СВЯЗЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОБОБЩЕННО-КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ОБОБЩЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ В ПОЛИЧИСЛОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва
gri9z@mail.ru

В настоящей работе установлена связь между функциями, осуществляющими элементарные обобщенно-конформное преобразование в пространстве невырожденных поличисел и обобщенно-аналитическими функциями той же поличисловой переменной. Кроме общих построений, в работе рассматриваются конкретные примеры для комплексных и гиперкомплексных чисел H_4. Для указанных поличисел показано: эта связь может быть установлена так, что при переходе к конформным преобразованиям обобщенно-аналитические функции становятся аналитическими.

Введение

На комплексной плоскости конформные преобразования осуществляются аналитическими функциями комплексной переменной (конформные преобразования I рода) или комплексно сопряженными аналитическими функциями (преобразования II рода). Для поличисел размерности больше двух приходится несколько обобщать понятия аналитичности функций [1] и конформных преобразований [2], поэтому связи между этими обобщенными понятиями необходимо изучить заново.

Поличисловое пространство $P_n \ni X$,

$$X = x^i e_i\,, \quad e_k e_j = p^i_{kj} e_i\,, \tag{1}$$

где x^i координаты в базисе e_i, называется невырожденным, если компоненты тензора

$$q_{ij} = p^m_{ik} p^k_{mj} \tag{2}$$

образуют невырожденную матрицу, и следовательно можно построить дважды контравариантный тензор q^{ij}:

$$q^{im} q_{mj} = q_{jm} q^{mi} = \delta^i_j\,. \tag{3}$$

Функция

$$\Phi(X) = \varphi^1(x^1, x^2, ..., x^n)e_1 + \varphi^2(x^1, x^2, ..., x^n)e_2 + ... + \varphi^n(x^1, x^2, ..., x^n)e_n \tag{4}$$

поличисловой переменной $X \in P_n$ называется *обобщенно-аналитической* [1], если существуют такой объект связности $\tilde{\Gamma}^i_{kj}$ и такая функция

$$\dot{\Phi}(X) = \dot{\varphi}^1(x^1, x^2, ..., x^n)e_1 + \dot{\varphi}^2(x^1, x^2, ..., x^n)e_2 + ... + \dot{\varphi}^n(x^1, x^2, ..., x^n)e_n\,, \tag{5}$$

что

$$\tilde{D}\Phi(X) = \dot{\Phi}(X) dX\,, \tag{6}$$

где

$$\tilde{D}\Phi(X) = (\tilde{\nabla}_k \varphi^i) dx^k e_i \,, \;\; \tilde{\nabla}_k \varphi^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^i_{kj} \varphi^j \,. \tag{7}$$

Из формул (6), (7) получим

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^i_{kj} \varphi^j = p^i_{kj} \dot{\varphi}^j \,. \tag{8}$$

Если ε^i – координаты единицы в базисе e_i, то

$$\varepsilon^k p^i_{kj} = \delta^i_j, \tag{9}$$

поэтому

$$\dot{\varphi}^i = \varepsilon^m \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^m} + \tilde{\Gamma}^i_{mj} \varphi^j \right) \,. \tag{10}$$

Таким образом, обобщенно-аналитической функции должны удовлетворять соотношениям Коши-Римана:

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^i_{kj} \varphi^j = p^i_{kj} \varepsilon^s \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^s} + \tilde{\Gamma}^j_{sm} \varphi^m \right) \,, \tag{11}$$

или кратко

$$\tilde{\nabla}_k \varphi^i = p^i_{kj} \varepsilon^s \tilde{\nabla}_s \varphi^j \,. \tag{12}$$

Функции φ^i являются компонентами контравариантного тензора. Если $\tilde{\Gamma}^j_{sm} = 0$, то $\Phi(X)$ – аналитическая функция поличисловой переменной P_n.

Взаимно однозначное отображение одной области $O_X \ni X$ на ту же или на другую область $O_Y \ni Y$

$$y^i = f^{(i)}(x^1, x^2, ..., x^n) \tag{13}$$

поличислового пространства $P_n \supset O_X, O_Y$ называется *элементарным обобщенно-конформным* [2], если функции $f^{(i)}$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x^k \partial x^l} = \Gamma^m_{kl} \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x^m} \,, \tag{14}$$

где

$$\Gamma^m_{kl} = \frac{1}{2}(p_l \delta^m_k + p_k \delta^m_l) - \Delta^{pm}_{kl} \frac{\partial L}{\partial x^p} \,, \tag{15}$$

p_l, L – некоторые тензорные поля, а Δ^{pm}_{kl} – числовой тензор, определяемый метрикой поличислового пространства, то есть тензором p^i_{kj}. Функции $f^{(i)}(x^1, x^2, ..., x^n)$ – это скалярные функции точки пространства.

Группа обобщенно-конформных преобразований включает в себя элементарные обобщенно-конформные преобразования, обратные им и всевозможные произведения выше названных.

Построение обобщенно-аналитических функций

Предположим, что нам известно элементарное обобщенно-конформное преобразование (13)

$$O_X \xrightarrow{f} O_Y \tag{16}$$

в пространстве P_n, тогда нам известны n скалярных функций $f^{(i)}(x^1,...,x^n)$, из которых можно образовать n ковариантных тензоров

$$\varphi_i^{(k)} = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x^i}\,. \tag{17}$$

Существует много разных способов построения обобщенно-аналитических функций на основе функций $\varphi_i^{(k)}$. Особо важны такие способы построения, которые дают аналитические функции, если функции $f^{(i)}(x^1,...,x^n)$ есть компоненты аналитической функции. Приведем два наиболее интересные, на наш взгляд, и простые способа.

I способ

Так как поличисловое пространство невырождено, то существует тензор q^{ij} (2), (3); а значит, можно построить n контравариантных векторов

$$\varphi^{(s)i} = q^{ij}\varphi_j^{(s)}\,. \tag{18}$$

Для того чтобы функции $\varphi^{(s)i}$ являлись компонентами обобщенно-аналитической функции $\Phi^{(s)}(X)$, необходимо и достаточно выполнение соотношений Коши-Римана (11). Подставим (18) в (11), используем формулы

$$\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^m}\frac{\partial x^k}{\partial f^{(s)}} = \delta_m^k \tag{19}$$

и (3), получим

$$\tilde\Gamma^i_{kj} + q^{im}\tilde\Gamma^r_{km}q_{rj} = p^i_{kt}\varepsilon^s\left(\tilde\Gamma^t_{sj} + q^{tm}\tilde\Gamma^r_{sm}q_{rj}\right)\,. \tag{20}$$

Эта система линейных уравнений относительно $\tilde\Gamma^i_{kj}$ содержит n^3 неизвестных. Не все из этих уравнений линейно независимы, так как существует, по крайней мере, n^2 линейных зависимостей между этими линейными уравнениями, чтобы это установить, достаточно свернуть левую и правую части системы (20) с тензором ε^k. Общее решение системы линейных уравнений можно всегда представить как сумму частного решения, в данном случае

$$\tilde\Gamma^i_{(p)kj} = -q^{im}\Gamma^r_{km}q_{rj}\,, \tag{21}$$

и общего решения $\tilde\Gamma^i_{(0)kj}$ соответствующего однородного уравнения. Объект

$$\tilde\Gamma^i_{(0)kj} = p^i_{kt}D^t_j(x^1,...,x^n) + \delta^i_k d_j(x^1,...,x^n)\,, \tag{22}$$

где D^t_j, d_j – произвольные поля, является решением однородной системы уравнений (20) и формально содержит (n^2+n) произвольных функций, но нам не удалось строго доказать для произвольных невырожденных поличисел P_n, что (22) есть общее решение однородной системы уравнений. Тем не менее, того произвола, который содержится в (22), достаточно для построения обобщенно-аналитических функций комплексной и H_4 переменных.

Итак, если $f^{(i)}(x^1,x^2,...,x^n)$ – функции осуществляющие элементарное обобщенно-конформное преобразование, то функции $\varphi^{(s)i}$ являются компонентами n обобщенно-аналитически функций

$$\Phi^{(s)}(X) = \varphi^{(s)i}e_i \tag{23}$$

с объектами связности

$$\tilde\Gamma^i_{kj} = \tilde\Gamma^i_{(p)kj} + \tilde\Gamma^i_{(0)kj}\,, \tag{24}$$

при этом за счет имеющегося произвола должно выполняться обязательное условие: когда $\Phi^{(s)}(X)$ – аналитическая функция,

$$\tilde{\Gamma}^i_{kj} \equiv 0\,. \tag{25}$$

Заметим, что это условие всегда можно выполнить, если $\tilde{\Gamma}^i_{(0)kj}$ – есть общее решение однородной системы уравнений (20), так как соотношения Коши-Римана выполняются при условии (25) для аналитических функций переменной P_n.

II способ

Образуем тензор вида

$$\omega_{ij} = a_{(st)}(x^1, ..., x^n)\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^i}\frac{\partial f^{(t)}}{\partial x^j}\,, \tag{26}$$

где $a_{(st)}$ – скалярные функции точки, причем матрица $(a_{(st)})$ невырожденная. Тогда матрица (ω_{ij}) также является невырожденной, поэтому можно построить тензор ω^{ij}:

$$\omega^{ik}\omega_{kj} = \omega_{jk}\omega^{ki} = \delta^i_k\,. \tag{27}$$

Если матрица $(a_{(st)})$ несимметрическая, то и матрица (ω_{ij}) – тоже несимметрическая. Частные производные от элементов матрицы (ω_{ij}) определяются формулой

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_{(st)}}{\partial x^k}\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^i}\frac{\partial f^{(t)}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{ki}\omega_{mj} + \omega_{im}\Gamma^m_{kj}\,, \tag{28}$$

тогда частные производные от контравариантного тензора ω^{ij} можно вычислять по формуле

$$\frac{\partial \omega^{ir}}{\partial x^k} = -\omega^{ip}\frac{\partial \omega_{pj}}{\partial x^k}\omega^{jr}\,. \tag{29}$$

Построим компоненты обобщенно аналитической функции следующим образом:

$$\varphi^{(s)i} = \omega^{ir}\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^r}\,. \tag{30}$$

Подставим $\varphi^{(s)i}$ в соотношения Коши-Римана для обобщенно-аналитических функций, получим систему линейных уравнений для определения $\tilde{\Gamma}^i_{kq}$, причем общее решение соответствующей однородной системы будет таким же, как в I-м способе, а частное решение будет иметь вид

$$\tilde{\Gamma}^i_{(p)kq} = \Gamma^i_{kq} + \omega^{ir}\frac{\partial a_{(st)}}{\partial x^k}\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^r}\frac{\partial f^{(t)}}{\partial x^q}\,. \tag{31}$$

Если матрица (a_{st}) является числовой, то получим

$$\tilde{\Gamma}^i_{(p)kq} = \Gamma^i_{kq}\,. \tag{32}$$

Общее решение соответствующей однородной системы следует выбирать, как и выше, таким образом, чтобы в результате решение обладало свойством: когда функции (30) являются компонентами аналитической функции, $\tilde{\Gamma}^i_{kq} \equiv 0$.

Комплексные числа

Пусть
$$F(z) = f^{(1)} + if^{(2)} = u + iv \tag{33}$$
– аналитическая функция комплексной переменой $z = x + iy$.

В работе [2] получены объекты Γ^m_{kl} для компонент аналитической функции $F(z)$ комплексной переменной,
$$\Gamma^m_{kl} = \frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x^l}\delta^m_k + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^k}\delta^m_l - g^{mp}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^p}g_{kl}\right), \tag{34}$$
где
$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = diag(1,\, 1)\,, \qquad \Lambda = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{35}$$

I способ

Учитывая, что
$$(q_{ij}) = (q^{ij}) = diag(1,\, -1)\,, \tag{36}$$
получим
$$(\varphi^{(1)i}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right), (\varphi^{(2)i}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{37}$$
Компоненты $\varphi^{(1)i}$ и $\varphi^{(2)i}$, являются компонентами двух аналитических функций. Первая – это производная от исходной аналитической функции, а так как компоненты второй функции удовлетворяют соотношениям Коши-Римана, то и она является аналитической.

Подберем $\tilde{\Gamma}^i_{(0)kj}$ таким образом, чтобы для конформного преобразования первого рода $\tilde{\Gamma}^m_{kl} = 0$. Подставим (34) в (21), добавим $\tilde{\Gamma}^m_{(0)kl}$ (22) и эту сумму приравняем к нулю. В результате получим систему уравнений
$$-\frac{1}{2}\left(q^{im}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x^m}q_{kj} + \frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x^k}\delta^i_j - q^i_k\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x^p}q^p_j\right) + p^i_{kt}D^t_j + \delta^i_k d_j = 0\,, \tag{38}$$
где
$$(q^i_k) = diag(1\,, -1)\,. \tag{39}$$
Из этой системы уравнений найдем:
$$\left.\begin{aligned} D^1_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x} - d_1\,,\ & D^1_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial y} - d_2\,, \\ D^2_1 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial y}\,, & D^2_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x}\,, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$
где d_1 и d_2 – произвольные функции.

II способ

Пусть
$$(a_{(st)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{41}$$
то есть
$$\omega_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j} + \frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\,. \tag{42}$$

Используя соотношения Коши-Римана для аналитической функции $F(z) = u + iv$, имеем

$$(\omega_{ij}) = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{43}$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 , \tag{44}$$

а значит

$$(\omega^{ij}) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{45}$$

Построим функции $\varphi^{(s)i}$:

$$(\varphi^{(1)i}) = \left(\omega^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} , \tag{46}$$

$$(\varphi^{(2)i}) = \left(\omega^{ij}\frac{\partial v}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} . \tag{47}$$

Так как

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) , \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right) , \tag{48}$$

$\varphi^{(1)i}$ и $\varphi^{(2)i}$ – компоненты аналитических функций комплексной переменной. Выясним возможно ли так подобрать в данном случае функции D^t_l и d_l в объектах связности $\tilde{\Gamma}^m_{kl}$, чтобы $\tilde{\Gamma}^m_{kl} = 0$. Для этого надо решить систему линейных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x^l}\delta^m_k + \frac{\partial L}{\partial x^k}\delta^m_l - g^{mp}\frac{\partial L}{\partial x^p}g_{kl} + p^m_{kt}D^t_l + \delta^m_k d_l = 0 \tag{49}$$

относительно неизвестных функций $D^t_l,\ d_l$. Эта система уравнений является совместной и имеет следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} D^1_1 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x} - d_1 , \ D^1_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial y} - d_2 , \\ D^2_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial y} , \qquad\quad D^2_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x} . \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Поличисла H_4

В пространстве H_4 произвольная аналитическая функция в ψ-базисе имеет вид

$$F(X) = f^{(1)}(\xi^1)\psi_1 + f^{(2)}(\xi^2)\psi_2 + f^{(3)}(\xi^3)\psi_3 + f^{(4)}(\xi^4)\psi_4 , \tag{51}$$

где

$$X = \xi^i\psi_i , \qquad \psi_i\psi_j = p^k_{ij}\psi_k , \qquad p^k_{ij} = \delta_{ij}\delta^k_{i\_} , \tag{52}$$

$i = i_-$, но по этой паре индексов не ведется суммирование. Система уравнений для функций $f^{(i)}$, которые осуществляют элементарное обобщенно-конформные преобразования в координатном пространстве поличисел H_4, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial \xi^k \partial \xi^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l \delta_k^m + p_k \delta_l^m) - p_{kl}^m \frac{\partial L}{\partial \xi^{l_-}}\right] \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \xi^m} \,. \qquad (53)$$

Любая аналитическая функция переменной H_4, которая осуществляет взаимно однозначное отображение некоторой области координатного пространства H_4 на ту же или некоторую другую область того же пространства, определяет конформное преобразование и удовлетворяет системе уравнений (53) с

$$p_i = 0 \,, \qquad L = -\ln \left| \frac{\dot f^{(1)} \dot f^{(2)} \dot f^{(3)} \dot f^{(4)}}{const} \right| \,. \qquad (54)$$

I способ

Так как в пространстве H_4 можно образовать тензор

$$q_{ij} = p_{ik}^m p_{mj}^k, \qquad (q_{ij}) = diag(1,1,1,1), \qquad (55)$$

то существует и дважды контравариантный тензор q^{ij}, причем

$$(q^{ij}) = diag(1,1,1,1). \qquad (56)$$

Очевидно: если $f^{(s)}$ – компоненты аналитической функции, то и $\varphi^{(s)i}$ (18) – компоненты аналитической функции. Попытаемся подобрать $\tilde\Gamma^i_{(0)kj}$ (22) таким образом, чтобы в этом случае $\tilde\Gamma^i_{kj} = 0$. Решая систему линейных уравнений

$$q^{im} p_{km}^r \frac{\partial L}{\partial \xi^{m_-}} q_{rj} + p_{kt}^i D_j^t + \delta_k^i d_j = 0 \qquad (57)$$

относительно неизвестных D_j^i и d_j, получим:

$$D_j^i = -\delta_j^i \frac{\partial L}{\partial \xi^{j_-}} - d_j \,. \qquad (58)$$

Итак, условие обращения в нуль объекта $\tilde\Gamma^i_{kj}$, когда функции $f^{(s)}$ осуществляют конформное преобразование, всегда можно выполнить, положив

$$d_i = 0 \,, \qquad D_k^i = -\delta_k^i \frac{\partial L}{\partial \xi k_-} \,. \qquad (59)$$

II способ

Определим тензор ω_{ij} следующим образом:

$$\omega_{ij} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \xi^i}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \xi^i}\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial \xi^i}\frac{\partial f^{(3)}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial f^{(4)}}{\partial \xi^i}\frac{\partial f^{(4)}}{\partial \xi^j} \,, \qquad (60)$$

тогда, если $f^{(s)}$ – компоненты аналитической функции переменной H_4, получим

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} (\dot f^{(1)})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\dot f^{(2)})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\dot f^{(3)})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\dot f^{(4)})^2 \end{pmatrix} , \qquad (61)$$

$$\left.\begin{aligned} (\varphi^{(1)i}) &= \left(\frac{1}{\dot f^{(1)}(\xi^1)}, 0, 0, 0\right)\,, \\ (\varphi^{(2)i}) &= \left(0, \frac{1}{\dot f^{(2)}(\xi^2)}, 0, 0\right)\,, \\ (\varphi^{(3)i}) &= \left(0, 0, \frac{1}{\dot f^{(3)}(\xi^3)}, 0\right)\,, \\ (\varphi^{(4)i}) &= \left(0, 0, 0, \frac{1}{\dot f^{(4)}(\xi^4)}\right)\,. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Таким образом, $\varphi^{(s)i}$ – компоненты аналитических функций переменной H_4, поэтому надо потребовать, чтобы в этом случае объекты $\tilde{\Gamma}^m_{kl}$ обращались в нуль, то есть выполнялась следующая система уравнений:

$$-p^m_{kl}\frac{\partial L}{\partial \xi^{l-}} + p^m_{kt}D^t_l + \delta^m_k d_l = 0\,. \tag{63}$$

Эта система линейных уравнений относительно D^t_l и d_l является совместной и имеет следующее решение:

$$D^i_j = \delta^i_j\frac{\partial L}{\partial \xi^{j-}} - d_j\,. \tag{64}$$

Заключение

В работе [1] отмечалось, что сформулированное в ней понятие обобщенно-аналитической функции слишком общо и нужны некоторые дополнительны условия (или условие) для выделения из этого множества функций физически значимого подмножества. В то же время понятие конформных преобразований в работе [2] обобщено, на наш взгляд, минимально возможным образом. Поэтому мы убеждены, что единственным и достаточным требованием для выделения физически значимого подмножества из множества обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной является следующее: любая физически значимая обобщенно-аналитическая функция поличисловой переменной P_n может быть получена тем или иным образом из обобщенно-конформных преобразований пространства P_n так, что, когда обобщенно-конформные преобразования осуществляются компонентами аналитических функций, получалась бы аналитические функции. В настоящей работе показано, что установить такое соответствие между обобщенно-конформными преобразованиями и физически значимым классом обобщенно-аналитических функций вполне возможно.

Литература

[1] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (2004), 75 – 88.

[2] Г. И. Гарасько: Обобщение понятия конформных преобразований, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (3)** (2005), 16 – 25.