ОТ 2D КОНФОРМНЫХ К 4D САМОДУАЛЬНЫМ ТЕОРИЯМ: КВАТЕРНИОННАЯ АНАЛИТИЧНОСТЬ[1]

М. Эванс,[2] Ф. Гюрши [3] и В. Огивецкий [4]

Теоретическое Отделение, ЦЕРН, Женева, Швейцария

Показано, что самодуальные теории обобщают на четыре измерения как конформные, так и аналитические аспекты двумерных конформных теорий поля. На языке гармонического пространства, появляются несколько путей расширения комплексной аналитичности (естественной в двух измерениях) до кватернионной аналитичности (естественной для четырех измерений). Чтобы быть аналитичными, конформные преобразования должны быть реализованы на CP^3, которое возникает как класс смежности комплексифицированной конформной группы по модулю ее максимальной параболической подгруппы. В рамках этого подхода наглядно представляется твисторное соответствие Пенроуза и Уорда и непротиворечиво формулируется аналитичность Фютера.

Феза Гюрши

Феза Гюрши, прекрасный человек и выдающийся физик, ушел из жизни 13 апреля 1992 года. Он является соавтором данной статьи, одной из серии его работ, посвященных кватернионным аспектам четырехмерных теорий поля, области в которой он был пионером. Феза с энтузиазмом принимал участие в написании этой статьи, даже когда он боролся с болезнью, унесшей его жизнь. К сожалению, он не успел утвердить окончательный вариант статьи и не несет поэтому ответственность за какие-либо ее недостатки. Было большим наслаждением и честью работать с Фезой, использовать преимущество его плодотворного мышления и острого ума. Опыт работы с ним и изумительная личность Фезы Гюрши останутся навсегда в памяти двух его соавторов.

Введение

От 2D комплексной к 4D кватернионной аналитичности

Две *действительные* координаты двумерного евклидова пространства достаточно естественно объединяются в *единое комплексное число*

$$x^\mu = \{x^1, x^2\} \quad \longrightarrow \quad z = x^1 + ix^2. \tag{1}$$

Как хорошо известно, наиболее общее конформное преобразование координат в двух (*и только в двух*) измерениях является аналитическим в этих комплексных координатах.

$$z' = f(z), \qquad \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}). \tag{2}$$

[1] CERN-TH.6533/92, ArXiv:hep-th/9207089, перевод А. Виноградовой под ред. А. Элиовича

[2] Рокфеллеровский Университет, Нью-Йорк, USA, evans@physics.rockfeller.edu.

[3] Департамент Физики, Йэльский Университет, Нью Хэвен, скончался.

[4] Прибыл из Лаборатории теоретической физики, ОИЯИ, Дубна, Россия; Департамент Теоретической Физики, Женевский университет, Женева, Швейцария.

Благодаря условию Коши-Римана, его даламбертиан обращается в нуль

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Box f(z) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0. \tag{3}$$

В любой размерности более высокого порядка конформные преобразования зависят от конечного числа параметров и даламбертиан бесконечно малых конформных бустов *не обращается в нуль*.

В четырехмерном случае координаты, как хорошо известно, можно объединить в кватернион так же естественно, как в двумерном случае – в комплексное число. В частности, в спинорном формализме имеем

$$x^m = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \longrightarrow z = x^{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} x^0 - ix^3 & -ix^1 - x^2 \\ -ix^1 + x^2 & x^0 + ix^3 \end{pmatrix} =$$
$$x^0 I - i\sigma_a x^a = x^0 + e_a x^a \tag{4}$$

и матрицы Паули представляют алгебру кватернионных единиц, $e_a = -i\sigma_a$

$$e_a e_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} e_c. \tag{5}$$

Аналитические преобразования (2) являются фундаментальными для $2D$-конформных теорий поля. Естественно интересоваться, существуют ли $4D$-теории, в которых некоторая форма кватернионной аналитичности могла бы играть сходную роль [1], [2]. Однако, понятие кватернионной аналитичности оказывается более тонким и мы увидим, что существует множество ее потенциальных форм, но только некоторые из них оказываются интересными (см. например [3]).

Трудности кватернионной аналитичности

Прямым выражением условия Коши-Римана было бы

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{1}{3} e_a \frac{\partial}{\partial x^a}\right) f = 0 \tag{6}$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ определено таким образом, что $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1$. Однако, хорошо известно (см. например [3]), что из-за некоммутативности кватернионов единственное решение уравнения (6) в форме степенных рядов z равно $f = a + zb$ с постоянными кватернионами a и b. Даже $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 = \frac{1}{3}(z - \bar{z})$.

Раньше *Фютеровская кватернионная аналитичность* ([4], [5], [6]) была единственной успешной попыткой найти что-нибудь менее ограничивающее, чем (6). Аналитическая функция кватерниона z определяется рядами типа рядов Вейерштрасса

$$f(z) = \sum a_n z^n, \tag{7}$$

где коэффициенты a_n являются вещественными или комплексными числами (или кватернионами, но стоящими только с одной стороны от z^n, скажем, слева как в (7)). Можно показать, что такая функция удовлетворяет некоторым условиям типа Коши-Римана, но в производных *третьего порядка* вместо первого. Уравнение $\Box f(z) = 0$ не выполняется в общем случае; однако уравнение $\Box^2 f(z) = 0$ сохраняется. В работе

(6) было подчеркнуто, что выше приведенное определение может оставаться в силе в некоторых $SO(4)$ системах координат, но нарушаться в других[5].

Несмотря на эти трудности, в самодуальных теориях [7] и в $N = 2$ суперсимметричных теориях ([8], [9]) возникают многообразия кватернионного типа, а именно кватернионно-кэлеровские и гиперкэлеровские многообразия. В самом деле, проблемы связанные с кватернионной аналитичностью очень напоминают трудности, возникающие при поиске нетривиального понятия кватернионной геометрии. Заманчиво думать, что малое количество решений уравнения (6) является аналитическим проявлением того факта, что только плоские метрики являются гиперкэлеровскими по отношению к интегрируемым почти кватернионным структурам.

Поэтому тот факт, что интересные кватернионные геометрии на самом деле существуют, наводит на мысль, что возможно найти полезное понятие кватернионной аналитичности. Это реализовано в рамках подхода гармонического пространства [10] (разновидность твисторного подхода [11], [12], [13], [14], [15], и т. д.), который оказался эффективным для теорий, обладающих кватернионными структурами ([10], [16], [17], [18], [19], [20], и т. д.), а также для надлежащего улучшения ([5], [6]) выше приведенного определения Фютера (см. также раздел 5).

План и результаты

Смысл настоящей работы заключается в демонстрации того, что приближение гармонического пространства открывает новые горизонты в поисках полезных определений кватернионной аналитичности, включая условия Коши-Римана, накладываемые на производные первого порядка, и с аналитическими функциями со стремящимся к нулю даламбертианом. Данное приближение позволяет достичь этих целей.

Существует несколько путей, на которых можно реализовать гармоническую версию кватернионной аналитичности. Один путь ведет как раз к самодуальным теориям Янга-Миллса и Эйнштейна, которые таким образом, возникают как $4D$-двойники $2D$-конформных теорий поля, в том смысле, что обе являются аналитическими в подходящих значениях размерностей. Мы будем иметь дело в этой статье с представлением самодуальных теорий Янга-Миллса в гармоническом пространстве и с их аналитической структурой в этом пространстве.

Другой путь ведет к "ковариантизации" определения Фютера [5] и соответствующее фактор-пространство также будет обсуждаться.

Заманчивая проблема нахождения четырехмерного двойника двухмерных конформных теорий поля была атакована несколькими авторами, см. частично ссылки к этой работе, например [21], [22]. $4D$-самодуальные калибровочные и гравитационные теории рассматривались как очень перспективные кандидаты. Следует заметить, что тесные связи этих теорий с разнообразными одно- и двухмерными интегрируемыми системами обсуждались уже более десяти лет назад, например [23], [24], [25]. В [26], [27] было сделано даже предположение, что все интегрируемые системы могут быть выведены посредством сокращения размерности из $4D$-самодуальных теорий, наследуя их замечательные свойства. Ряд последних работ ([28], [29], [30], [31], [32], [33] и т. д.) подкрепляют это предположение, обнаруживая также важность обеих сигнатур: (4,0) и (2,2).

[5] Действительно, четырехмерные вращения $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$, как известно, имеют кватернионную форму [1], [6] $z' = mz\bar{n}$, $m\bar{m} = n\bar{n} = 1$, где $m \in SU(2)_L$ и $n \in SU(2)_R$ - единичные кватернионы, представляющие эти группы. Возникают проблемы уже с z^2-членом. Он трансформируется в $mz\bar{n}mz\bar{n}$, что не может быть выражено в начальной аналитической форме вследствие некоммутативности кватернионов.

Подход гармонического пространства позволяет систематически изучить самодуальные теории и их симметрии, основанные на их кватернионной аналитичности (в гармоническом смысле), которая заменяет стандартную комплексную в $2D$-конформных теориях. Конформная инвариантность самодуальности также играет существенную роль: a) Она ставит пространственные и гармонические координаты на равный уровень. б) Требование, что конформные преобразования должны быть аналитическими влечет за собой замечательный феномен *комплексификации*: они могут быть реализованы как действительная $Spin(5,1)$ группа, действующая на 5-мерном компактном смежном классе ее *комплексификации*, $Spin(6,C) \sim SL(4,C)$. Этот смежный класс есть как раз CP^3. Это многообразие является комплексным по отношению к обычному комплексному сопряжению. Однако, оно оказывается *действительным* по отношению к некоторому комбинированному сопряжению, произведению комплексного и антиподального сопряжений.

В этой статье мы ограничимся дискуссией о самодуальных теориях Янга-Миллса в евклидовом пространстве. План статьи состоит в следующем. В разделе 2 мы напоминаем основные свойства гармоник и их отношение к кватернионам. Необходимость комплексификации обсуждается на простом уровне в разделе 2.2. В разделе 3 введено простейшее определение гармонической аналитичности. Ее роль в самодуальных калибровочных теориях продемонстрирована в разделе 4, где также собраны некоторые другие факты [16], [18], [19], касающиеся трактовки самодуальности с позиций гармонического пространства, и даны простые примеры кватернионных аналитических преобразований. Некоторые другие смежные классы $4D$-группы вращения(другой, чем S^2) кратко обсуждены в разделе 5, включая тот, который используется в подходе Фютера. Раздел 6 посвящен полному исследованию классов смежности конформной группы $SO(5,1)$, или, более точно, ее универсальной накрывающей $Spin(5,1)$, поскольку мы имеем дело со спинорными гармониками. Нам снова придется рассмотреть ее действия на смежном классе, CP^3, его комплексифицированной формы, $Spin(6,C) \sim SL(4,C)$. В этом разделе разработана необходимая техника и мы покажем, как эффективно вычислить форму преобразований на таких классах смежности. Некоторые математические определения и утверждения даны в Приложении "Компактные смежные классы некомпактных групп". Другое Приложение представляет 5-параметрическое семейство кватернионных комплексных структур в $4D$.

Гармоники

$SU(2)/U(1)$

Перед обсуждением всех этих вопросов стоит повторить ряд основных положений, касающихся гармоник [16], [10]. Как в любой реализации твисторной программы [11], [12], подход гармонического пространства [10] осуществляется посредством рассмотрения расширенного пространства, что является платой за возможность определить походящие аналитичности. В нашем случае это пространство включает двумерную сферу S^2. Мы начнем с рассмотрения ее как смежного класса группы вращения $Spin(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$ по модулю ее подгруппы $U(1)_L \times SU(2)_R$. Другими словами, мы представим эту сферу как класс смежности $SU(2)/U(1)$. Конечно, для описания этой сферы можно выбрать полярные (θ, ϕ) или стереографические $(z, \bar{z})$ координаты. Однако, оказывается намного более удобным использовать именно гармоники вместо любых специфических координат, потому что гармоники определены на этой сфере *глобально*. Мы будем иметь дело с 2×2 матрицей [10]

$$U = (u_\alpha^-, u_\alpha^+) = \begin{pmatrix} u_1^- & u_1^+ \\ u_2^- & u_2^+ \end{pmatrix} \tag{8}$$

Гармоники имеют $SU(2)$ индексы α и $U(1)$ "заряды" $+, -$. Они преобразуются под действием $SU(2)$ как спиноры, поэтому для $M \in SU(2)$, $(M^+M = 1)$ имеем

$$u_\alpha^{\pm\prime} = M_\alpha^\beta u_\beta^\pm, \qquad U' = MU. \tag{9}$$

В соответствии с природой их смежных классов, гармоники определены по модулю $U(1)$ преобразований, производимых матрицей P,

$$U \longrightarrow UP, \qquad P = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{+i\lambda} \end{pmatrix} \in U(1) \qquad \text{или} \tag{10}$$

$$u_\alpha^{+\prime} \simeq e^{i\lambda} u_\alpha^+, u_\alpha^{-\prime} \simeq e^{-i\lambda} u_\alpha^-. \tag{11}$$

Благодаря такой свободе, можно выразить преобразования матрицы U в форме

$$U' = MUP \qquad (P^+P = 1) \tag{12}$$

Иногда удобно тем или иным образом зафиксировать матрицу P, чтобы перейти к некоторым специфическим координатам, и т. д. Однако, тогда теряется глобальное описание фактор-многообразия (quotient manifold) и возникает хорошо известная проблема Римана-Гильберта.

Окончательно, в $\frac{SU(2)}{U(1)}$ описании S^2 все матрицы U, M и P являются унитарными и гармоники противоположных $U(1)$ зарядов *комплексно сопряжены*,

$$u_\alpha^- = \overline{u^{+\alpha}}, \tag{13}$$

где $SU(2)$-индексы поднимаются обычным образом, $u^{+\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} u_\beta^+$. Гармоники должны подчиняться условию

$$\det U = u^{+\alpha} u_\alpha^- = 1 \tag{14}$$

и имеет место соотношение полноты

$$u^{+\alpha} u_\beta^- - u^{-\alpha} u_\beta^+ = \delta_\beta^\alpha \tag{15}$$

Это соотношение делает возможным удобную операцию проецирования,

$$f_\beta = u^{+\alpha} u_\beta^- - u^{-\alpha} u_\beta^+ f_\beta = (u^{+\alpha} f_\alpha) u_\beta^- - (u^{-\alpha} f_\alpha) u_\beta^+, \tag{16}$$

Так что все свободные непунктирные индексы могут быть приписаны только гармоникам. Мы будем часто пользоваться этим приемом.

Заметим, что так как 2×2 матрицы унитарны, M и U могут одновременно рассматриваться как кватернионы единичной нормы. Поскольку гармоники определены только с точностью до $U(1)$, *фаза* $U(1)$ *не должна входить в какие-либо формулы*. Это означает, что заряд $U(1)$ сохраняется и что *"функции"* на сфере должны обладать *определенным* $U(1)$ зарядом, q. Другими словами, все члены в разложении должны содержать произведения гармоник u^+, u^- одного и того же заряда q. Например, для $q = +1$:

$$f^+(u) = f^\alpha u_\alpha^+ + f^{\alpha\beta\gamma} u_\alpha^+ u_\beta^+ u_\gamma^- + \dots \tag{17}$$

Такие величины будут приобретать общую $U(1)$-фазу; однако, это неважно благодаря предполагаемому сохранению $U(1)$ заряда. Конечно, для каждого члена в гармоническом разложении типа (17) предполагается полная симметричность по индексам $\alpha, \beta, \gamma \dots$, иначе оно сводилось бы к членам низшего порядка посредством условия (14).

Фактически, u^+_α, u^-_α – это фундаментальные сферические гармоники спина 1/2, хорошо знакомые всем из квантовой механике,[6] в то время как (16) является примером гармонического разложения на S^2. Вот почему мы будем ссылаться на u^+_i, u^-_i в дальнейшем просто как на гармоники.

Удобно выполнять как дифференцирование, так и интегрирование на двусфере непосредственно в терминах гармоник. Действие гармонической производной D^{++} на сами гармоники определяется в соответствии с простым правилом

$$D^{++}u^+_\alpha = 0 \qquad D^{++}u^-_\alpha = u^+_\alpha \tag{18}$$

Комплексификация $SU(2)$

На очереди важное замечание. Рассмотрение конформных инвариантов самодуальных уравнений (так же, как и в некоторых других случаях) показывает, что необходимо *комплексифицировать* данное выше описание. Причина состоит в следующем. Параметры конформных бустов имеют размерность *длина*$^{-1}$. Поэтому конформные преобразования гармоник будут линейны в пространственных координатах. Если u^-, u^+ были комплексно сопряженные, как в (13) и если u^+ преобразования были аналитичны [см. разделы 3, 4 и (38), (40)], то преобразования u^- будут неизбежно неаналитичными. Рассматривая действие $SU(2)$ на смежном классе ее комплексификации, можно иметь как u^+, так и u^- преобразующиеся аналитически (см. раздел 3, 4), потому что в этом случае они перестают быть комплексно сопряженными друг другу.

Предварительно мы представим двумерную сферу S^2 как класс смежности $SU(2)/U(1)$. После этого мы будем рассматривать действие $SU(2)$-группы на S^2 смежном классе ее комплексификации $SL(2,C)$. Последняя группа может быть представлена через 2×2 унимодулярные матрицы. Она некомпактна и имеет унимодулярную треугольную подгруппу, которая является ее максимальной параболической подгруппой [35], [15], [35] (смотри Приложение B для математических определений и техники). Известно, что двусфера может также рассматриваться как класс смежности комплексифицированной группы. Используя разложение Ивасавы, взяв параболическую подгруппу равной $P = U(1)\times AN$, A и N – подгруппы $SL(2,C)$, имеем

$$\frac{SL(2,C)}{P} = \frac{SU(2)\times AN}{U(1)\times AN} = \frac{SU(2)}{U(1)} = S^2,$$

или

$$S^2 = \frac{SL(2,C)}{P} = \frac{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ z^{--} & \rho^{-1} \end{pmatrix}}, \quad ad - bc = 1, \tag{19}$$

[6] $U = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\phi}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\phi}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\phi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix}$ в углах Эйлера, третий не нужен, так как берется из уравнения (12) как фаза.

где a, b, c, d, ρ и z^{--} – комплексные числа. Согласно этому представлению, гармоники определены с точностью до преобразований параболической группы

$$u_{\alpha}^{+'} = \rho^{-1} u_{\alpha}^{+}, \qquad u_{\alpha}^{-'} = \rho u_{\alpha}^{-} + z^{--} u_{\alpha}^{+}, \tag{20}$$

которые являются достаточно общими для u^- гармоник. Следовательно, мы приходим к ключевому выводу, что *любое преобразование гармоник может быть сведено к*

$$\delta u_{\alpha}^{+} = \lambda^{++} u_{\alpha}^{-}, \qquad \delta u_{\alpha}^{-} = 0 \tag{21}$$

с некоторыми параметрами λ^{++} (выбирая подходящее компенсирующее преобразование параболической группы).

Мы будем ссылаться в дальнейшем на эту фиксированную калибровку как на u^- или "нормальную" форму, поскольку во всех калибровочных теориях, включая гравитационную, существует нормальная калибровка в которой все предпотенциалы зависят только от u^- и не зависят от u^+ гармоник. Нормальная форма значительно упрощает рассуждения и вычисления.

Основная процедура по нахождению такой формы следует из данного выше правила (12). Для бесконечно малых преобразований δM это читается:

$$\delta U = \delta M U + U \Delta P \tag{22}$$

Можно всегда найти такую компенсацию ΔP, такую что $\delta u_{\alpha}^{-} = 0$. Например, для вращений имеем

$$\delta u_{\alpha}^{\pm} = \delta l_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{\pm}. \tag{23}$$

Переходя к u^- форме, запишем

$$(0,\, \delta u_{\alpha}^{+}) = (\delta l_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{-},\, \delta l_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{+}) + (u_{\alpha}^{-} \Delta\rho + \Delta z^{--} u_{\alpha}^{+},\, -\Delta\rho u_{\alpha}^{+}). \tag{24}$$

Тогда, проектируя на гармоники [см. (16)], получаем для параметров параболических преобразований

$$\Delta\rho = -u^{+\gamma} \delta l_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{-}, \qquad \Delta z^{--} = u^{-\gamma} \delta l_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{-}, \tag{25}$$

в то время, как преобразования гармоник приобрели u^- форму

$$\delta u_{\alpha}^{-} = 0, \qquad \delta u_{\alpha}^{+} = (u^{+\gamma} \delta l_{\gamma}^{\beta} u_{\beta}^{+}) u_{\alpha}^{-}. \tag{26}$$

С этими новыми правилами игры *гармоники u^+ и u^- теперь уже не являются комплексно сопряженными.* Тем не менее, может быть определено новое комбинированное сопряжение [10], которое является произведением комплексного сопряжения и антиподального отображения (просто отображение точки на одном конце диаметра в точку на другом конце):

$$\hat{u}_{\alpha}^{\pm} = u^{\pm\alpha}, \quad \hat{u}^{\pm\alpha} = -u_{\alpha}^{\pm}. \tag{27}$$

Действительные свойства обсуждены в терминах по новому определенного сопряжения.

Важное замечание: действительные свойства гармоник сохраняются при действии $SU(2)$ на S^2, но не при действии полной $SL(2, C)$.

Гармоники как квадратные корни кватернионов

Мы упомянули, что гармоники тесно связаны с кватернионами. Фактически, в общей системе координат, кватернионы могут рассматриваться как билинейные комбинации гармоник. Чтобы это увидеть, мы объединяем $U(1)$ заряды в один индекс i:

$$u^{\pm}_{\alpha} = u^{i}_{\alpha}, \qquad i = (+, -). \tag{28}$$

Тогда определяющее ограничение (14) и соотношение полноты (15) приобретают симметричную форму

$$u^{\alpha}_{i} u^{j}_{\alpha} = \delta^{i}_{j}; \qquad u^{\alpha}_{i} u^{i}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{29}$$

Теперь всё двухпараметрическое семейство кватернионных единиц, произвольно ориентированных в трехмерном пространстве, задается посредством

$$e^{\beta}_{a_{\alpha}} = -i u^{i}_{\alpha} \sigma^{j}_{a_i} u^{\beta}_{j}. \tag{30}$$

Это легко проверить с помощью (29). Выше приведенное представление (4) приводит к специальной калибровке

$$u^{i}_{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^{i}_{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Эта гармоническая природа кватернионов объясняет, почему они требуются во всех задачах, где многообразия имеют кватернионные структуры: в $N = 2$ суперсимметричных теориях [10], [20] и в самодуальных теориях [16], [18], [19].

3. Гармоническая кватернионная аналитичность

Начнем наше обсуждение кватернионной аналитичности с напоминания некоторых положений из [16]. Прежде всего, говоря о координате $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ как о кватернионе z, мы имеем в виду $4D$-группу вращений в форме $Spin(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$. Естественно реализовать ее на некоторых из ее факторпространств. Простейшая возможность – выбрать двусферу

$$SU(2)_R/U(1) = \{u^{\pm}_{\alpha}\} \tag{32}$$

Удобно перейти к пространственным координатам

$$x^{\pm\dot{\alpha}} = x^{\alpha\dot{\alpha}} u^{\pm}_{\alpha}, \qquad x^{\alpha\dot{\alpha}} = -x^{+\dot{\alpha}} u^{-\alpha} + x^{-\dot{\alpha}} u^{+\alpha} \tag{33}$$

Как можно видеть, это есть твисторное преобразование Пенроуза, записанное на языке гармонического пространства. Использование x^{+} и x^{-} координат дает возможность ввести новый тип аналитических функций, которые зависят от x^{+} и гармоник, но не зависят от x^{-}. Соответствующие условия Коши-Римана будут в производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x^{-\dot{\alpha}}} f^{A}(x, u) = 0, \tag{34}$$

где A символически отображают индексы спинора и $U(1)$-заряды. Как следствие этого условия мы имеем

$$\Box f^{A} = \frac{\partial}{\partial x^{m}} \times \frac{\partial}{\partial x^{m}} f^{A} = 0 \tag{35}$$

поскольку можно проверить, что $\Box = \frac{\partial}{\partial x^{+\dot{\alpha}}} \times \frac{\partial}{\partial x^{-}_{\dot{\alpha}}}$ есть обычный даламбертиан в четырех измерениях. Таким образом, даламбертиан кватернионной аналитической функции обращается в нуль по совершенно аналогичным причинам, что и в случае обычной комплексной аналитичности.

Очевидно, что свойство аналитичности сохраняется при общих кватернионных аналитических преобразованиях, смешивающих координаты $x^{+\dot\alpha}, u^+_\alpha, u^-_\alpha$:

$$\begin{gathered}\delta x^{+\dot\alpha} = f^{+\dot\alpha}(x^+, u^\pm),\\ \delta u^+_\alpha = w^{++}(x^+, u^\pm)u^-_\alpha\\ \delta u^-_\alpha = 0\end{gathered} \tag{36}$$

с произвольными кватернионными аналитическими функциями $x^{+\dot\alpha}$ и w^{++} как параметрами. Записав эти преобразования, мы эффективным образом принялм во внимание, что гармоники определены по модулю преобразований (20). Заметим также, что не было сделано никаких предположений относительно формы преобразований координат $x^{-\dot\alpha}$,

$$\delta x^{-\dot\alpha} = \phi^{-\dot\alpha}(x^+, x^-, u^\pm), \tag{37}$$

где локальные параметры ϕ являются неаналитическими и могут зависеть от x^- любым образом. Чтобы быть более конкретными, приведем несколько примеров.

1. Группа Пуанкаре (левые и правые вращения, δl^α_β и $\delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta}$ соответственно, $\delta l^\beta_\beta = \delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta} = 0$ и трансляции $\delta b^{\alpha\dot\alpha}$) представляется посредством аналитических кватернионных преобразований:

$$\begin{gathered}\delta x^{+\dot\alpha} = -\delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta} x^{+\dot\beta} + \delta b^{\alpha\dot\alpha}u^+_\alpha, \quad \delta u^\pm_\alpha = +\delta l^\beta_\alpha u^\pm_\beta,\\ (\delta x^{\alpha\dot\alpha} = -\delta l^\alpha_\beta x^{\beta\dot\alpha} - \delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta} x^{\alpha\dot\beta} + \delta b^{\alpha\dot\alpha}, \quad \delta x^{-\dot\alpha} = -\delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta} x^{-\dot\beta} + \delta b^{\alpha\dot\alpha}u^-_\alpha).\end{gathered}$$

Заметим, что повороты гармоник могут также быть представлены как в (23).

2. То же самое для дилатаций (растяжений)

$$\delta x^{+\dot\alpha} = \delta d x^{+\dot\alpha}, \quad \delta u^\pm_\alpha = 0$$

и $\delta x^{\alpha\dot\alpha} = \delta d x^{\alpha\dot\alpha}$, $\delta x^{-\dot\alpha} = \delta d x^{-\dot\alpha}$. [Нужно помнить, что гармоники определены по модулю преобразований (20).] Выше приведенные преобразования исчерпывают все кватернионные аналитические преобразования, которые являются линейными по $x^{+\dot\alpha}$ и не ведут к явному возникновению гармоник в $\delta x^{\alpha\dot\alpha}$.

3. Аффинные преобразования

$$\delta x^{\alpha\dot\alpha} = a^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} x^{\beta\dot\beta}, \quad a^{\alpha\dot\alpha}_{\alpha\dot\beta} = a^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\alpha} = 0$$

определенно являются неаналитическими при любом выборе репараметризации гармоник. Например, если $\delta u^\pm_\alpha = 0$, то

$$\delta x^{+\dot\alpha} = u^+_\alpha a^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta}(u^{+\beta}x^{-\dot\beta} - u^{-\beta}x^{+\dot\beta})$$

содержит как $x^{+\dot\alpha}$, так и $x^{-\dot\alpha}$.

4. Переходя к преобразованиям, билинейным в $x^{+\dot\alpha}$, обнаруживаем прежде всего, что *конформные бусты принадлежат к кватернионным аналитическим преобразованиям.* С очевидностью, конформные бусты равны

$$\delta x^{\alpha\dot\alpha} = x^{\alpha\dot\beta}\delta k_{\dot\beta\beta} x^{\beta\dot\alpha} \tag{38}$$

($\delta k_{\dot\beta\beta}$ – параметры), так что

$$\delta x^{+\dot\alpha} = -x^{+\dot\beta}\delta k_{\dot\beta\beta} u^{-\beta} x^{+\dot\alpha}, \tag{39}$$

$$\delta u^+_\alpha = -x^{+\dot\beta}\delta k_{\dot\beta\beta}u^{+\beta}u^-_\alpha, \quad \delta u^-_\alpha = 0, \tag{40}$$
$$(\delta x^{-\dot\alpha} = -x^{+\dot\beta}\delta k_{\dot\beta\beta}u^{-\beta}x^{-\dot\alpha}).$$

Параметр конформного буста имеет размерность обратной длины. Таким образом, конформные преобразования гармоник содержат пространственные координаты x линейно. Стоит подчеркнуть еще раз, что становится возможным избежать появления $x^{-\dot\alpha}$ (неаналитичности) в преобразованиях u^-_α гармоник только потому, что любое преобразование u^- может быть скомпенсировано подходящим преобразованием параболической группы (переходя к нормальной форме).

Заметим, что при комбинированном сопряжении (27)

$$\hat{x}^{+\dot\alpha} = -x^+_{\dot\alpha} \tag{41}$$

и это совместимо с *действительными* преобразованиями Пуанкаре и конформными преобразованиями.

Заметим также, что действительные свойства выше приведенных основных преобразований (36) должны точно так же согласоваться с комбинированным сопряжением (27), (41).

Ограничимся этими примерами.

Замечательно, что *только этот тип аналитичности присущ* важным теориям, обсуждаемым в следующем разделе.

4. Самодуальные калибровочные теории в четырех измерениях

Чтобы вскрыть природу кватернионной аналитичности теорий, названных в заголовке раздела, следует здесь вспомнить процедуру Уорда [12], [11] применяемую для самодуальных калибровочных уравнений в R^4. Использование языка гармонического пространства [16], [18], [19] делает ситуацию полностью понятной, показывая прозрачное соответствие между кватернионной аналитической (в смысле предыдущего раздела) дважды $U(1)$-заряженной функцией $V^{++}(x^+, u)$ и решениями самодуальных уравнений. Заметим, что рассмотрение самодуальной теории Эйнштейна проходит сходным путем.

Коммутатор ковариантных производных $D_{\alpha\dot\alpha} = \partial_{\alpha\dot\alpha} + iA(x)_{\alpha\dot\alpha}$ (связность A принимает значения в алгебре Ли калибровочной группы для теории Янга-Миллса и в касательной группе Лоренца для эйнштейновской теории),

$$[D_{\alpha\dot\alpha},\, D_{\beta\dot\beta}] = \epsilon_{\alpha\beta}F_{\dot\alpha\dot\beta}(x) + \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}F_{\alpha\beta}(x), \tag{42}$$

определяет напряженность поля Янга-Миллса $F_{\alpha\beta}, F_{\dot\alpha\dot\beta}$. В спинорном формализме, самодуальное уравнение есть просто $F_{\dot\alpha\dot\beta}(x) = 0$. Приняв во внимание определение (42), становится очевидным, что это уравнение *эквивалентно*

$$[D_{\alpha\dot\alpha},\, D_{\beta\dot\beta}] = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}F_{\alpha\beta}(x). \tag{43}$$

Имея в своем распоряжении гармоники, мы можем развязать это уравнение следующим образом. Умножая уравнение (43) на $u^{+\dot\alpha}u^{+\dot\beta}$, и определяя

$$D^+_\alpha = u^{+\dot\alpha}D_{\alpha\dot\alpha} \tag{44}$$

получаем

$$[D^+_\alpha, D^+_\beta] = 0. \tag{45}$$

Более удобно заменить (44) на эквивалентное (приняв во внимание $U(1)$ сохранение заряда) коммутационное соотношение (18)

$$[D^{++}, D^{+}_{\alpha}] = 0. \tag{46}$$

Пара уравнений (45) и (46) эквивалентна условию самодуальности (43). Однако эта пара значительно проще. Первое из них устанавливает, что ковариантные производные D^+ коммутируют. Поэтому его решение есть "чистая калибровка",

$$D^{+}_{\alpha} = h\partial^{+}_{\alpha}h^{-1} = \partial^{+}_{\alpha} + h(\partial^{+}_{\alpha}h^{-1}), \tag{47}$$

где производная ∂^{+}_{α} не содержит никакой связности, и "мост" $h = h(x, u)$ принимает значения в калибровочной группе. Выбирая координаты (33) имеем

$$D^{+}_{\alpha} = u^{+\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{-\alpha}}. \tag{48}$$

В калибровке, в которой D^{+}_{α} становится короткой, гармоническая производная D^{++} становится длинной (потому что мост h в основном зависит от гармоник):

$$D^{++} \to D^{++} = h^{-1}D^{++}h = D^{++} + h^{-1}(D^{++}h) = D^{++} + iV^{++}, \tag{49}$$

приобретая гармоническую связность, которая глобально определена на S^2 (действительно в значениях калибровочной алгебры)

$$V^{++} = -ih^{-1}(D^{++}h). \tag{50}$$

Теперь второе уравнение этой пары становится *условием Коши-Римана для гармонической аналитичности*

$$\frac{\partial}{\partial x^{-\alpha}}V^{++} = 0, \tag{51}$$

утверждая, что в самодуальном случае гармоническая связность аналитична, то есть она не зависит от $x^{-\alpha}$, $V^{++} = V^{++}(x^{+\alpha}, u^{\pm})$. Обратно, если V^{++} аналитична, она кодирует решение самодуальных уравнений.

Более того, можно избавиться от положительно заряженных гармоник u^+, поскольку калибровочные потенциалы V^{++} определены только с точностью до калибровочных преобразований

$$V^{++}(x^+, u) = (D^{++} + iV^{++}(x^+, u))\lambda(x^+, u).$$

Существует нормальная калибровка [16], в которой V^{++} содержит в своем гармоническом разложении только отрицательно заряженные гармоники u^-:

$$V^{++} = V^{++}(x^+, u^-).$$

Поэтому аналитический V^{++} кодирует решение самодуального уравнения. Это есть прозрачное проявление "твисторного соответствия". Однако, мы больше знакомы с обычным пространством R^4, чем с гармоническим. Чтобы перейти к первому, нужно определить мост h из уравнения (50) для данной аналитики V^{++}, и затем заменить мост h на выражение обычной векторной связности $A_a(x) = -ih\frac{\partial}{\partial x^a}h^{-1}$. Важно, что (50) имеет решение для почти любых V^{++} [18].

Таким образом, не существует проблем в решении самодуальных уравнений в гармоническом пространстве. Инстантоны и монополи являются специальными решениями самодуального уравнения, имеющего конечное действие и конечную энергию соответственно. Они полностью описаны на языке гармонического пространства, включая ADHM конструкцию [18, 19].

Конечно, любое изменение гармонической аналитической связности

$$V'(x^+, u) = V^{++}(x^+, u) + g^{++}(x^+, u) \tag{52}$$

имеет своим результатом переход от одного решения самодуального уравнения к другому. Таким образом, наиболее общее преобразование Бэклунда кодируется снова с помощью дважды $U(1)$ заряженного аналитического объекта $g^{++}(x^+, u)$. Важный геометрический класс этих преобразований состоит из общих аналитических диффеоморфизмов (29) сопровождаемых преобразованием "подобия", определенного посредством общего аналитического веса $c(x^+, u)$, который принимает значение в калибровочной алгебре,

$$V'(x^{+'}, u') = e^{c(x^+,u)} V^{++}(x^+, u) e^{-c(x^+,u)}. \tag{53}$$

Этот класс включает очень многие преобразования Бэклунда. Говоря о диффеоморфизмах, мы можем ограничиться теми из них, которые реализуются в нормальной форме.

Таким образом, кватернионная аналитичность гармонического типа свойственна самодуальным $4D$ калибровочным теориям. Конечно, они также конформно инвариантны. Однако, теперь конформные преобразования образуют конечномерную подгруппу $Spin(5,1)$ аналитических преобразований, как раз тех, которые даны в (39), (40). Следовательно, эти теории могут естественно рассматриваться как $4D$-расширение $2D$-конформных теорий поля как в их конформном, так в и аналитическом аспектах.

5. Примеры других кватернионных аналитичностей

Только одно факторпространство было рассмотрено выше, это просто двусфера S^2. Однако, существуют и другие возможности, часть которых мы здесь кратко обсудим.

Произведение двух S^2

Первый пример будет

$$\frac{SU(2)_L}{U(1)_L} \times \frac{SU(2)_R}{U(1)_R} \tag{54}$$

с гармонизацией как левой, так и правой $SU(2)$ групп и с двумя различными $U(1)$ зарядами. В этом случае существуют как левая ($v_{\alpha^{\oplus,\ominus}}$), так и правая ($u^{+,-}_{\dot\alpha}$) гармоники имеющие левый ($\oplus, \ominus$) или правый $(+,-)U(1)$ заряды соответственно. Определение соответствующей кватернионной аналитичности достаточно очевидно. Нужно разбить $x^{\alpha\dot\alpha}$ на четыре части

$$x^{+\oplus} = x^{\alpha\dot\alpha} v^{\oplus}_{\alpha} u^{+}_{\dot\alpha}, \quad x^{+\ominus} = x^{\alpha\dot\alpha} v^{\ominus}_{\alpha} u^{+}_{\dot\alpha}, \quad x^{-\oplus} = x^{\alpha\dot\alpha} v^{\oplus}_{\alpha} u^{-}_{\dot\alpha}, \quad x^{-\ominus} = x^{\alpha\dot\alpha} v^{\ominus}_{\alpha} u^{-}_{\dot\alpha}. \tag{55}$$

Легко организовать кватернионные сопряжения, которые преобразуют эти переменные между собой. Объединить их в обычные 4-координаты также просто:

$$x^{\alpha\dot\alpha} = v^{\oplus\alpha} u^{+\dot\alpha} x^{-\ominus} - v^{\oplus\alpha} u^{-\dot\alpha} x^{+\ominus} - v^{\ominus\alpha} u^{+\dot\alpha} x^{-\oplus} + v^{\ominus\alpha} u^{-\dot\alpha} x^{+\oplus}. \tag{56}$$

Можно определить аналитические функции, зависящие только от одной из четырех координат (55), скажем от $x^{-\oplus}$ (и некоторым образом от гармоник). Тогда будет три условия Коши-Римана в производных первого порядка:

$$\partial^{+\oplus} f = \partial^{-\ominus} f = \partial^{-\oplus} f = 0. \tag{57}$$

Снова следствием будет, что даламбертиан аналитической функции обращается в нуль: $\Box f \equiv \partial x^{+\oplus}\partial^{-\ominus} f - \partial^{-\oplus}\partial^{+\ominus} f = 0$. В настоящее время мы не знаем теоретико-полевой модели, связанной с такой кватернионной аналитичностью.

Диагональный $U(1)$ случай

Далее, можно *отождествить* две $U(1)$ группы и рассмотреть факторпространство

$$\frac{SU(2)\times SU(2)}{U(1)}, \tag{58}$$

которое связано с теми же самыми гармониками $v^{\pm}_{\alpha}$ и $u^{\pm}_{\dot\alpha}$ как в выше приведенном примере, обе из которых обладают, тем не менее, зарядами одной и той же диагональной $U(1)$ подгруппы. Это обстоятельство, как мы далее увидим, будет улучшающим. Как в предыдущем случае, четыре-координата разбивается на четыре раздельные переменные,

$$x^{++} = x^{\alpha\dot\alpha}v^{+}_{\alpha}u^{+}_{\dot\alpha}, \quad x^{1} = x^{\alpha\dot\alpha}v^{-}_{\alpha}u^{+}_{\dot\alpha}, \quad x^{2} = x^{\alpha\dot\alpha}v^{+}_{\alpha}u^{-}_{\dot\alpha}, \quad x^{--} = x^{\alpha\dot\alpha}v^{-}_{\alpha}u^{-}_{\dot\alpha}. \tag{59}$$

в то время как

$$x^{\alpha\dot\alpha} = v^{+\alpha}u^{+\dot\alpha}x^{--} - v^{+\alpha}u^{-\dot\alpha}x^{1} - v^{-\alpha}u^{+\dot\alpha}x^{2} + v^{-\alpha}u^{-\dot\alpha}x^{++}. \tag{60}$$

Условия Коши-Римана снова в производных первого порядка; для функции которая зависит только от, скажем, x^1 они есть

$$\partial^{++} f = \partial^{2} f = \partial^{--} f = 0. \tag{61}$$

и любая аналитическая функция, удовлетворяющая (61) будет подчиняться условию

$$\Box f \equiv \partial^{++}\partial^{--} f - \partial^{1}\partial^{2} f = 0, \tag{62}$$

где ∂^1 и ∂^2 дифференцируют по x^1 и x^2 соответственно.

Возврат к кватернионной аналитичности Фютера

Как утверждалось во введении, Фютеровская аналитическая функция не удовлетворяет условию Коши-Римана или уравнению $\Box f = 0$. Вместо условия типа Коши-Римана для $\Box f$, получается уравнение четвертого порядка $\Box^2 f = 0$. Чтобы продемонстрировать эти утверждения, следует подчеркнуть, что *Фютеровская аналитичность связана только с гармоническим приближением из раздела 5.2.* В самом деле, в [6] было показано: чтобы сделать Фютеровское разложение (7) формально ковариантным, нужно ввести другой кватернион p^{-1}, с трансформационными свойствами, обратными к свойствам z:

$$z' = mz\bar{n}, \quad p^{-1'} = np^{-1}\bar{m}, \quad m\bar{m} = n\bar{n} = 1, \tag{63}$$

где $m \in SU(2)_L$ и $n \in SU(2)_R$ есть единичные кватернионы, представляющие эти группы соответственно (ссылка 5).

Теперь новая переменная, обозначаюшая левый кватор в [6], [5]

$$y = zp^{-1}, \tag{64}$$

будет иметь "более подходящий" чисто левоый закон преобразования

$$y' = my\bar{m}. \tag{65}$$

Соответственно, модифицированное определение Фютера [5]

$$f(y) = \sum a_n y^n \tag{66}$$

будет совместимо с четырехмерными вращениями, с y принадлежащим к $(1,0)\oplus(0,0)$ представлению $SO(4)$. Легко увидеть, что этот ново введенный вспомогательный кватернион p может быть выбран в виде векторной гармоники, составленной из спинорных гармоник, введенных в разделе 5.2 согласно

$$p^{-1}_{\alpha\dot{\alpha}} = (v^+_\alpha u^-_{\dot{\alpha}} + v^-_\alpha u^+_{\dot{\alpha}}). \tag{67}$$

[Существует некоторая свобода в определении коэффициентов в правой части (67)]. Заметим, что p^{-1} становится единичной матрицей в специальной системе координат для обоих типов гармоник. Тогда Фютеровская аналитическая функция является степенными рядами левого кватора (в терминологии [5])

$$y^\alpha_\beta = x^{\alpha\dot{\alpha}}(v^+_\beta u^-_{\dot{\alpha}} + v^-_\beta u^+_{\dot{\alpha}}) = x^{--}(L^{++})^\alpha_\beta + x^1(P^1)^\alpha_\beta + x^2(P^2)^\alpha_\beta, \tag{68}$$

где были использованы определения (59) и мы ввели операторы

$$\begin{gathered}(L^{++})^\alpha_\beta = v^{+\alpha}v^+_\beta, \qquad (L^{--})^\alpha_\beta = -v^{-\alpha}v^-_\beta, \\ (P^1)^\alpha_\beta = v^{+\alpha}v^-_\beta, \qquad (P^2)^\alpha_\beta = v^{+\alpha}v^+_\beta.\end{gathered} \tag{69}$$

Они удовлетворяют следующей алгебре (индексы опущены для краткости): операторы P являются проекторами

$$P^1P^1 = P^1, \quad P^2P^2 = P^2, \quad P^1 + P^1 = 1, \quad P^1P^2 = P^2P^1 = 0, \tag{70}$$

в то время как для операторов L мы имеем

$$L^{--}L^{++} = P^1, \quad L^{++}L^{--} = P^2, \quad L^{--}L^{--} = L^{++}L^{++} = 0 \tag{71}$$

и остальные произведения есть

$$\begin{gathered}L^{++}P^1 = P^2L^{++} = L^{++}, \quad L^{--}P^2 = P^1L^{--} = L^{--}, \\ L^{++}P^2 = P^1L^{++} = L^{--}P^1 = P^2L^{--} = 0.\end{gathered} \tag{72}$$

Теперь мы хотим показать, что общая аналитическая по Фютеру функция из уравнения (66) является бигармоникой и удовлетворяет некоторому уравнению в производных третьего порядка. С этой целью рассмотрим интегральное представление для f,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\oint dz \frac{f(z)}{z-y} \tag{73}$$

которое следует из факта, что она имеет разложение типа Вейерштрасса (66). Тогда мы можем сосредоточить внимание на функции $(z-y)^{-1}$, или еще проще, y^{-1}. Используя выше приведенную алгебру, имеем

$$y^{-1} = (x^{++}x^{--} - x^1x^2)^{-1}z \tag{74}$$

где

$$z = x^{++}(L^{--}) + x^{--}(L^{++}) - x^1(P^2) - x^2(P^1) \tag{75}$$

Теперь удобно рассмотреть дифференциальные операторы,

$$V = L^{--}\partial^{++} + L^{++}\partial^{--} - P^1\partial^1 - P^2\partial^2, T = L^{--}\partial^{++} + L^{++}\partial^{--} + P^1\partial^2 + P^2\partial^1,$$

которые удовлетворяют

$$VT = TV = \partial^{++}\partial^{--} - \partial^1\partial^2 = \Box, \tag{76}$$

$$Tz = 0. \tag{77}$$

Приняв во внимание факт, что

$$\Box(x^{++}x^{--} - x^1x^2)^{-1} = \Box(1/x^2) = 0 \tag{78}$$

видим из (77)–(79), что

$$V^2Ty^{-1} = 0. \tag{79}$$

Таким образом, мы можем доказать что любая аналитическая по Фютеру функция $f(y)$ удовлетворяет условиям "Коши-Римана" третьего порядка

$$(L^{--}\partial^{++} + L^{++}\partial^{--} + P^1\partial^1 + P^2\partial^2)\Box f = 0 \tag{80}$$

и следовательно бигармоническому уравнению

$$\Box^2 f = 0. \tag{81}$$

Стоит повторить, что конформная группа евклидового 4-мерного пространства может быть представлена с помощью преобразований Фютеровского типа [6]. Они реализованы на z нелинейно, как кватернионные преобразования Мёбиуса [1], построенные обычным путем из кватернионных элементов матрицы два на два, принадлежащей $SL(2, H)$.

$$z' = (az + b)(cz + d)^{-1}, \tag{82}$$

где a, b, c и d – постоянные кватернионы, удовлетворяющие

$$\det(a - bd^{-1}c) \times \det d = |ad - bd^{-1}cd|^2 = 1 \tag{83}$$

(условие унимодулярности для 2×2 матрицы с кватернионными составляющими)[7] В самом деле, если $c \neq 0$, $d \neq 0$, то z' может быть записано как

$$z' = ac^{-1} + (bd^{-1} - ac^{-1})(1 + czd^{-1})^{-1} \tag{85}$$

что является суммой постоянного кватерниона и Фютеровской аналитической функции составного аргумента (включающего преобразование параметров, кроме самой координаты) $y = czd^{-1}$ умноженного слева на другой постоянный кватернион. Если $c = 0$, то $d \neq 0$ и z' есть линейная функция $y = azd^{-1}$. Окончательно, для

[7] 2×2 матрицы с кватернионными (или опять 2×2 матрицами) элементами может быть разложена на произведение матриц, имеющих очевидные детерминанты [6]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & bd^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - bd^{-1}c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ d^{-1}c & I \end{pmatrix}. \tag{84}$$

$d = 0$, $c \neq 0$, z' – линейная функция $t = bz^{-1}c^{-1}$. Четырехмерные вращения соответствуют (83) с $b = c = 0$, $a = m$ и $d = n$, $m\bar{m} = n\bar{n} = 1$, см. (8); дилатация (растяжение) происходит, когда a является действительным параметром, $d = 1$, $b = c = 0$; трансляции имеют параметр b, тогда как $a = d = 1$, $c = 0$; для конформных бустов c есть параметр и $a = d = 1$, $b = 0$.

В [6] были рассмотрены бесконечномерные квазиконформные группы, которые обобщают (83), будучи подгруппами четырехмерной группы диффеоморфизмов.

6. Объединенное пространство и двусфера. Комплексификация конформной группы

Выше мы гармонизировали группу вращения $SO(4)$, и гармоники появились без видимой связи с пространственными координатами x^m, которые являются координатами смежного класса группы Пуанкаре по модулю ее подгруппы вращений $SO(4)$. Было бы желательно иметь пространственные и гармонические (твисторные) координаты, трактуемые на одной основе. Конформная симметрия помогает нам достичь этой цели.

Конформная группа для евклидового 4-мерного пространства, как хорошо известно, есть $SO(5,1)$, однако, так как мы имеем дело с гармониками спинорных представлений группы Лоренца, мы реально имеем дело с ее универсальной накрывающей, $Spin(5,1)$. Можно было бы начать с рассмотрения ее классов смежности, выяснить, существуют ли подходящие 6-мерные классы. В предыдущем разделе была упомянута кватернионная форма Мёбиуса $SO(5,1)$. В спинорной форме она представляется как матрица

$$M = \begin{pmatrix} l_\beta^\alpha & b_\alpha^{\dot\beta} \\ c_{\dot\alpha}^\beta & r_{\dot\alpha}^{\dot\beta} \end{pmatrix} \tag{86}$$

с единичным детерминантом

$$\det(l_\alpha^\beta - b_\alpha^{\dot\alpha}(r^{-1})_{\dot\alpha}^{\dot\beta} c_{\dot\beta}^\alpha) \times \det r_{\dot\alpha}^{\dot\beta} = 1 \tag{87}$$

(см. сноску 7). Элементы матрицы те же, что и в разделе 5: l_β^α и $r_{\dot\beta}^{\dot\alpha}$ представляют левое и правое вращения соответственно и растяжения, тогда как $b_\alpha^{\dot\beta}$ и $c_{\dot\alpha}^\beta$ – трансляции и конформные бусты соответственно. Теперь, используя разложение Ивасавы,

$$Spin(5,1) = Spin(5) \times AN \tag{88}$$

(см. Приложение B) мы действительно можем получить шестимерный класс смежности. С этой целью можно выбрать $Spin(3) \times SO(2) \times AN$ как параболическую подгруппу P (те же A, N, что в (87)). Тогда грассманиан

$$\frac{Spin(5,1)}{P} = \frac{SO(5)}{SO(3) \times SO(2)} \tag{89}$$

будет единственным 6-мерным классом смежности. Однако, группа левых вращений $SU(2)_L$ проявляется в исходной *не комплексифицированной форме.* Согласно такому же рассуждению, как в разделе 2, это приведет к неаналитическим конформным преобразованиям.

Это снова наводит на мысль о *комплексификации*, теперь уже *конформной группы.* Мы, следовательно, пришли к рассмотрению действия $Spin(5,1)$ на классе смежности группы $Spin(6,C) \sim SL(4,C)$. И в самом деле, это работает. Начав с разложения Ивасавы (смотри Приложение B) последней,

$$SL(4,C) = SU(4) \times AN, \tag{90}$$

и выбрав параболическую подгруппу равной

$$P = SU(3) \times U(1) \times AN \tag{91}$$

(с теми же AN, как в (89)) мы приходим к классу смежности

$$\frac{SL(4,C)}{P} = \frac{SU(4)}{SU(3) \times U(1)} = CP^3 \tag{92}$$

AN в числителе и в знаменателе были "сокращены". Заметим, что появление 3-мерного комплексного проективного многообразия согласуется с литературой по твисторам [11], [14], [12], и т. д. Координаты этого многообразия – это две пространственные координаты $x^{+\dot{\alpha}}$ и гармоники, которые могут быть представлены одной комплексной координатой, как мы теперь увидим.

Читатель может обратиться к Приложению B по поводу некоторых определений и техники. Используя их, мы кратко дадим здесь прямое взятие производной от формы $Spin(5,1)$ преобразований, реализованных на этом CP^3 классе смежности. Мы будем действовать тем же способом, как мы это делали в разделе 2, где мы имели дело с соответствующим классом смежности комплексифицированной группы $SU(2)_L$.

Вообще говоря, лучше работать с полным множеством гармоник, образующих $Spin(5,1)$ матрицу

$$U = \begin{pmatrix} u^s_\alpha & u^{\dot{s}}_\alpha \\ u^s_{\dot{\alpha}} & u^{\dot{s}}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

и идентифицировать их по действию на подгруппу P. Это было бы *глобальным* определением G/P и в рамках этого подхода можно было бы полностью избежать проблемы Римана-Гильберта, и т. д.

Однако, чтобы показать как работать просто с 6 обычными координатами 6-мерного многообразия, мы будем использовать здесь подгруппу P для локального исключения избыточных степеней свободы в U. Эти локальные координаты нашего класса смежности могут быть записаны как элементы треугольной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} u^s_\alpha & -u^-_\alpha x^{+\dot{s}} \\ 0 & \delta^{\dot{s}}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}; \tag{93}$$

Конформная группа действует на U посредством умножения слева на матрицу $M \in Spin(5,1)$, уравнение (85). Для сохранения формы (92) фиксируем калибровку с помощью использования подходящих компенсационных параболических групповых преобразований P [см. (11) и (22)]. Для бесконечно малых преобразований мы имеем

$$\delta U = M \times U \times P - U \approx \delta M \times U + U \times \triangle P \tag{94}$$

Как в разделе 2, гармоники определены только с точностью до преобразований (20), принадлежащих к параболической группе. Поэтому мы можем взять в качестве отправного пункта, что калибровка (21) фиксирована, т. е. мы будем работать с преобразованиями в нормальной форме,

$$\delta u^-_\alpha = 0, \quad \delta u^+_\alpha = \lambda^{++} u^-_\alpha.$$

Теперь вычислим явно преобразования $x^{+\dot{\alpha}}$ и u^+_α, так же, как компенсационные преобразования, принадлежащие к параболической группе, используя уравнение (93) вместе с условием (21). Ингредиенты есть

$$A. \quad \delta U = \begin{pmatrix} (0, \lambda^{++} u_\alpha^-) & -u_\alpha^- \delta x^{+\dot{p}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{95}$$

$$B. \quad \delta M \times U = \begin{pmatrix} \delta \tilde{l}_\alpha^\beta u_\beta^s + \delta d \delta_\alpha^s & -\delta \tilde{l}_\alpha^\beta u_\beta^- \delta x^{+\dot{s}} - \delta d u_\alpha^- x^{+\dot{s}} + \delta b_\alpha^{\dot{s}} \\ \delta c_{\dot{\alpha}}^\beta u_\beta^s & -\delta c_{\dot{\alpha}}^\beta u_\beta^- x^{+\dot{s}} + \delta \tilde{r}_{\dot{\alpha}}^{\dot{s}} - \delta d \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{s}} \end{pmatrix}, \tag{96}$$

где мы выделим дилатации δd: теперь $\delta \tilde{l}_s^s = \delta \tilde{r}_{\dot{s}}^{\dot{s}} = 0$.

Индуцированные преобразования параболической группы образуют матрицу

$$\triangle P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle a + \triangle d & 0 \\ \triangle z^{--} & -\triangle a + \triangle d \end{pmatrix}_p^s & \begin{pmatrix} 0 \\ \triangle a^{-\dot{s}} \end{pmatrix} \\ \triangle c_{\dot{p}}^s & -\triangle d \delta_{\dot{p}}^{\dot{s}} + \triangle \tilde{r}_{\dot{p}}^{\dot{s}} \end{pmatrix} \tag{97}$$

Для последнего ингредиента, матрицы $U \times \triangle P$, запишем ее элементы отдельно. Верхний левый угол:

$$(u_\alpha^- (\triangle a + \triangle d - x^{+\dot{p}} \triangle c_{\dot{p}}^-) + u_\alpha^+ \triangle z^{--}, \quad u_\alpha^+ (-\triangle a + \triangle d) - u_\alpha^- x^{+\dot{p}} \triangle c_{\dot{p}}^+. \tag{98}$$

Нижний левый угол:

$$\triangle c_{\dot{\alpha}}^s \tag{99}$$

Верхний правый угол:

$$u_\alpha^+ \triangle a^{-\dot{s}} + u_\alpha^- \triangle d x^{+\dot{s}} - u_\alpha^- x^{+\dot{p}} \triangle \tilde{r}_{\dot{p}}^{\dot{s}}. \tag{100}$$

Нижний правый угол:

$$-\triangle d \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{s}} + \triangle \tilde{r}_{\dot{\alpha}}^{\dot{s}}. \tag{101}$$

Теперь мы можем подставить компоненты (92), (95), (97), (98), (99) и (100) в уравнение (93). Затем, проецируя все элементы на $u_\alpha^\pm$, получим из результирующих уравнений явные выражения для бесконечно малых преобразований координат класса смежности:

$$\delta x^{+\dot{\alpha}} = (2\delta d + u^{+\gamma} \delta \tilde{l}_\gamma^\beta u_\beta^- + x^{+\dot{p}} \delta c_{\dot{p}}^\beta u_\beta^-) x^{+\dot{\alpha}} - u^{+\gamma} \delta b_\gamma^{\dot{\alpha}} - x^{+\dot{s}} \delta \tilde{r}_{\dot{s}}^{\dot{\alpha}}$$

$$\delta u_\alpha^+ = (u^{+\gamma} \delta \tilde{l}_\gamma^\beta u_\beta^+ + x^{+\dot{p}} \delta c_{\dot{p}}^\beta u_\beta^+) u_\alpha^-, \tag{102}$$

и в самом деле

$$\delta u_\alpha^- = 0. \tag{103}$$

В (101), (102) узнаются преобразования координат и гармоник, полученных уже в разделе 2.2. Для сопровождающих компенсирующих преобразований из параболической группы имеем:

$$\triangle z^{--} = u^{-\gamma} \delta \tilde{l}_\gamma^\beta u_\beta^- \quad \triangle a = -\frac{1}{2} x^{+\dot{s}} \delta c_{\dot{s}}^\beta u_\beta^- - u^{+\gamma} \delta \tilde{l}_\gamma^\beta u_\beta^-, \tag{104}$$

$$\triangle \tilde{r}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = -\delta \tilde{r}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} + \delta c_{\dot{\alpha}}^\beta u_\beta^- x^{+\dot{\beta}} - \frac{1}{2} x^{+\dot{s}} \delta c_{\dot{s}}^\beta u_\beta^- \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \tag{105}$$

$$\triangle d = -\delta d - \frac{1}{2} x^{+\dot{s}} \delta c_{\dot{s}}^\beta u_\beta^-, \tag{106}$$

$$\triangle c^{s}_{\dot\alpha} = -\delta c^{s}_{\dot\alpha}, \tag{107}$$

и окончательно

$$\triangle a^{-\dot s} = -\delta b^{\beta\dot s} u^{-}_{\beta} + u^{-\gamma}\delta\tilde l^{\beta}_{\gamma} u^{-}_{\beta} x^{+\dot s} \tag{108}$$

Очень важно, что все эти преобразования и манипуляции совместимы с комбинированным сопряжением, обсуждавшимся в разделе 2.2, которое реализуется на гармониках и координатах посредством (27) и (41).

В этой форме можем легко распознать три комплексные координаты для нашего класса смежности. Первые две есть $x^{+\dot\alpha}$ и третья, z, может быть получена, полагая что

$$u^{-}_{\alpha} = (1,0), \quad u^{+}_{\alpha} = (z,1) \tag{109}$$

Закон преобразования для z следует из уравнения (101).

Важным уроком является то, что *комплексное* (в обычном смысле) многообразие является *действительным* по отношению к комбинированному сопряжению. Все преобразования должны согласовываться с этим фактом. В частности, это условие совместимости выделяет подгруппу $Spin(5,1)$ из $Spin(6,C)$.

Замечание. Достаточно легко найти конечные преобразования в нормальной форме. Например, конформные преобразования записываются как

$$\tilde x^{+\dot\alpha} = \frac{x^{+\dot\alpha}}{1 - x^{+\dot\beta}c^{\sigma}_{\dot\beta}u^{-}_{\sigma}}, \quad \tilde u^{+}_{\alpha} = u^{+}_{\alpha} + \frac{x^{+\dot\beta}c^{\sigma}_{\dot\beta}u^{+}_{\sigma}}{1 - x^{+\dot\beta}c^{\sigma}_{\dot\beta}u^{-}_{\sigma}} u^{-}_{\alpha} \quad \tilde u^{-}_{\alpha} = u^{-}_{\alpha}. \tag{110}$$

Они сингулярны при некотором конечном значении конформного параметра, поскольку калибровка фиксирована только для одного множества координат (то есть одной карты) из целого многообразия[8]. Как было замечено выше, глобальное описание этого смежного класса может быть достигнуто при использовании 32 гармоник (вместо этих 6-ти координат), определенных по модулю параболической группы преобразований и удовлетворяющих ограничению унимодулярности.

Выводы

Расширение пространственных переменных посредством добавления некоторых гармонических (или твисторных) переменных, как известно, допускает новый вид аналитичности, гармоническую (или твисторную) аналитичность. Мы наблюдали в этой работе, что это есть аспект кватернионной аналитичности и что существует несколько путей ее определения. В $4D$ самодуальных теориях Янга-Миллса и Эйнштейна аналитичность этого типа замещает стандартную комплексную аналитичность $2D$ конформных теорий.

Самодуальные уравнения являются конформно инвариантными. Замечательным следствием гармонической аналитичности является, что $4D$ конформная группа должна быть реализована на смежном классе CP^3 *комплексификации*, $SL(4,C)$. Эти рассуждения являются достаточно общими: в любом смежном классе действительной группы невозможно иметь x-зависимые преобразования u^- и u^+ одновременно аналитичными. Нужно подчеркнуть, однако, что мы имеем дело только с "евклидовой" конформной группой $Spin(5,1)$. Как следствие, может быть определено комбинированное сопряжение (вместо комплексного), в рамках которого CP^3 является действительным многообразием. Стоит упомянуть, что такой же феномен комплексификации возникает также в $N=2$ и $N=3$ суперсимметричных теориях.

[8] Авторы признательны А. Гальперину за это замечание

Эти темы будут обсуждаться где-нибудь еще, так же, как более полный анализ и классификация "аналитических" симметрий самодуальных уравнений. Это наиболее эффективно выполнимо в нормальной калибровке, выбирающей преобразования в нормальной форме. Параллельное рассмотрение симметрий самодуальных уравнений и их малоразмерных интегрируемых систем представляется привлекательным и может пролить свет на многие тонкости. Мы откладываем на будущие публикации также исследование гармонических аналитических свойств самодуальных калибровочных теорий в сигнатуре (2,2) которые, как ожидается, имеют интригующие особенности (peculiarities) из-за различных "некомпактностей" соответствующих групп вращения и конформных групп.

В заключении отметим, что $\frac{SU(2)\times SU(2)}{U(1)}$ гармоники лежат в основе Фютеровской аналитичности.

Благодарности

Нам приятно искренне поблагодарить C. Devchand, A. Гальперина, P. S. Howe, E. Иванова, L. Michel, P. van Nieuwenhuizen, O. Огивецкого, M. Савельева и C. Vafa за ценные дискуссии. Один из нас (В. О.) весьма признателен за сердечное гостеприимство Рокфеллеровскому Университету, в котором эта работа была начата, и ЦЕРНу и Женевскому Университету, где она была завершена. M. E. выражает также признательность ЦЕРНу и ОИЯИ, Дубна, за гостеприимство.

Приложение A. Кватернионные структуры

Почти кватернионная структура есть набор трех тензоров типа (1,1), $J^n_{a_m}$, действующих на касательном расслоении многообразия, который представляет собой базис алгебры кватернионов (5):

$$J_a J_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} J_c \tag{A-1}$$

Из-за некоммутативности кватернионов нужно различать *левые* (L_a) и *правые* (R_a) кватернионные структуры. Выше мы видели, что право-кватернионные структуры образуют двухпараметрическое семейство (30):

$$R^{\beta\dot{\beta}}_{a_{\alpha\dot{\alpha}}} = -i u^i_{\dot{\alpha}} \sigma^j_{a_i} u^{\dot{\beta}}_j \delta^{\beta}_{\alpha}. \tag{A-2}$$

Аналогичное утверждение справедливо по отношению к левым кватернионным структурам (L_a).

Интересное наблюдение: даны две взаимно коммутирующие кватернионные структуры, например, L_a и R_a, можно построить однопараметрическое семейство кватернионных структур, которое интерполирует между ними. Для этого построим оператор

$$\eta = \frac{1}{2}(1 - L_a R_a). \tag{A-3}$$

Он имеет свойства (которые следуют из кватернионных алгебр для L_a, R_a и из того, что они взаимно коммутируют)

$$\eta^2 = 1, \quad \eta L_a \eta = R_a, \quad \eta R_a \eta = L_a. \tag{A-4}$$

Теперь становится очевидным, что кватернионная алгебра (5) будет выполняться на "смешанной" кватернионной структуре

$$J_a = e^{c\eta} L_a e^{-c\eta} = L_a \cosh^2 c - R_a \sinh^2 c + \epsilon_{abc} R_b L_c \cosh c \sinh c \tag{A-5}$$

и коммутировать с этой кватернионной структурой

$$J'_a = e^{c\eta} R_a e^{-c\eta} = R_a \cosh^2 c - L_a \sinh^2 c - \epsilon_{abc} R_b L_c \cosh c \sinh c, \tag{A-6}$$

где c – действительный параметр. Следовательно, в $4D$ пространстве существует 5-параметрическая система кватернионных структур (2 параметра в выборе L_a, 2 в выборе R_a, и параметр c).

Приложение В. Компактные классы смежности некомпактных групп

Здесь представлены некоторые математические определения и утверждения в форме, удобной для нас, вместе с поясняющими примерами, взятыми из статьи.

Разложение Ивасавы некомпактной полупростой группы G есть (см. учебники [34], [15])

$$G = KAN. \tag{B-1}$$

Здесь K, A и N – подгруппы G, имеющие следующие значения: K – максимальная компактная подгруппа G. Обозначим генераторы G через ϱ и генераторы K – κ. Пусть υ – это остальные генераторы G и $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ – максимальная абелевская подалгебра υ. $A = e^\alpha$ есть коммутативная подгруппа G, генерируемая посредством α. Окончательно, все генераторы G раскладываются в прямую сумму собственных пространств при присоединенном действии (adjoint action) α,

$$[\alpha_\kappa,\, \varrho_\gamma] = \gamma(\alpha_\kappa)\varrho_\gamma,$$

$$\varrho = \sum_\gamma \varrho_\gamma, \quad \gamma = \gamma(\alpha_1), \ldots, \gamma(\alpha_n). \tag{B-2}$$

Говорят, что γ положительно, $\gamma > 0$, если его первая отличная от нуля компонента положительна. Пространство $n = \{n_\gamma\}$ генераторов ϱ_γ с положительным γ есть максимальная нильпотентная подалгебра генераторов ϱ. $N = e^n$ есть соответствующая максимальная нильпотентная подгруппа G.

Теперь максимальная разрешимая подгруппа G есть произведение AN. Борелевская параболическая подгруппа G есть

$$B = MAN, \tag{B-3}$$

где M – централизатор подгруппы A в K, то есть подгруппа K, коммутирующая с A.

Параболические подгруппы P из G определены как те, которые содержат Борелевскую подгруппу как свою подгруппу. Другими словами,

$$P = LAN, \tag{B-4}$$

где L – подгруппа вышеупомянутой максимальной компактной подгруппы K сверху, содержащую в свою очередь M как подгруппу. Подгруппа Бореля есть минимальная параболическая подгруппа. Это есть "квинтэссенция" некомпактности, как можно увидеть из замечательной теоремы Бореля [35]:

Класс смежности некомпактной группы G по модулю любой из ее параболических подгрупп P является компактным пространством.

Более того, параболические подгруппы P могут быть определены именно как те, чьи смежные классы $\frac{G}{P}$ являются компактными. Подгруппа Бореля есть наименьшая параболическая группа.

Интуитивное представление этой теоремы достаточно прозрачно:

$$\frac{G}{P} = \frac{KAN}{LAN} = \frac{K}{L}, \tag{B-5}$$

K и L компактные. Несмотря на сверхпростоту, это описание эффективно в том смысле, что оно показывает явно, какое компактное многообразие было получено.

Теперь дадим несколько примеров из статьи:

1. $G = SL(2, C) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (см. раздел 2.2)

$$K = SU(2) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}, \qquad A = e^{\alpha},$$

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad [\alpha, n] = +\phi n, \quad N = e^n.$$

Использованная параболическая группа есть

$$P = U(1) \times AN, \tag{B-6}$$

где $U(1)$ – подгруппа K с $a = e^{-i\phi}$, $b = 0$. Мы видим, что

$$\frac{G}{P} = \frac{SU(2)}{U(1)} = S^2.$$

2. $G = Spin(5, 1)$, представленная матрицей (85)

$$\begin{pmatrix} l^{\alpha}_{\beta} & b^{\dot{\beta}}_{\alpha} \\ c^{\beta}_{\dot{\alpha}} & r^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{B-7}$$

Ее максимальная компактная подгруппа $K = Spin(5)$ дается с помощью такой же матрицы с идентификацией $b^{\dot{\alpha}}_{\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{\alpha\beta}c^{\beta}_{\dot{\beta}}$ и с унимодулярными l^{α}_{β} и $r^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$.

В этом случае $A = \exp\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ есть группа дилатаций.

Наконец, $n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^{\alpha}_{\dot{\alpha}} & O \end{pmatrix}$ – конформные бусты; $N = e^n$.

Параболическая подгруппа $P = Spin(3) \times SO(2) \times AN$ приводит к шестимерному смежному классу

$$\frac{Spin(5,1)}{P} = \frac{Spin(5)}{Spin(3) \times SO(2)} = \frac{SO(5)}{SO(3) \times SO(2)} \tag{B-8}$$

С этим смежным классом, однако, конформные преобразования будут неаналитичными, как объяснено в разделе 6.

3. $Spin(6, C) \sim SL(4, C)$. Удобно представить это снова в виде матрицы (B-7), но теперь с комплексными элементами.

Теперь максимально компактная группа есть $K = Spin(6)(\sim SL(4))$, заданная с помощью унитаризованной матрицы (B-7).

Группа $A = e^{\alpha_i \alpha_i}$ имеет три генератора,

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Индексы $\gamma = \{\gamma(\alpha_1), \gamma(\alpha_2), \gamma(\alpha_3)\}$ могут быть показаны в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 000 & 0-20 & --+ & --- \\ 020 & 000 & -++ & -+- \\ ++- & +-- & 000 & 00-2 \\ +++ & +-+ & 002 & 000 \end{pmatrix}$$

где тройки индексов в каждой позиции являются ее индексами γ.

Таким образом, существует шесть *комплексных* (эквивалентных двенадцати действительным) генераторов n с положительными индексами. Они расположены ниже главной диагонали. Согласно нашему основному правилу, максимальная нильпотентная группа есть $N = e^n$ и $B = AN$.

Для параболической подгруппы

$$P = SU(3) \times U(1) \times AN, \tag{B-9}$$

можно получить шестимерный класс смежности

$$\frac{SL(4,C)}{P} = \frac{SU(4) \times AN}{SU(3) \times U(1) \times AN} = \frac{SU(4)}{SU(3) \times U(1)}, \tag{B-10}$$

т. е. как раз CP^3 проективное пространство.

Литература

[1] F. Gürsey, Nuovo Cim. 3 (1956) 988.
[2] F. Gürsey and H. C. Tze, Ann. of Phys. (N.Y.) 128 (1980).
[3] A. Sudbery, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85 (1979) 199.
[4] R. Fueter, Comment. Math. Helv. 7 (1935) 307, ibid. 8 (1936) 371.
[5] F. Gürsey, Conformal and quasi-conformal structures in space-time, Yale prep. YCTR - P 34–91.
[6] F. Gürsey and W. X. Jiang, J. Math. Phys. 33 (1992) 682.
[7] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Lett. B 78 (1991) 430.
[8] L. Alvarez-Gaumé and D. Z. Freedman, Commun. Math. Phys. 80 (1981) 443.
[9] J. Bagger and E. Witten, Nucl. Phys. B 222 (1983) 1.
[10] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky and E. Sokatchev, Class. Quantum Grav. 1 (1984) 469.
[11] R. Penrose, Gen. Rel. Grav. 7 (1976) 31.
[12] R. S. Ward, Phys. Lett. 61A (1977) 81.
[13] R. S. Ward and R. O. Wells, Twistor Geometry and Field Theory (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990).
[14] R. Penrose, in "Twistors in Mathematics and Physics", ed. by T. H. Bailey and R. J. Baston (Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1990, p.1-29).

[15] R. J. Baston and M. G. Eastwood (The Penrose transform. Its Interaction with Presentation Theory, Clarendon Press, Oxford, 1989).

[16] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky and E. Sokatchev, prepr. JINR E2-85-363, (1985), in Quantum Field Theory and Quantum Statistics, vol.2, 233-248 (A. Hilger, Bristol, 1987) and Ann. Phys (N. Y.) 185 (1988) 1 and 22.

[17] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Rocek, Commun. Math. Phys. 108 (1987) 535.

[18] O. Ogievetsky, in Proc. Conf. on Group Theor. Methods in Physics, Varna, 1987, (Berlin, Springer 1988), p. 548 and Thesis, Physical Lebedev Institute, Moscow, 1989, p. 1–115.

[19] S. Kalitzin and E. Sokatchev, Class. Quantum Grav. 4 (1987) L173.

[20] J. Bagger, A. Galperin, E. Ivanov and V. Ogievetsky, Nucl. Phys. B 303 (1988) 522.

[21] A. P. Hodges, R. Penrose and M. A. Singer, Phys. Lett. B 216 (1989) 48.

[22] H. Ooguri and C. Vafa, Mod. Phys. Lett. A 5, (1990) 1389.

[23] A. Belavin and V. Zakharov, Phys. Lett. B 73 (1978) 53.

[24] E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. C. Yates and P. Goddard, Comm. Math. Phys. 58 (1978) 223.

[25] A. Leznov and M. Saveliev, Comm. Math. Phys. 74 (1980) 111.

[26] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Lond. Soc. A315 (1985) 451 and in the same book as ref. [14], p. 246–259.

[27] N. J. Hitchin, Proc. Lond. Math. Soc. 55 (1987) 59.

[28] L. Mason and G. A. J. Sparling, Phys. Lett. B 137 (1989) 29; J. Geom. and Phys. 8 (1992) 243.

[29] S. Chakravarti, M. J. Ablovitz and P. A. Clarkson, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 1085; S. Chakravarti, S. Kent and E. T. Newman, J. Math. Phys. 33 (1992) 382.

[30] Q-Han Park, Phys. Lett. B 236 (1990) 429; 257 (1991) 105.

[31] L. Bakas, D. A. Depireux, Mod. Phys. Lett. A 6 (1991) 399; 2351.

[32] L.- L. Chau, I. Yamasaka, Phys. Rev. Lett. 68 (1982) 1807. [33] K. Takasaki, W Algebra, Twistor, and Nonlinear Integrable Systems, Kyoto prepr. KUCP-0049/92, June 1992.

[34] N. Ya. Vilenkin, A. U. Klimyk, Lie group representatione and special functions, In Modern Problems of Math., Fundamental Trends, vol. 59 (VINITI, Moscow, 1990) p. 145–368.

[35] A. Borel, Linear Algebraic Groups, (Springer, New York, 1991) New York.

[36] Ch. Devchand, D. Khetselius and V. Ogievetsky, Heavenly equations in harmonic space, in preparation.