0 - dx_1)^2 - (dx_2 + dx_3)^2$ .

Ребро  $CD$  есть пересечение граней  $ACD$  и  $BCD$ . На этом ребре параметры  $r_\alpha$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 - r_1 - r_2 + r_3 &= 0, \\ 1 + r_1 - r_2 - r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Это дает  $r_2 = 1$ ,  $r_1 = r_3 = \tilde{r}$ . Следовательно

$$ds_{CD} = \left[ \frac{(dx_0 - dx_2) - (dx_1 + dx_3)}{(dx_0 - dx_2) + (dx_1 + dx_3)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 - dx_2)^2 - (dx_1 + dx_3)^2}. \quad (14)$$

В середине ребра  $CD$   $r_2 = 1$ ,  $r_1 = r_3 = \tilde{r} = 0$  и значит  $ds^2 = (dx_0 - dx_2)^2 - (dx_1 + dx_3)^2$ .

Ребро  $CB$  есть пересечение граней  $ABC$  и  $BCD$ . На нем параметры  $r_\alpha$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &= 0, \\ 1 + r_1 - r_2 - r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = -r_3 = \tilde{r}$ . В результате

$$ds_{CB} = \left[ \frac{(dx_0 + dx_1) - (dx_2 - dx_3)}{(dx_0 + dx_1) + (dx_2 - dx_3)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 + dx_1)^2 - (dx_2 - dx_3)^2}. \quad (15)$$

В середине ребра  $CB$   $r_1 = -1$ ,  $r_2 = -r_3 = \tilde{r} = 0$  и  $ds^2 = (dx_0 + dx_1)^2 - (dx_2 - dx_3)^2$ .

Ребро  $AB$  является пересечением граней  $ABC$  и  $ABD$  и на нем параметры  $r_\alpha$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &= 0, \\ 1 - r_1 + r_2 - r_3 &= 0, \end{aligned}$$

т.е.  $r_2 = -1$ ,  $r_1 = -r_3 = \tilde{r}$ . В результате

$$ds_{AB} = \left[ \frac{(dx_0 + dx_2) - (dx_1 - dx_3)}{(dx_0 + dx_2) + (dx_1 - dx_3)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 + dx_2)^2 - (dx_1 - dx_3)^2}. \quad (16)$$

В середине ребра  $AB$   $r_2 = -1$ ,  $r_1 = -r_3 = \tilde{r} = 0$  и  $ds^2 = (dx_0 + dx_2)^2 - (dx_1 - dx_3)^2$ .

Последнее ребро  $AC$  является пересечением граней  $ABC$  и  $ACD$ . На нем параметры  $r_\alpha$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &= 0, \\ 1 - r_1 - r_2 + r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно  $r_3 = -1$ ,  $r_1 = -r_2 = \tilde{r}$  и

$$ds_{AC} = \left[ \frac{(dx_0 + dx_3) - (dx_1 - dx_2)}{(dx_0 + dx_3) + (dx_1 - dx_2)} \right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 + dx_3)^2 - (dx_1 - dx_2)^2}. \quad (17)$$

В середине ребра  $AC$   $r_3 = -1$ ,  $r_1 = -r_2 = \tilde{r} = 0$  и  $ds^2 = (dx_0 + dx_3)^2 - (dx_1 - dx_2)^2$ .

В следующем разделе, посвященном релятивистской механике частицы в полностью анизотропном пространстве-времени (2), мы существенно используем преобразования, составляющие однородную 3-параметрическую некомпактную группу изометрий этого пространства-времени. По своему смыслу такая группа представляет собой группу релятивистской симметрии пространства-времени (2). Она, как было выяснено в работе [39], является абелевой, а определяющие ее линейные преобразования имеют вид

$$x'_i = D L_{ik} x_k, \quad (18)$$

где

$$D = e^{-(r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3)}, \quad (19)$$

$L_{ik}$  — унимодулярные матрицы, причем

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} & -\mathcal{C} & -\mathcal{D} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} & \mathcal{D} & \mathcal{C} \\ -\mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{D} & \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathcal{A} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{B} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

$$\mathcal{C} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{D} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

и  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — групповые параметры.

Преобразования, обратные (18), имеют вид

$$x_i = D^{-1} L_{ik}^{-1} x'_k, \quad (21)$$

где

$$L_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & -\tilde{\mathcal{B}} & -\tilde{\mathcal{C}} & -\tilde{\mathcal{D}} \\ -\tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{C}} \\ -\tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{B}} \\ -\tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{A}} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\tilde{A} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 - \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3, \quad (23)$$

$$\tilde{B} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 - \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3, \quad (24)$$

$$\tilde{C} = \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 - \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3, \quad (25)$$

$$\tilde{D} = \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 - \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3. \quad (26)$$

Учитывая, что преобразования (18), подобно преобразованиям Лоренца в пространстве Минковского, связывают различные инерциальные системы отсчета в финслеровом пространстве (2), целесообразно вместо групповых параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  использовать компоненты  $v_1 = dx_1/dx_0$ ,  $v_2 = dx_2/dx_0$ ,  $v_3 = dx_3/dx_0$  скорости штрихованной системы отсчета. Хотя соответствующие соотношения можно найти в [39], мы все же их здесь воспроизведем:

$$\begin{aligned} v_1 &= (\tanh \alpha_1 - \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_2 &= (\tanh \alpha_2 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_3 &= (\tanh \alpha_3 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3). \end{aligned}$$

Обратные соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}. \end{aligned}$$

### Релятивистская механика в плоском полностью анизотропном финслеровом пространстве-времени

Исходя из соображений релятивистской инвариантности и минимальности на прямой мировой линии, запишем действие  $S$  для свободной частицы в плоском полностью анизотропном финслеровом пространстве-времени (2).

$$S = -mc \int_a^b ds, \quad (27)$$

где  $ds$  — интервал в финслеровом пространстве (2). Вариация данного действия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int_a^b (p_0 d\delta x_0 - p_1 d\delta x_1 - p_2 d\delta x_2 - p_3 d\delta x_3) \\ &= (-p_0 \delta x_0 + p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + p_3 \delta x_3) \Big|_a^b \\ &\quad + \int_a^b [(dp_0/ds)\delta x_0 - (dp_1/ds)\delta x_1 - (dp_2/ds)\delta x_2 - (dp_3/ds)\delta x_3] ds. \end{aligned} \quad (28)$$

Если мы варьируем мировую линию при условии  $(\delta x_i)|_a = (\delta x_i)|_b = 0$ , то принцип наименьшего действия дает  $p_i = const$ , т. е. прямолинейное инерциальное движение. Если же мы варьируем координаты точки  $b$  при условии  $p_i = const$ , то приходим к следующим соотношениям:

$$p_0 = -\frac{\partial S}{\partial x_0}, \quad p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x_\alpha}; \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (29)$$

Отсюда ясно, что  $p_i$  есть канонический 4-импульс частицы в финслеровом пространстве (2). Его компоненты, выраженные через 3-скорость  $v_\alpha = dx_\alpha/dx_0$ , имеют вид

$$p_0 = \frac{ds}{dx_0} \left( \frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 \{ 1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3 + r_1[(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3] + r_2[(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3] + r_3[(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2] \}, \quad (30)$$

$$p_1 = \frac{ds}{dx_0} \left( \frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 \{ (1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3 + r_1[1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3] + r_2[(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2] + r_3[(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3] \}, \quad (31)$$

$$p_2 = \frac{ds}{dx_0} \left( \frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 \{ (1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3 + r_1[(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2] + r_2[1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3] + r_3[(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3] \}, \quad (32)$$

$$p_3 = \frac{ds}{dx_0} \left( \frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 \{ (1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2 + r_1[(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3] + r_2[(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3] + r_3[1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3] \}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} (dx_0/ds) (ds_{B-M}/dx_0)^4 &= (1 - v_1 - v_2 - v_3)^{(3-r_1-r_2-r_3)/4} \\ &\times (1 - v_1 + v_2 + v_3)^{(3-r_1+r_2+r_3)/4} \\ &\times (1 + v_1 - v_2 + v_3)^{(3+r_1-r_2+r_3)/4} \\ &\times (1 + v_1 + v_2 - v_3)^{(3+r_1+r_2-r_3)/4}, \end{aligned} \quad (34)$$

причем  $ds$  — метрика (2), а  $ds_{B-M}$  — метрика Бервальда-Моора (3). Отметим, что, начиная с формулы (30), во всех соотношениях положено  $m = c = 1$ .

Согласно (30)–(33), четыре величины, а именно, энергия  $p_0$  и 3-импульс  $p_\alpha$  являются функциями трех компонент  $v_\alpha$  скорости частицы. Поэтому соотношения (30)–(33) можно рассматривать как уравнения, определяющие массовую поверхность в параметрической форме, а  $v_\alpha$  — как внутренние координаты на ней. Ниже мы покажем, что уравнение массовой поверхности можно получить и в форме алгебраического соотношения для  $p_i$ . Что же касается физической стороны дела, то, как и должно быть, энергия  $p_0$ , определенная с помощью (30), достигает своего абсолютного минимума  $p_0 = 1$  при  $v_\alpha = 0$ , т. е. для покоящейся частицы. Важно, однако, отметить, что, помимо энергии покоя  $p_0 = 1$ , у частицы, находящейся в полностью анизотропном пространстве (2), остается отличный от нуля импульс покоя; в силу

(31)–(33)  $p_1 = r_1, p_2 = r_2, p_3 = r_3$  при  $v_\alpha = 0$ . Более того, согласно тем же формулам, направление 3-импульса частицы не совпадает с направлением ее 3-скорости. Это говорит о том, что свободное движение частицы в полностью анизотропном пространстве аналогично движению квазичастицы в полностью анизотропной кристаллической среде.

Как и в случае пространства Минковского, зная 4-импульс частицы в полностью анизотропном пространстве, можно найти ее 3-скорость. Чтобы получить соответствующие формулы, начнем с некоторых полезных промежуточных соотношений, которые выполняются в силу (30)–(33):

$$\frac{p_0 + p_3}{p_1 + p_2} = \frac{(1 - v_3)(1 + r_3) + (v_1 + v_2)(r_1 + r_2)}{(1 - v_3)(r_2 + r_3) + (v_1 + v_2)(1 + r_3)}, \quad (35)$$

$$\frac{p_0 - p_1}{p_2 - p_3} = \frac{(1 + v_1)(1 - r_1) + (v_2 - v_3)(r_2 - r_3)}{(1 + v_1)(r_2 - r_3) + (v_2 - v_3)(1 - r_1)}, \quad (36)$$

$$\frac{p_0 + p_1}{p_2 + p_3} = \frac{(1 - v_1)(1 + r_1) + (v_2 + v_3)(r_2 + r_3)}{(1 - v_1)(r_2 + r_3) + (v_2 + v_3)(1 + r_1)}. \quad (37)$$

Данные соотношения приводят к следующей системе трех линейных уравнений относительно  $v_\alpha$ :

$$a_{\gamma\alpha}v_\alpha = b_\gamma, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} = (p_0 + p_3)(1 + r_3) - (p_1 + p_2)(r_1 + r_2), \\ a_{13} &= b_1 = (p_1 + p_2)(1 + r_3) - (p_0 + p_3)(r_2 + r_3), \\ a_{21} &= -b_2 = (p_0 - p_1)(r_2 - r_3) - (p_2 - p_3)(1 - r_1), \\ a_{22} &= -a_{23} = (p_0 - p_1)(1 - r_1) - (p_2 - p_3)(r_2 - r_3), \\ a_{31} &= b_3 = (p_2 + p_3)(1 + r_1) - (p_0 + p_1)(r_2 + r_3), \\ a_{32} &= a_{33} = (p_0 + p_1)(1 + r_1) - (p_2 + p_3)(r_2 + r_3). \end{aligned}$$

При  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ , т. е. в случае пространства Бервальда-Моора с метрикой (3), система уравнений (38) принимает вид

$$\begin{aligned} (p_0 + p_3)v_1 + (p_0 + p_3)v_2 + (p_1 + p_2)v_3 &= (p_1 + p_2), \\ (p_3 - p_2)v_1 + (p_0 - p_1)v_2 + (p_1 - p_0)v_3 &= (p_2 - p_3), \\ (p_2 + p_3)v_1 + (p_0 + p_1)v_2 + (p_0 + p_1)v_3 &= (p_2 + p_3). \end{aligned} \quad (39)$$

Решением системы уравнений (39) являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{p_1(p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - 2p_0p_2p_3}{p_0(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) + 2p_1p_2p_3}, \\ v_2 &= \frac{p_2(p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 + p_3^2) - 2p_0p_1p_3}{p_0(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) + 2p_1p_2p_3}, \\ v_3 &= \frac{p_3(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) - 2p_0p_1p_2}{p_0(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) + 2p_1p_2p_3}. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, четыре функции (30)–(33) от трех переменных  $v_\alpha$  определяют массовую поверхность в параметрической форме. Получим теперь уравнение

массовой поверхности в алгебраической форме, т. е. в форме  $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = 1$ . Чтобы найти явный вид функции  $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3)$ , поступим следующим образом. Сначала выпишем четыре соотношения, которые выполняются в силу (30)–(33):

$$\frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3}{1 + r_1 + r_2 + r_3} = \frac{ds}{dx_0} \left( \frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 (1 - v_1 + v_2 + v_3) [(1 + v_1)^2 - (v_2 - v_3)^2], \quad (40)$$

$$\frac{p_0 + p_1 - p_2 - p_3}{1 + r_1 - r_2 - r_3} = \frac{ds}{dx_0} \left( \frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 (1 - v_1 - v_2 - v_3) [(1 + v_1)^2 - (v_2 - v_3)^2], \quad (41)$$

$$\frac{p_0 - p_1 + p_2 - p_3}{1 - r_1 + r_2 - r_3} = \frac{ds}{dx_0} \left( \frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 (1 + v_1 + v_2 - v_3) [(1 - v_1)^2 - (v_2 + v_3)^2], \quad (42)$$

$$\frac{p_0 - p_1 - p_2 + p_3}{1 - r_1 - r_2 + r_3} = \frac{ds}{dx_0} \left( \frac{dx_0}{ds_{B-M}} \right)^4 (1 + v_1 - v_2 + v_3) [(1 - v_1)^2 - (v_2 + v_3)^2]. \quad (43)$$

Обратим теперь внимание на структуру выражений, стоящих в правых частях формул (40)–(43). Если принять во внимание структуру общего множителя  $(dx_0/ds)(ds_{B-M}/dx_0)^4$ , которую демонстрирует формула (34), то легко заметить, что правые части формул (40)–(43) представляют собой произведения различных степеней четырех характерных "скобок"  $(1 - v_1 - v_2 - v_3)$ ,  $(1 - v_1 + v_2 + v_3)$ ,  $(1 + v_1 - v_2 + v_3)$  и  $(1 + v_1 + v_2 - v_3)$ . Это наблюдение наводит на мысль, что функцию  $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3)$  следует искать в виде

$$H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = \left( \frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3}{1 + r_1 + r_2 + r_3} \right)^a \left( \frac{p_0 + p_1 - p_2 - p_3}{1 + r_1 - r_2 - r_3} \right)^b \times \left( \frac{p_0 - p_1 + p_2 - p_3}{1 - r_1 + r_2 - r_3} \right)^c \left( \frac{p_0 - p_1 - p_2 + p_3}{1 - r_1 - r_2 + r_3} \right)^d. \quad (44)$$

Первое из условий, которые необходимо наложить на константы  $a, b, c, d$ , вытекает из физического смысла функции  $H(p_0, p_1, p_2, p_3)$  и состоит в том, что эта функция должна иметь физическую размерность, совпадающую с размерностью импульса  $p_i$ . Поэтому функция (44) должна являться однородной функцией своих аргументов четвертой степени однородности. Данное требование означает, что

$$a + b + c + d = 4. \quad (45)$$

Остальные условия на константы  $a, b, c, d$  можно получить, потребовав, чтобы все показатели степени, которые возникнут у четырех характерных "скобок" после подстановки выражений (40)–(43) в (44), оказались бы равными нулю. Именно в этом случае мы получим уравнение массовой поверхности в виде  $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = 1$ , а поскольку у нас положено  $m = c = 1$ , то в обычных единицах ему будет соответствовать уравнение  $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = (mc)^4$ .

Итак, если выполнить намеченную программу, то, в дополнение к уравнению (45), мы придем к следующим четырем уравнениям для определения констант  $a, b, c, d$ :

$$b + c + d - (3 - r_1 - r_2 - r_3)(a + b + c + d)/4 = 0, \quad (46)$$

$$a + c + d - (3 - r_1 + r_2 + r_3)(a + b + c + d)/4 = 0, \quad (47)$$

$$a + b + d - (3 + r_1 - r_2 + r_3)(a + b + c + d)/4 = 0, \quad (48)$$

$$a + b + c - (3 + r_1 + r_2 - r_3)(a + b + c + d)/4 = 0. \quad (49)$$

В силу (45), систему пяти уравнений (45)–(49) можно переписать в виде

$$a + b + c + d = 4, \quad (50)$$

$$b + c + d - (3 - r_1 - r_2 - r_3) = 0, \quad (51)$$

$$a + c + d - (3 - r_1 + r_2 + r_3) = 0, \quad (52)$$

$$a + b + d - (3 + r_1 - r_2 + r_3) = 0, \quad (53)$$

$$a + b + c - (3 + r_1 + r_2 - r_3) = 0. \quad (54)$$

Очевидно, что, складывая уравнения (51)–(54), мы приходим к (50). Поэтому (50) не является независимым уравнением и для определения четырех констант  $a, b, c, d$  у нас остается четверка независимые уравнения (51)–(54), или соответствующая система

$$b + c + d = (3 - r_1 - r_2 - r_3), \quad (55)$$

$$a + c + d = (3 - r_1 + r_2 + r_3), \quad (56)$$

$$a + b + d = (3 + r_1 - r_2 + r_3), \quad (57)$$

$$a + b + c = (3 + r_1 + r_2 - r_3). \quad (58)$$

Решением этой системы являются следующие константы:

$$a = 1 + r_1 + r_2 + r_3, \quad b = 1 + r_1 - r_2 - r_3,$$

$$c = 1 - r_1 + r_2 - r_3, \quad d = 1 - r_1 - r_2 + r_3.$$

Данный результат означает, что уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном импульсном пространстве имеет вид

$$\begin{aligned} & \left( \frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3}{1 + r_1 + r_2 + r_3} \right)^{(1+r_1+r_2+r_3)} \left( \frac{p_0 + p_1 - p_2 - p_3}{1 + r_1 - r_2 - r_3} \right)^{(1+r_1-r_2-r_3)} \\ & \times \left( \frac{p_0 - p_1 + p_2 - p_3}{1 - r_1 + r_2 - r_3} \right)^{(1-r_1+r_2-r_3)} \left( \frac{p_0 - p_1 - p_2 + p_3}{1 - r_1 - r_2 + r_3} \right)^{(1-r_1-r_2+r_3)} = 1. \end{aligned} \quad (59)$$

Рассмотрим, наконец, группу релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства и покажем, что преобразования 4-импульсов, образующие эту группу, оставляют уравнение массовой поверхности (59) инвариантным. Из общих соображений ясно, что преобразования релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства индуцируются соответствующими преобразованиями (18) полностью анизотропного пространства событий (2). Чтобы в явном виде построить линейные преобразования 4-импульсов, представляющие группу релятивистской симметрии, мы будем исходить из определения канонического 4-импульса (29).

Итак, вследствие (29) и (21) справедливы соотношения

$$p'_0 = - \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_0} = D^{-1} (L_{00}^{-1} p_0 - L_{0\beta}^{-1} p_\beta), \quad (60)$$

$$p'_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} = D^{-1} (-L_{\alpha 0}^{-1} p_0 + L_{\alpha\beta}^{-1} p_\beta). \quad (61)$$

Принимая во внимание определение (22) матрицы  $L_{ik}^{-1}$ , мы можем оба соотношения (60) и (61) записать в виде одной формулы

$$p'_i = D^{-1} \mathcal{L}_{ik} p_k, \quad (62)$$

где, в силу (19) и (22),

$$D^{-1} = e^{(r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3)}, \quad (63)$$

$$\mathcal{L}_{ik} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} & \tilde{D} \\ \tilde{B} & \tilde{A} & \tilde{D} & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{D} & \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{D} & \tilde{C} & \tilde{B} & \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad (64)$$

причем  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — групповые параметры, а матричные элементы  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$  матрицы  $\mathcal{L}_{ik}$  определяются формулами (23)–(26). Таким образом, мы в явном виде (62) построили линейные преобразования 4-импульсов и эти преобразования образуют 3-параметрическую абелеву группу релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства.

Чтобы убедиться, что уравнение массовой поверхности (59) действительно не меняет своего вида, т. е. остается инвариантным при преобразованиях (62), целесообразно сначала выяснить как преобразуются четыре независимые 1-формы, входящие в уравнение (59). Прямое вычисление с помощью (62)–(64) и (23)–(26) приводит к следующему результату:

$$(p'_0 + p'_1 + p'_2 + p'_3) = e^{[(r_1-1)\alpha_1 + (r_2-1)\alpha_2 + (r_3-1)\alpha_3]}(p_0 + p_1 + p_2 + p_3), \quad (65)$$

$$(p'_0 + p'_1 - p'_2 - p'_3) = e^{[(r_1-1)\alpha_1 + (r_2+1)\alpha_2 + (r_3+1)\alpha_3]}(p_0 + p_1 - p_2 - p_3), \quad (66)$$

$$(p'_0 - p'_1 + p'_2 - p'_3) = e^{[(r_1+1)\alpha_1 + (r_2-1)\alpha_2 + (r_3+1)\alpha_3]}(p_0 - p_1 + p_2 - p_3), \quad (67)$$

$$(p'_0 - p'_1 - p'_2 + p'_3) = e^{[(r_1+1)\alpha_1 + (r_2+1)\alpha_2 + (r_3-1)\alpha_3]}(p_0 - p_1 - p_2 + p_3). \quad (68)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, при переходе от 4-импульсов  $p_i$  к четырем независимым 1-формам преобразования релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства существенно упрощаются и сводятся лишь к масштабным преобразованиям данных 1-форм. С помощью (65)–(68) уже не представляет труда проверить, что

$$\begin{aligned} & (p'_0 + p'_1 + p'_2 + p'_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)}(p'_0 + p'_1 - p'_2 - p'_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)} \\ & \times (p'_0 - p'_1 + p'_2 - p'_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)}(p'_0 - p'_1 - p'_2 + p'_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)} \\ & = (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)}(p_0 + p_1 - p_2 - p_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)} \\ & \times (p_0 - p_1 + p_2 - p_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)}(p_0 - p_1 - p_2 + p_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)}. \end{aligned}$$

Это равенство и доказывает, что уравнение массовой поверхности (59) остается инвариантным при преобразованиях (62).

## Заключение

Лишь вскользь коснувшись релятивистски симметричного финслерова пространства событий с частично нарушенной 3D изотропией, мы основное внимание в данной работе уделили исследованию релятивистски симметричного финслерова пространства с полностью нарушенной 3D изотропией.

Во избежание недоразумений отметим, что обычно под релятивистской симметрией понимается симметрия относительно лоренцевых бустов или, в более широком смысле, симметрия относительно 6-параметрической группы Лоренца. Хотя любой элемент группы Лоренца можно представить как произведение лоренцева буста

и 3D поворота, нетривиальным моментом является то, что множество 3D поворотов составляет 3-параметрическую подгруппу группы Лоренца, а 3-параметрическое множество лоренцевых бустов никакой группы не составляет. Другими словами, в результате последовательного применения двух различных лоренцевых бустов мы переходим в инерциальную систему отсчета, пространственные оси которой оказываются не параллельными осям исходной системы, а повернутыми на некоторый угол. Именно этот эффект, приводящий, в частности, к томасовской прецессии, отражает тот факт, что произведение двух произвольных лоренцевых бустов уже не является чистым лоренцевым бустом. Вместе с тем, достаточно давно известно, что в группе Лоренца существует единственное (с точностью до изоморфизма) 3-параметрическое подмножество некомпактных преобразований, которое, подобно компактному подмножеству 3D вращений, тоже составляет группу. Поскольку в такую 3-параметрическую группу входят только преобразования, связывающие движущиеся инерциальные системы отсчета, то скорее ее, а не всю группу Лоренца, следует рассматривать в качестве группы релятивистской симметрии пространства Минковского. Это тем более оправдано, что при частичном нарушении 3D изотропии вместо пространства Минковского возникает финслерово пространство с группой релятивистской симметрии, которая локально изоморфна 3-параметрической группе релятивистской симметрии пространства Минковского. Что же касается полностью анизотропного финслерова пространства событий, то и для него группа преобразований, связывающих различные физически эквивалентные инерциальные системы отсчета, имеет смысл группы релятивистской симметрии. Однако, как было показано ранее, такая группа является абелевой 3-параметрической группой.

## Литература

- [1] Рунд Х., Дифференциальная геометрия финслеровых пространств, М.: Наука, 1981.
- [2] Takano Y., Gravitational field in Finsler spaces, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, V. 10, N 17, 747–750.
- [3] Takano Y., On the theory of fields in Finsler spaces, in Proc. Int. Symp. "Relativity and Unified Field Theory", Calcutta, Bose Insit. Phys. Sci, 1975–1976, 17–26.
- [4] Ikeda S., On the theory of gravitational field in Finsler spaces, *Ann. d. Phys.*, 1987, V. 44, N 8, 558–562.
- [5] Ikeda S., On the theory of the gravitational field nonlocalized by the internal variables, *Nuovo Cimento B*, 1987, V. 98, N 2, 158–164.
- [6] Ikeda S., On the field equations in the theory of the gravitational fields in Finsler spaces, *Tensor N. S.*, 1987, V. 44, 157–163.
- [7] Ikeda S., Theory of fields in Finsler spaces, *Seminarul de mecanica, Univ. din Timisoara, Romania*, 1988, N 8.
- [8] Киржниц Д. А., Чечин В. А., Космические лучи и элементарная длина, *Письма в ЖЭТФ*, 1971, Т. 14, N 4, 261–262.
- [9] Киржниц Д. А., Чечин В. А., Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории, *ЯФ*, 1972, Т. 15, N 5, 1051–1059.
- [10] Greisen K., End to the cosmic-ray spectrum?, *Phys. Rev. Lett.*, 1966, V. 16, N 17, 748–750.
- [11] Зацепин Г. Т., Кузьмин В. А., О верхней границе спектра космических лучей, *Письма в ЖЭТФ*, 1966, Т. 4, N 3, 114–117.
- [12] Богословский Г. Ю., О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени, *ДАН СССР*, 1973, Т. 213, N 5, 1055–1058.

- [13] Bogoslovsky G. Yu., A special relativistic theory of the locally anisotropic space-time, *Nuovo Cimento B*, 1977, V. 40, N 1, 99–134.
- [14] Богословский Г. Ю., Теория локально анизотропного пространства-времени, М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [15] Bogoslovsky G. Yu., From the Weyl theory to a theory of locally anisotropic space-time, *Class. Quantum Grav.*, 1992, V. 9, 569–575.
- [16] Богословский Г. Ю. Финслерова модель пространства-времени, *ЭЧАЯ*, 1993, Т. 24, N 3, 813–877.
- [17] Bogoslovsky G. Yu., A viable model of locally anisotropic space-time and the Finslerian generalization of the relativity theory, *Fortschr. Phys.*, 1994, V. 42, N 2, 143–193.
- [18] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the generalization of the fundamental field equations for locally anisotropic space-time, in Proceedings of XXIV International Workshop “Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory” (27–29 June, 2001, Protvino, Russia), Editor V. A. Petrov, Protvino, Institute for High Energy Physics, 2001, 113–125.
- [19] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Concerning the generalized Lorentz symmetry and the generalization of the Dirac equation, *Phys. Lett. A*, 2004, V. 323, 40–47.
- [20] Bogoslovsky G. Yu., Lorentz symmetry violation without violation of relativistic symmetry, hep-th/0511151.
- [21] Bogoslovsky G. Yu., Subgroups of the group of generalized Lorentz transformations and their geometric invariants, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 2005, V. 1, PN 17, 1–9.
- [22] Arbuzov B. A., Muon g-2 anomaly and extra interaction of composite Higgs in a dynamically broken electroweak theory, hep-ph/0110389.
- [23] Арбузов Б. А., Спонтанное возникновение эффективного взаимодействия в ренормируемой модели квантовой теории поля, *ТМФ*, 2004, Т. 140, N 3, 367–387.
- [24] Colladay D., Kostelecký A., CPT violation and the standard model, *Phys. Rev. D*, 1997, V. 55, N 11, 6760–6774.
- [25] Colladay D., Kostelecký A., Lorentz-violating extension of the standard model, *Phys. Rev. D*, 1998, V. 58, 116002.
- [26] CPT and Lorentz symmetry II, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2002.
- [27] CPT and Lorentz symmetry III, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2005.
- [28] Goenner H. F., Bogoslovsky G. Yu., A class of anisotropic (Finsler–) space-time geometries, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1999, V. 31, N 9, 1383–1394.
- [29] Kostelecký A., Gravity, Lorentz violation, and the standard model, *Phys. Rev. D*, 2004, V. 69, 105009.
- [30] Tavakol R., van den Bergh N., Finsler spaces and the underlying geometry of space-time, *Phys. Lett. A*, 1985, V. 112, 23–25.
- [31] Tavakol R., van den Bergh N., Viability criteria for the theories of gravity and Finsler spaces, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1986, V. 18, 849–859.
- [32] Roxburgh I. W., Tavakol R., van den Bergh N., The geometry of space-time and Berwald spaces, *Tensor*, 1992, V. 51, 72–77.
- [33] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, *Phys. Lett. A*, 1998, V. 244, 222–228.
- [34] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И., Понятия расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2005, Т. 1, N 3, 3–15.
- [35] Berwald L., Projective Krümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung, *Ann. Math. (2)*, 1947, V. 48, 755–781; und die Literaturhinweise darin.

- [36] Моór А., Ergänzung, *Acta math.*, 1954, V. 91, 187–188.
- [37] Weyl H., Gravitation und Elektrizität, *Sitzber. preuss Akad. Wiss., Physik-math. Kl.*, 1918, 465–480.
- [38] Weyl H., Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Ann. d. Phys.*, 1919, V. 59, N 10, 101–133.
- [39] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1999, V. 31, N 10, 1565–1603.

*Статья поступила в редакцию 18.08.2005 г.*