ФИЛОСОФСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ФИНСЛЕРОВЫХ РАСШИРЕНИЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Исторически первое известное упоминание о принципиальной возможности существования геометрий, чей линейный элемент не обязан быть связываемым с корнем квадратным из квадратичной формы от дифференциалов компонент, принадлежит Риману. В связи с этим, такие геометрии, вполне уместно было бы называть римановыми, однако ныне их все же принято связывать с именем другого ученого – Финслера. Отчасти в данном казусе виноват сам Риман, так как буквально вслед за высказыванием о правомочности неквадратичных метрик, заявил, что такие геометрии слишком сложны, плохо интерпретируемы и, навряд ли, обладают сколь-нибудь своеобразным содержанием [1]. Как ни странно, абсолютное большинство современных физиков считает практически так же. Одной из целей данной работы является желание хотя бы отчасти поколебать эту несправедливую уверенность и показать, что финслерова геометрия в самом ближайшем будущем может стать той ареной, на которой продолжится развитие физики вообще и общей теории относительности в частности.

Конечно, пренебрежение финслеровой геометрией возникло не на пустом месте и к пессимистическому выводу о ее перспективах и Римана, и многих его современных последователей привели достаточно серьезные соображения. Первое из них, носящее скорее субъективный характер и связанное с предубеждением о сложности и малой наглядности, было уже высказано выше. Другим мощным сдерживающим фактором явилось доказательство в конце девятнадцатого – начале двадцатого века ряда теорем [2, 3], согласно которым группы симметрий, оставляющие инвариантным линейный элемент, оказываются обладающими максимальным числом независимых параметров именно в случаях квадратичных геометрий. Сомневаться же в рациональности использования в физике наиболее богатых на симметрии многообразий сегодня, похоже, не приходится. Третья причина была обусловлена отсутствием вплоть до последнего времени естественной альтернативы понятию скалярного произведения, широко используемого в римановых построениях. В связи с чем, в финслеровой геометрии доминирующее влияние приобрел так называемый финслеров метрический тензор [4], по сути, явившийся лишь незначительной модификацией риманова тензора и потому его использование лишь усугубило проблему. Следующий аргумент против финслеровой геометрии многие связывают с наблюдаемым фактом высокой степени изотропности окружающего нас трехмерного пространства. Поскольку финслеровы метрики приводят к анизотропии, значит, если и следует использовать неквадратичные геометрии, то лишь слабо отличающиеся от римановых. Наконец последняя, казалось бы, никак не коррелирующая с геометрией причина была обусловлена теоремой Фробениуса, утверждающей, что гиперкомплексные алгебры, обладающие обычными арифметическими законами сложения и умножения, связаны только с действительными и комплексными числами. Некоторые математики увидели в этой теореме, в общем-то, не следующий из нее вывод, что классификация чисел далее комплексных не распространяется, а, следовательно, и мощнейший стимул изучения геометрий ассоциированных с соответствующим кругом гиперкомплексных алгебр оказался временно не задействованным.

Как будет показано ниже, к настоящему времени все приведенные выше аргументы против использования финслеровых построений применительно к реальному пространству-времени, если и не преодолены полностью, то значительно поколеблены, а, значит, нет и поводов относиться к финслеровой геометрии, как к второстепенному приложению к римановой.

* * *

Начнем с утверждения о сложности и малой наглядности. По сути, единственное отличие некоторых финслеровых пространств от привычной и во многом именно потому кажущейся наглядной евклидовой геометрии заключается в том, что множество точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки (а это ни что иное, как определение сферы) оказывается не обычной евклидовой сферой, а более сложной гиперповерхностью. Однако, даже в ставшей почти классической геометрии Минковского, такое множество отличается от евклидовой сферы и представляет собой объединение трех гиперболоидов: двух действительных и одного мнимого. Обычно их изображают в трехмерном аффинном пространстве в виде, как это представлено на рис. 1, а. Сегодня вряд ли кого удивляет, что эта поверхность, достаточно сильно отличающаяся от обычной сферы, в геометрическом смысле именно таковой и является. В простейших линейных финслеровых пространствах все почти аналогично псевдоевклидову случаю, с той разницей, что в аффинном представлении сфера (индикатрисса) может выглядеть еще более экзотично, например так, как это изображено на рис. 1, б.

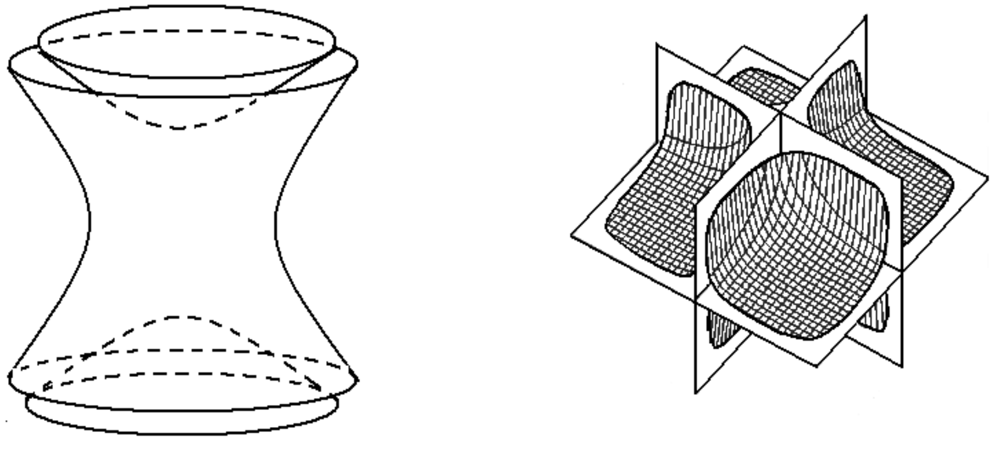

Рис. 1: Примеры индикатрис в трехмерном а) псевдоевклидовом и б) финслеровом пространствах.

Вслед за сферами можно ввести и другие элементарные поверхности, например, соответствующие евклидову понятию гиперплоскости. Для этого достаточно заметить, что гиперплоскость квадратичных пространств – это множество точек, каждая из которых удалена на одинаковое расстояние от двух фиксированных точек (рис. 2, а). В пространствах с другой метрикой так определенная поверхность уже не совпадает с аффинной плоскостью и, скажем, может выглядеть так, как изображено на рис. 2, б. Оперируя этими и другими простейшими геометрическими объектами, геометрия, существенно отличающаяся от евклидовой, предстает перед нами, если и не очевидной, то достаточно простой и логичной.

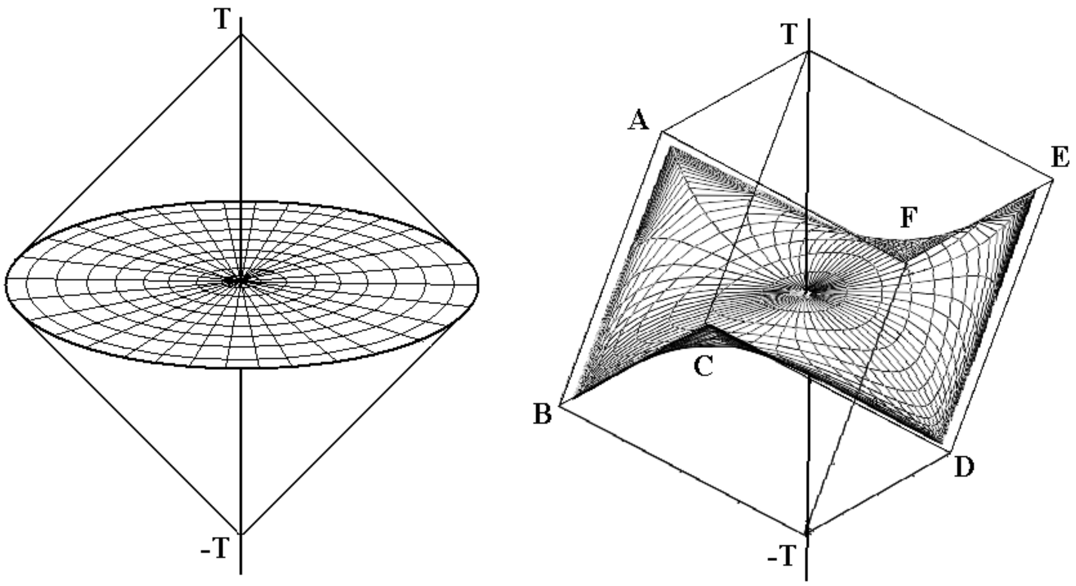

Рис. 2: Пример поверхностей, точки которых равноотстоят от двух фиксированных точек (T и $-T$) в трехмерном а) псевдоевклидовом и б) финслеровом пространствах.

Таким образом, в неквадратичных пространствах поверхности в метрическом плане играющие роль гиперплоскостей, в аффинном смысле таковыми не являются и это оказывается весьма существенным обстоятельством, так как приводит к необходимости отказаться от автоматического использования многих приемов римановой геометрии основывающихся на свойствах плоскости и, в частности, от метода касательных расслоений. При этом, естественно, такой отказ не обязан быть абсолютным, просто необходимо крайне осторожно относиться к формальным заимствованиям и там где требуется – разрабатывать естественные альтернативы.

* * *

Переходя к проблеме уникального богатства на симметрии именно квадратичных (то есть римановых) геометрий, следует отметить, что этот факт относится только к симметриям типа обычных движений, то есть, к линейным преобразованиям, оставляющим инвариантными расстояния между точками. Однако даже в случае квадратичных пространств к метрически выделенным, кроме изометрических преобразований относятся еще и преобразования, сохраняющие не длины, а углы. Такие преобразования иногда называют конформными движениями. Но ведь это те же симметрии, только нелинейные. И вот достаточно неожиданно выясняется, что, проигрывая квадратичным пространствам в разнообразии изометрических преобразований, некоторые финслеровы пространства оказываются существенно богаче тех в смысле симметрий общего нелинейного вида [6].

Но в вопросе о симметриях есть еще одно, даже более серьезное, чем сравнение конформных преобразований, обстоятельство. Симметрии пространств, к которым относятся многие финслеровы пространства, не ограничиваются одними изометриями и конформными движениями. Для них метрически выделенными оказываются преобразования, сохраняющие не только длины и углы, но и специфические для финслеровых геометрий величины, связываемые уже не с одним и с двумя, а с тремя и более векторами. В квадратичных пространствах таких величин невозможно построить, поэтому подобного рода преобразования в римановых геометриях отсутствуют в принципе. Но в финслеровых пространствах они есть и являются не менее, а вероятно даже и более интересными, чем конформные. Таким образом, в некоторых финслеровых пространствах, в качестве своеобразной компенсации за относительную бедность изометрий, возникают не только более богатые группы конформных преобразований, но и существуют условия для появления целых классов новых метрически выделенных нелинейных отображений, которые, до появления подходящего собственного имени, временно будем называть *обобщенно конформными* [6].

На сегодняшний день нам известны только отдельные представители обобщенно конформных преобразований и только для некоторых финслеровых пространств. При этом решение задачи их полного перечисления является, на наш взгляд, одной из приоритетных в современной финслеровой геометрии. Следует отметить, что так ставящаяся задача достаточно сложна, поскольку предполагает работу уже не только с группами симметрий, но и с их обобщениями, например такими, когда некоторые множества преобразований связаны между собой не только би-, но и n-арными операциями, а те, в свою очередь, могут не иметь при этом в своем составе тождественного или обратного преобразования. По сути, речь идет о новом взгляде на широко известную Эрлангенскую программу Клейна, в которой основная задача геометрии была обозначена, как изучение групп симметрий. Сейчас же предлагается сосредоточиться на расширении самого понятия симметрии и перейти от его достаточно частного случая обязанного своим появлением изометрическим и конформным преобразованиям, к связанным с уже обобщенно конформными отображениями.

* * *

Перейдем теперь к проблеме скалярного произведения и тесно связанному с ней понятию метрического тензора. В двадцатых годах прошлого века Сингом, Тейлором и Бервальдом [4] было предложено определение финслерова метрического тензора, который с одной стороны наследовал одно из основных свойств обычного риманова метрического тензора иметь два индекса, а с другой -– отражал специфическую особенность неквадратичных геометрий опираться на понятие обобщенной сферы, так называемую индикатрису. При всем удобстве такого подхода, он обладает определенной ограниченностью, основной причиной которой является то, что данный метрический тензор базируется не на собственном для конкретной финслеровой геометрии обобщении скалярного произведения, а заимствует структуру тензора совершенно иной (то есть квадратичной) природы. Образно выражаясь, финслерову геометрию стали строить не на специально для нее подготовленном основании, а на фундаменте, предназначенном для совершенно другого здания. Вряд ли, при этом стоило ожидать особой элегантности получившейся конструкции. При этом абсолютное большинство физиков и математиков в своих выводах о малой перспективности финслеровых построений опираются именно на созерцание такой достаточно ущербной постройки.

Между тем, существует целый класс финслеровых пространств, которые допускают естественное расширение понятия скалярного произведения. В таких пространствах роль билинейной симметрической формы от двух векторов начинает играть полилинейная симметрическая форма от m векторов [5], а место квадрата длины вектора занимает его m-я степень. Принципиальным следствием такого расширения оказывается необходимость пересмотреть сложившуюся практику безальтернативного применения двухиндексного финслерова метрического тензора, упоминавшегося выше, заменяя его тензором, связанным с соответствующей полилинейной формой. Очевидно, что в таком общем случае у метрического тензора уже не два, а большее число индексов. Преимущество подобной замены, помимо того, что она абсолютно естественна, заключается в том, что количество независимых компонент нового метрического тензора резко возрастает при той же размерности пространства. Так, в четырехмерных пространствах с кубической формой метрический тензор имеет уже не десять независимых компонент, как в классической ОТО, а двадцать. В пространствах же с квадранарной формой у метрического тензора уже тридцать пять независимых компонент. По сути, это означает, что системы уравнений, определяющих в соответствующих финслеровых многообразиях поля нового тензора, должны оказаться существенно более богатыми, чем система уравнений Эйнштейна, причем, оставаясь в рамках четырех измерений!

Следует отметить, что данное направление развития финслеровой геометрии и ее применений к физике идеологически достаточно близко к ОТО, однако связано с необходимостью разработки принципиально нового математического аппарата. В частности, привычное разделение компонент тензоров на ко- и контравариантные, по-видимому, потребуется расширить, а это значит – понадобятся способы не только поднятия и опускания индексов, но и более сложные методы жонглирования ими.

* * *

Не менее интересна и проблема изотропности направлений. Традиционно считается, что если исходить из четырехмерности реального пространства-времени, то чуть ли не единственными метриками, удовлетворительно согласующимися с наблюдаемой в экспериментах высокой степенью изотропии окружающего нас трехмерного пространства, являются метрики Галилея и Минковского, содержащие евклидово пространство, как подпространство. При этом, часто упускается из виду, что сами эти четырехмерные пространства относятся к типично анизотропным, поскольку в них любое времениподобное направление кардинально отличается от всякого пространственноподобного. Кроме того, есть примеры четырехмерных финслеровых пространств, не содержащих евклидово подпространство, но в которых с точки зрения наблюдателя, воспринимаемое тем трехмерное окружение, будет *казаться* практически изотропным, во всяком случае, в некотором диапазоне параметров. Более того, уже сейчас можно назвать минимум две финслеровы метрические функции, которые приводят именно к таким квазиизотропным эффектом.

Одна из этих финслеровых метрик связана не с квадратичной, а с кубической формой и имеет вид симметрического многочлена третьей степени:

$$S^3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4\,. \tag{1}$$

Первым обратил внимание на данную метрику в контексте ее возможного отношения к геометрии реального пространства-времени профессор Самарского Аэрокосмического университета Владимир Михайлович Чернов, поэтому ее и связанное с нею пространство, я позволю себе называть его именем. Необычной особенностью пространства Чернова является то, что оно вообще не содержит непрерывных вращений, другими словами, группа линейных преобразований, аналогичная группе Лоренца в нем -– нульпараметрическая. Однако, несмотря на это, утверждение, что данное пространство может с успехом конкурировать с пространством Минковского в качестве арены физических явлений не является абсурдным. Дело в том, что, отсутствуя в качестве изометрических симметрий, группа Лоренца может присутствовать в нем как одна из подгрупп обобщенно конформных преобразований. К сожалению, пространство Чернова еще слишком мало изучено, чтобы однозначно заявлять об этом. Уверен, что пристальное изучение данного пространства и исследование групп его нелинейных симметрий помогут нам выйти за рамки привычных квадратичных представлений и приблизиться к пониманию существенно более сложных финслеровых пространств, чьи метрические формы имеют еще более высокий порядок.

В частности, к таким пространствам относится четырехмерное пространство с метрикой Бервальда-Моора, имеющей в одном из базисов вид симметрического многочлена (вернее моночлена) четвертой степени:

$$S^4 = x_1 x_2 x_3 x_4. \tag{2}$$

Кстати, нелишним будет отметить, что квадратичная форма пространства Минковского в аналогичном базисе, состоящем из четырех векторов лежащих на световом конусе, имеет также вид симметрического многочлена, только второй степени:

$$S^2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4. \tag{3}$$

Это поистине удивительное обстоятельство, которое по не очень понятным причинам почти не обсуждалось физиками, на наш взгляд, является ключевым в понимании тесной родственной связи трех геометрий, одна из которых общепризнанна, а две других с метриками (1) и (2), вполне вероятно, смогут стать не менее популярными в самом ближайшем будущем. Во всяком случае, в каждой из них с точки зрения наблюдателя, ассоциируемого с некоторой мировой линией, окружающий Мир предстает в виде пары: одномерного времени и трехмерного пространства, расстояния в котором в определенном диапазоне параметров соответствуют евклидовой геометрии. Иными словами, в определенном приближении реализуется геометрия пространства-времени классической физики Галилея-Ньютона.

* * *

Как ни парадоксально, самым содержательным и сложным из трех пространств оказывается то, что связано с метрической функцией Бервальда-Моора, которая хоть и выглядит наиболее элементарно, приводит к геометрии, включающей в себя в качестве последовательных приближений две остальные, а заодно, как отмечалось выше, и геометрию классической физики. Но у данного пространства имеется еще одно чрезвычайно важное обстоятельство. В отличие от пространств Галилея, Минковского и Чернова оно непосредственным образом связано с пожалуй самым фундаментальным понятием математики – *числом*. Причем эта связь реализуется практически так же, как между геометрией евклидовой плоскости и алгеброй комплексных чисел, а так же между геометрией четырехмерного евклидова пространства и алгеброй кватернионов. Только в отличие от последней, алгебра соответствующая пространству с метрикой Бервальда-Моора (назовем ее алгеброй квадрачисел), является коммутативно-ассоциативной и она изоморфна прямой сумме четырех действительных алгебр. Более простую четырехкомпонентную алгебру просто трудно представить.

С другой стороны, стоящая за этой простейшей алгеброй геометрия, далеко не тривиальна. Она оказывается таковой благодаря разнообразию нелинейных операций связанных с обобщенно конформными преобразованиями, примерно так же, как существование бесконечнопараметрической группы конформных преобразований евклидовой плоскости приводит к превращению, в общем-то, элементарной алгебры комплексных чисел в мощнейший аппарат комплексного анализа. Как известно, одним из последствий подобного симбиоза оказывается возможность построения на комплексной плоскости весьма интересных геометрических объектов: алгебраических фракталов, среди которых – носящие имена Жюлиа и Мандельброта. Красота и гармония комплексных фракталов настолько замечательны, что, глядя на них, поневоле возникает желание повторить аналогичные построения и в многомерных пространствах. Представляется, что, используя квадрачисла, мы, как раз, и получаем соответствующую возможность, причем в этом случае фрактальные объекты могут изображаться трехмерными и к тому же эволюционирующими во времени.

Идея, что физику можно строить, отталкиваясь от гиперкомплексных числовых структур, принадлежит Уильяму Гамильтону, которому, как известно, принадлежит честь открытия первой гиперкомплексной алгебры – алгебры кватернионов. Замечу, что этот выдающийся математик известен многими достижениями, но кватернионы считал самым главным своим открытием и именно им он самозабвенно посвятил большую часть оставшейся жизни. И хотя претворить в жизнь красивейшую идею связать с кватернионами значительную часть физики ни ему, ни многочисленным его последователям так и не удалось, кватернионы, все равно, являются самыми известными гиперчислами, а их приложения достаточно интересны и многочисленны. Как знать, быть может то, что не удалось Гамильтону с кватернионами, окажется достижимым на основе более элементарных квадрачисел и мы, как некогда Пифагор, когда-нибудь сможем воскликнуть: “Все сущее – суть числа”. Только естественно, вместо достаточно узкого понимания под числами рациональных, действительных или комплексных представителей будем рассматривать существенно более широкий круг их гиперкомплексных расширений, а вместо обычной евклидовой или псевдоевклидовой геометрии – их финслеровы обобщения.

Литература

1. Б. Риман: О гипотезах, лежащих в основании геометрии. В кн. Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.

2. Г. Гельмгольц: О фактах, лежащих в основаниях геометрии. В кн. Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.

3. С. Ли: Замечания на работу Гельмгольца “О фактах, лежащих в основаниях геометрии”. В кн. Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.

4. Х. Рунд: Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. Наука, М. 1981.

5. Д. Г. Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)**, 2004.

6. Г. И. Гарасько: Обобщение понятия конформных преобразований. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (3)**, 2005.