ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ ЧИСЕЛ КЭЛИ-ДИКСОНА

С. В. Людковский

Открытый Университет г. Брюсселя, Факультет Естественных Наук
sludkowski@mail.ru

Мы исследуем супердифференцируемость функций, определенных на областях в вещественной октонионной (Кэли) алгебре, и получаем некоммутативную версию условий Коши-Римана. Далее мы изучаем некоммутативный аналог интеграла Коши, а также критерии, при которых функции октонионных переменных являются аналитичными. В частности, рассматриваются октонионные экспоненциальные и логарифмические функции. Более того, исследуются функции переменных, принадлежащих конечно и бесконечномерным алгебрам Кэли-Диксона (содержащим октонионную алгебру в качестве собственной подалгебры). Среди главных результатов имеются аналоги теорем Коши, Гурвица, принципа аргумента, Миттаг-Леффлера, Руше и Вейерштрасса для супердифференцируемых функций чисел Кэли-Диксона.

1. Введение

Функции действительных переменных со значениями в алгебрах Клиффорда были исследованы, например, [5]. В данной статье продолжены исследования функций переменных, принадлежащих некоммутативным супералгебрам [27]. Здесь рассматриваются функции октонионных переменных и также более общие алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $r \geq 4$, содержащие алгебру октонионов в качестве собственной подалгебры. Алгебра октонионов является альтернативной, что дает возможность определить вычеты функций разумным образом. Алгебры Кэли-Диксона большей размерности уже не являются альтернативными и обращаться с ними труднее. Тем не менее, используя их ассоциативность со степенями и дистрибутивность, можно определить дифференцируемость функций переменных, принадлежащих алгебрам Кэли-Диксона, так что дифференциал имеет достаточно хорошие свойства, чтобы определить последовательно интегралы вдоль путей над такими переменными. Этот интеграл продолжен на пространство непрерывных функций вдоль спрямляемых путей. Необходимо отметить, что градуированная структура алгебр Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ над $\mathbf{R}$ и её некоммутативность для действительной размерности не меньше, чем 4 приводит к хорошим свойствам супердифференцируемых функций $f : U \to \mathcal{A}_r$, где U открыто в $\mathcal{A}_r^n$. В отличии от комплексного случая производная f' функции $f \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$ является оператором и в общем это не число даже при $U \subset \mathcal{A}_r$, $n = 1$.

Теория $\mathcal{A}_r$-голоморфных функций, данная ниже, не может быть сведена к теории голоморфных функций нескольких комплексных переменных. Более того, $\mathcal{A}_r$-голоморфные функции имеют много специфических особенностей по сравнению с действительными локально аналитическими функциями, такие как, например, принцип аргумента, теорема о гомотопии 2.15, теорема о представлении функций с соответствующими множителями в виде интегралов вдоль петель (замкнутых путей) и т. д.

Дирак использовал бикватернионы (комплексифицированные кватернионы) в своих исследованиях квантовой механики. Уравнения Дирака $D_z f_1 - D_{\tilde{z}} f_2 = m(f_1 +$

f_2) и $D_{\tilde{z}} f_1 + D_z f_2 = m(f_1 - f_2)$ на пространстве право суперлинейно $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций кватернионных переменных может быть продолжено на пространство $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций $f_1(z, \tilde{z})$ и $f_2(z, \tilde{z})$ (см. определение в §2.2 ниже и в [27]) дает очевидную физическую интерпретацию решения (f_1, f_2), $r \geq 2$, как спинора, где m – это масса элементарной частицы. Мы продолжим оператор $(D_z^2 + D_{\tilde{z}}^2)$ с пространства право суперлинейно $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций на пространство $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций f, следовательно, мы получим уравнение Клейна-Гордона $(D_z^2 + D_{\tilde{z}}^2) f = 2m^2 f$ в частном случае кватернионов и $\mathcal{A}_r$-алгебр, $r \geq 3$.

Необходимо отметить, что предыдущие авторы использовали правую (или левую) суперлинейную супердифференцируемость функций, что не формирует алгебры функций и что они использовали кратные и итерированные интегралы и формулу Гаусса-Остроградского-Грина, но не использовали интегралы вдоль путей над $\mathcal{A}_r$ (см., например, [11] и ссылки там). Во время развития своей теории Янг и Миллс активно работали с кватернионами, но они испытывали недостаток в имевшейся тогда теории функций. Янг также выдвинул идею, что возможно в квантовой теории поля целесообразно использовать кватернионное время (см. стр. 198 в [11]). Известно также использование комплексного времени путем поворота Вика в квантовой механике, где мнимое время используется для интерпретаций вероятностей туннелирования под энергетическими барьерами (стенами). Использование специальной унитарной группы, вложенной в тело кватернионов (некоммутативное поле) $\mathbf{H}$, приводит к эквивалентности путем изоморфизма с $SO(3)$ всех пространственных осей. С другой стороны, главным инструментом для измерения является спектр. Когда имеются глубокие энергетические ямы или высокие энергетические барьеры, это создает препятствия для проникновения электромагнитных волн и радиации, что также хорошо известно в астрономии, в которой активно изучаются черные дыры (см. страницу 199 и §3.b в [11] и ссылки там).

У. Гамильтон в своих лекциях о кватернионах также затрагивал вопрос о событиях со значениями в $\mathbf{H}$ и думал об использовании кватернионов в астрономии и небесной механике (см. [12, 30] и ссылки там). В общем, для сравнения последовательности событий может быть необходимо в определенных ситуациях иметь пространство времени той же размерности, что и координатное пространство. С другой стороны, пространственная изотропность по крайней мере локально в определенных областях делает из каждой оси при вращениях и дилатациях $SU(2) \times \mathbf{R}$ изоморфное с $\mathbf{H}$. Поэтому оказывается, что в определенных ситуациях было бы достаточно использовать $\mathbf{H}^4$ вместо пространства-времени Минковского $\mathbf{R}^{1,3}$, где $\mathbf{R}^{1,3}$ имеет вложение в $\mathbf{H}$. Поскольку $\mathbf{H}$ как $\mathbf{R}$-линейное пространство изоморфно $\mathbf{R^4}$, то существует вложение ζ пространства $\mathbf{R^{1,3}}$ в $\mathbf{H}$, так что $\zeta(x_1, x_i, x_j, x_k) = x_1 + x_i i + x_j j + x_k k$, где $\mathbf{R^{1,3}}$-норма дается уравнением $|x|_{1,3} = (x^2 + \tilde{x}^2)/2 = Re(x^2) = x_1^2 - x_i^2 - x_j^2 - x_k^2$ и $\mathbf{R^{1,3}}$ скалярное произведение дается равенством $(x, y)_{1,3} := (xy + \tilde{y}\tilde{x})/2 = Re(xy)$ $= x_1 y_1 - x_i y_i - x_j y_j - x_k y_k$, где $x = x_1 + x_i i + x_j j + x_k k$, $x_1, ..., x_k \in \mathbf{R}$ (см. §2.1). Это также может быть использовано для вложений гиперболических многообразий в кватернионные многообразия. Тогда $\mathbf{H}^4$ может быть вложено в алгебру $\mathcal{A}_4$ седенионов (sedenions). Это также естественно для описания систем со спином, изоспином, ароматом, цветом и их взаимодействиями. Расширение пространства-времени также диктуется в некоторых ситуациях свойствами симметрии дифференциальных уравнений или множества операторов, описывающих систему. Например, специальная унитарная группа $SU(n)$, для $n = 3, 5 - 8, 11$ и т. д., исключительные группы Ли, активно используются в теории элементарных частиц [11], но эти группы могут быть вложены в соответствующие алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ [1]. В самом деле, $U(m) \subset GL(n, \mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^{n^2}$ в то время как $\mathbf{C}^m$ имеет вложение в $\mathcal{A}_r$, где $m = 2^{r-1}$, так что $\mathbf{C}^m \ni (x^1 + iy^1, ..., x^m + iy^m) =: \xi \mapsto z := (x^1 + i_1 y^1) + i_2(x^2 + i_2^* i_3 y^2) + ... + i_{2m-2}(x^m + i_{2m-2}^* i_{2m-1} y^m) \in \mathcal{A}_r$, так как $(i_l^* i_k)^2 = -1$ для любого $l \neq k \geq 1$, где $\{i_0, i_1, ..., i_{2m-1}\}$ – это базис генераторов $\mathcal{A}_r$, $i_0 = 1$, $i_k^2 = -1$, $i_0 i_k = i_k i_0$, $i_l i_k = -i_k i_l$ для любых $k \neq l \geq 1$, $i = (-1)^{1/2}$, $z^* = x^1 - i_1 y^1 - i_2 x^2 - i_3 y^2 - ... - i_{2m-2} x^m - i_{2m-1} y^m$, норма $(zz^*)^{1/2} =: |z| = (\sum_{k=1}^m |x^k + iy^k|^2)^{1/2} =: |\xi|$ удовлетворяет тождеству параллелограмма и индуцирует скалярное произведение.

Данная статья, как и предыдущая [27], посвящена решению проблемы У. Гамильтона развития интегрирования вдоль путей и теории голоморфных функций кватернионных переменных, но теперь рассматривается общий случай переменных алгебр Кэли-Диксона.

В данной работе исследуется дифференцируемость функций на областях действительной октонионной (Кэли) алгебры. Для этого далее рассматривается специфическое определение супердифференцируемости и получены некоммутативная версия супердифференцируемости и условий Коши-Римана в частном случае правосуперлинейной супердифференцируемости. Также изучается некоммутативный аналог интеграла Коши, а также критерии того, чтобы функции октонионных переменных были локально аналитическими. В частности, рассмотрены октонионные экспоненциальные и логарифмические функции. Более того, исследуются супердифференцируемые функции от переменных, принадлежащих конечно и бесконечномерным алгебрам Кэли-Диксона (содержащим алгебру октонионов в качестве собственной подалгебры). Среди главных результатов имеются аналоги для алгебр Кэли-Диксона теорем Коши, Гурвица, принципа аргумента, Миттаг-Леффлера, Руше и Вейерштрасса.

Результаты данной статьи могут служить для последующих исследований специальных функций переменных из алгебр Кэли-Диксона, некоммутативной теории пучков, многообразий некоммутативной геометрии над алгебрами Кэли-Диксона, их групп петель и диффеоморфизмов (см. также [23, 24, 25, 26, 29]).

2. Дифференцируемость функций октонионных переменных

Во избежание недоразумений сначала приведены обозначения и определения.

2.1. Тело кватернионов над действительным полем $\mathbf{R}$ обозначается $\mathbf{H}$ с классическим кватернионным базисом 1, i, j, k, удовлетворяющим соотношениям для $\mathcal{A}_2$ (см. введение). Тело кватернионов $\mathbf{H}$ имеет антиизоморфизм η порядка два $\eta : z \mapsto \tilde{z}$, где $\tilde{z} = w_1 - w_i i - w_j j - w_k k$, $z = w_1 + w_i i + w_j j + w_k k$; $w_1, ..., w_k \in \mathbf{R}$. Имместся норма в $\mathbf{H}$ такая, что $|z| = |z\tilde{z}|^{1/2}$, следовательно, $\tilde{z} = |z|^2 z^{-1}$.

Алгебра $\mathbf{K}$ октонионов (октав, алгебры Кэли) определяется как восьмимерная алгебра над $\mathbf{R}$ с базисом, например,

(1) $\mathbf{b}_3 := \mathbf{b} := \{1, i, j, k, l, il, jl, kl\}$, так что

(2) $i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$, $li = -il$, $jl = -lj$, $kl = -lk$;

(3) $(\alpha + \beta l)(\gamma + \delta l) = (\alpha\gamma - \tilde{\delta}\beta) + (\delta\alpha + \beta\tilde{\gamma})l$

– это закон умножения в $\mathbf{K}$ для любых α, β, γ, $\delta \in \mathbf{H}$, $\xi := \alpha + \beta l \in \mathbf{K}$, $\eta := \gamma + \delta l \in \mathbf{K}$, $\tilde{z} := v - wi - xj - yk$ для кватерниона $z = v + wi + xj + yk \in \mathbf{H}$ с $v, w, x, y \in \mathbf{R}$.

Алгебра октонионов не является ни коммутативной, ни ассоциативной, так как $(ij)l = kl$, $i(jl) = -kl$, но она дистрибутивна и $\mathbf{R}1$ является ее центром. Если $\xi := \alpha + \beta l \in \mathbf{K}$, то

(4) $\tilde{\xi} := \tilde{\alpha} - \beta l$ называется сопряженным элементом для ξ, где $\alpha, \beta \in \mathbf{H}$. Тогда

(5) $(\xi\eta)\tilde{} = \tilde{\eta}\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} + \tilde{\eta} = (\xi + \eta)\tilde{}$ и $\xi\tilde{\xi} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$,

где $|\alpha|^2 = \alpha\tilde{\alpha}$, так что

(6) $\xi\tilde{\xi} =: |\xi|^2$ и $|\xi|$ – это норма в $\mathbf{K}$. Поэтому,

(7) $|\xi\eta| = |\xi||\eta|$,

следовательно, $\mathbf{K}$ не содержит делителей нуля (см. также [17, 21, 35]). Умножение октонионов удовлетворяет уравнениям:

(8) $(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta)$,

(9) $\xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta$,

которые определяют свойство альтернативности алгебры. В частности, $(\xi\xi)\xi = \xi(\xi\xi)$. Положим $\tilde{\xi} = 2a - \xi$, где $a = Re(\xi) := (\xi + \tilde{\xi})/2 \in \mathbf{R}$. Поскольку $\mathbf{R}1$ является центром в $\mathbf{K}$ и $\tilde{\xi}\xi = \xi\tilde{\xi} = |\xi|^2$, тогда из уравнений $(8, 9)$ по индукции следует, что для любого $\xi \in \mathbf{K}$ и любого n-кратного произведения, $n \in \mathbf{N}$, $\xi(\xi(...\xi\xi)...) = (...(\xi\xi)\xi...)\xi$ и результат не зависит от порядка скобок (порядка последовательных умножений), следовательно, определение $\xi^n := \xi(\xi(...\xi\xi)...)$ не зависит от порядка скобок. Это также показывает, что $\xi^m\xi^n = \xi^n\xi^m$, $\xi^m\tilde{\xi}^m = \tilde{\xi}^m\xi^n$ для любых $n, m \in \mathbf{N}$ и $\xi \in \mathbf{K}$. В отличии от кватернионов, октонионная алгебра не может быть реализована как подалгебра алгебры $\mathbf{M}_8(\mathbf{R})$ всех 8×8-матриц над $\mathbf{R}$, так как $\mathbf{K}$ неассоциативна, но $\mathbf{M}_8(\mathbf{R})$ ассоциативна. Некоммутативная неассоциативная алгебра октонионов $\mathbf{K}$ является $\mathbf{Z_2}$-градуированной $\mathbf{R}$-алгеброй $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$, где элементы $\mathbf{K}_0$ являются *четными* и элементы в $\mathbf{K}_1$ являются *нечетными* (смотри, например, [20, 21, 34]). Существуют естественные вложения $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{K}$ и $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{K}$, но ни $\mathbf{K}$ над $\mathbf{C}$, ни $\mathbf{K}$ над $\mathbf{H}$, ни $\mathbf{H}$ над $\mathbf{C}$ являются алгебрами, так как их центры таковы: $Z(\mathbf{H}) = Z(\mathbf{K}) = \mathbf{R}$.

Рассмотрим также алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ над $\mathbf{R}$, где 2^n – это её размерность над $\mathbf{R}$. Они строятся по индукции стартуя с $\mathbf{R}$, так что $\mathcal{A}_{n+1}$ получается из $\mathcal{A}_n$ с помощью процедуры удвоения, в частности, $\mathcal{A}_0 := \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$ и $\mathcal{A}_4$ известна как алгебра седенионов [1]. Алгебры Кэли-Диксона являются $*$-алгебрами, то есть, существует действительно-линейное отображение $\mathcal{A}_n \ni a \mapsto a^* \in \mathcal{A}_n$, так что

(10) $a^{**} = a$,

(11) $(ab)^* = b^*a^*$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_n$. Тогда они хорошо нормированы, то есть,

(12) $a + a^* =: 2Re(a) \in \mathbf{R}$ и

(13) $aa^* = a^*a > 0$ для любого $0 \neq a \in \mathcal{A}_n$. Норма в ней определена путем

(14) $|a|^2 := aa^*$. Мы также обозначим a^* через $\tilde{a}$. Каждое $0 \neq a \in \mathcal{A}_n$ имеет мультипликативный обратный даваемый формулой $a^{-1} = a^*/|a|^2$.

Процедура удвоения состоит в следующем. Каждое $z \in \mathcal{A}_{n+1}$ записывается в виде $z = a + bl$, где $l^2 = -1$, $l \notin \mathcal{A}_n$, $a, b \in \mathcal{A}_n$. Сложение является покомпонентным. Сопряженным является

(15) $z^* := a^* - bl$.

Умножение дается уравнением (3).

Базис $\mathcal{A}_n$ над $\mathbf{R}$ обозначается через $\mathbf{b}_n := \mathbf{b} := \{1, i_1, ..., i_{2^n-1}\}$, где $i_s^2 = -1$ для любого $1 \leq s \leq 2^n - 1$, $i_{2^{n-1}} := l$ является дополнительным элементом процедуры удвоения $\mathcal{A}_n$ из $\mathcal{A}_{n-1}$, выберем $i_{2^{n-1}+m} = i_m l$ для любого $m = 1, ..., 2^{n-1} - 1$, $i_0 := 1$.

Алгебра называется альтернативной, если каждая подалгебра порожденная двумя элементами ассоциативна. Алгебра называется ассоциативной со степенями (power-associative), если её каждая подалгебра порожденная одним элементом ассоциативна. Только при $n = 0, ..., 3$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ являются альтернативными алгебрами с делением. При $n \geq 4$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ не являются алгебрами с делением, но они являются ассоциативными со степенями. Для проверки последнего свойства рассмотрим $z \in \mathcal{A}_n$ записанное в виде $z = v + M$, где $v = Re(z)$,

$M := (z-z^*)/2 =: Im(z)$. Тогда v и M коммутируют и они ортогональны, $M^* = -M$. Поэтому, подалгебра, порожденная z ассоциативна тогда и только тогда, когда алгебра порожденная M ассоциативна. Поскольку $M^*M = MM^* = |M|^2$ и $M^* = -M$, тогда подалгебра порожденная M ассоциативна.

Проверим, что z и $\tilde{z}$ в $\mathcal{A}_r$ являются независимыми переменными. Предположим напротив, что существует $\gamma \in \mathcal{A}_r$ такое, что $z + \gamma\tilde{z} = 0$ для любых $z \in \mathcal{A}_r$. Запишем $z = a+bl$, $\gamma = \alpha+\beta l$, где $a, b, \alpha, \beta \in \mathcal{A}_{r-1}$. Тогда $z+\gamma\tilde{z} = 0$ эквивалентно $\alpha a^*+b^*\beta = -a$ и $-b\alpha + \beta a = -b$. Рассмотрим z с $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда из последних двух уравнений следует, что: $\alpha = -(a + b^*\beta)a|a|^{-2} = 1 + b^*\beta a|b|^{-2}$, так как $a^{-1} = a^*|a|^{-2}$. Это дает $\beta = -2bRe(a)|z|^{-2}$ и $\alpha = 1 - 2aRe(a)|z|^{-2}$. Беря в частности, $|z| = 1$ и $Re(a) \neq 0$ и варьируя z, мы приходим к противоречию, так как γ не постоянна. Поэтому, z и z^* – две переменные в $\mathcal{A}_r$ леволинейно (или праволинейно) независимы над $\mathcal{A}_r$.

Для любой алгебры $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 2$, $r \in \mathbf{N}$, имеются два тождества: $z + z^* = 2w_1$, $s(zs^*) = z^* + 2w_s s$ для любого $s \in \hat{b}$, где $z = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s s$, $w_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b} := \{1, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$, $\hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$, следовательно, $z^* = (2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\}$ для любого $r \geq 2$, $r \in \mathbf{N}$. Поэтому, z^* не играет такой специальной роли в $\mathcal{A}_r$, $r \geq 2$, как для $\mathbf{C}$.

В силу некоммутативности $\mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, и тождеств вызванных сопряжением (15), умножения (3) и аксиом аддитивности, например, уравнения $(7, 8, 9)$ для октонионов, также уравнения $(10, 11, 14)$ и условия $(12, 13)$ в общем случае $\mathcal{A}_r$ полиномиальная функция $P : U \to \mathcal{A}_r$ переменной z и z^{-1} могут иметь несколько различных представлений

$$\check{\mathrm{P}}(z) = \sum_{k,q(m)} \{b_{k,1}z^{k_1}...b_{k,m}z^{k_m}\}_{q(m)},$$

где $b_{k,j} \in \mathcal{A}_r$ – это постоянные, $k = (k_1, ..., k_m)$, $m \in \mathbf{N}$, $k_j = (k_{j,1}, ..., k_{j,n})$, $k_{j,l} \in \mathbf{Z}$, $z^{k_j} := {}^1z^{k_{j,1}}... {}^nz^{k_{j,n}}$, ${}^lz^0 := 1$, U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$. Конечно, мы можем рассматривать $z - z_0$ вместо z в формуле $\check{\mathrm{P}}(z)$ с правой стороны, когда задана отмеченная точка z_0. В силу неассоциативности $\mathcal{A}_r$ здесь используется обозначение $\{a_1...a_m\}_{q(m)}$ для произведения элементов $a_1, ..., a_m \in \mathcal{A}_r$ соответствующих порядку произведений в этом члене определяемым расположением скобок $q(m) := (q_m, ..., q_3)$, где $a_v := (b_{k,v}z^{k_v})$ для любых $v = 1, ..., m$, $q_m \in \mathbf{N}$ означает, что первая (наиболее внутренняя скобка) соответствует умножению $a_{q_m}a_{q_m+1}$, так что ситуация $(a_1...(a_ta_{t+1})...(a_wa_{w+1})...a_m)$ с формально двумя одновременно независимыми умножениями, но с $t < w$ по нашему определению упорядочения соответствует $q_m = t$. После первого умножения мы получим произведение $a'_1, ..., a'_{m-1} \in \mathcal{A}_r$, где не менее, чем $m - 2$ из этих элементов те же, что и в предыдущем члене, тогда q_{m-1} соответствует первому умножению в новом члене. Мы опустим q_2 и q_1, так как они единственны. Каждый член $\{b_{k,1}z^{k_1}...b_{k,m}z^{k_m}\}_{q(m)} =: \omega(b_k, z) \neq 0$ мы рассмотрим как слово длины $\xi(\omega) = \sum_{j,l} \delta(k_{j,l}) + \sum_j \kappa(b_{k,j})$, где $\delta(k_{j,l}) = 0$ для $k_{j,l} = 0$ и $\delta(k_{j,l}) = 1$ для $k_{j,l} \neq 0$, $\kappa(b_{k,j}) = j$ для $b_{k,j} = 1$, $\kappa(b_{k,j}) = j + 1$ для $b_{k,j} \in \mathcal{A}_r \setminus \{0, 1\}$. Полином P рассматривается как фразу $\check{\mathrm{P}}$ длины $\xi(\check{\mathrm{P}}) := \sum_k \xi(\omega(b_k, z))$. Используя умножение постоянных в $\mathcal{A}_r$, коммутативность $v \in \mathbf{R}$ с каждым ${}^lz$ и ${}^l\tilde{z}$, а ${}^lz^a\, {}^lz^b = {}^lz^{a+b}$ и ${}^l\tilde{z}^a\, {}^l\tilde{z}^b = {}^l\tilde{z}^{a+b}$, ${}^lz\, {}^l\tilde{z} = {}^l\tilde{z}\, {}^lz$, можно рассмотреть представление P как фразы $\check{\mathrm{P}}$ минимальной длины $\xi(\check{\mathrm{P}})$, Тогда упорядочим их лексикографически векторами $q(m)$. Выберем одну такую фразу $\check{\mathrm{P}}$ минимальной длины и тогда минимальной относительно лексикографического упорядочения $q(m)$. В силу коммутативности сложения для членов $\{a_1...a_m\}_{q(m)}$ и $\{a'_1...a'_m\}_{q'(m)}$ равной длины и имеющих различные векторы $q(m)$ и $q'(m)$ порядок $q(m)$ и $q'(m)$ для $\check{\mathrm{P}}$ не важен, так что минимальность тестируется по всем упорядочениям $q(m)$ среди всех членов данной длины в $\check{\mathrm{P}}$.

Если $f : U \to \mathcal{A}_r$ – это функция представленная сходящимся по z рядом $f(z) = \sum_n P_n(z)$, где $P_n(vz) = v^n P_n(z)$ для любого $v \in \mathbf{R}$ является $\mathbf{R}$-гомогенным полиномом, $n \in \mathbf{Z}$, тогда рассмотрим среди всех представлений f такие, для которых $\xi(\check{\mathrm{P}}_n)$ минимально для любого $n \in \mathbf{Z}$. Это служит для отыскания представлений классов эквивалентных элементов $\mathbf{R}$-алгебры всех полиномов на U и z-аналитических функций. Соответствующее семейство локально z-аналитических функций на U обозначается $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$ или $C^\omega(U, \mathcal{A}_r)$. Каждый элемент из $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$ по нашему определению является единственной фразой, которая может быть бесконечной. Мы не исключаем возможности, что две различные фразы f и g могут иметь один и тот же теоретико-множественный график $\Gamma_f := \{(z, f(z)) : z \in U\}$ как отображения из U в $\mathcal{A}_r$, например, где класс эквивалентности определенный графиком имеет неединственный элемент минимальной длины. Если каждый P_n для f имеет разложение частного левого типа

$$\check{\mathrm{P}}(z) = \sum_k b_k(z^k),$$

где $0 \le k \in \mathbf{Z}$, $b_k \in \mathcal{A}_r$, тогда пространство всех таких локально аналитических функций на U обозначается через ${}_lC^\omega(U, \mathcal{A}_r)$. Пространство локально аналитических функций f имеющих разложение правого типа для любого P_n

$$\check{\mathrm{P}}(z) = \sum_k (z^k) b_k$$

обозначается ${}_rC^\omega(U, \mathcal{A}_r)$. Соответствующее пространство по переменным $(z, \tilde{z})$ обозначается через $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ и по переменной $\tilde{z}$ посредством $C^\omega_{\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, где $C^\omega_{z,\tilde{z}} := C^\omega_{{}_1z,\ {}_2z}(U^2, \mathcal{A}_r)|_{\ {}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}$, ${}_1z$ и ${}_2z \in U$. По нашему определению каждый элемент $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ является единственной фразой, которая может быть бесконечной.

$\mathbf{R}$-линейное пространство $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ плотно в $\mathbf{R}$-линейном пространстве $C^0(U, \mathcal{A}_r)$ всех непрерывных функций $f : U \to \mathcal{A}_r$. Обозначим через $C^0_z(U, \mathcal{A}_r)$ $\mathbf{R}$-линейное пространство всех классов эквивалентности последовательностей Коши из $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$ сходящихся относительно C^0-равномерности. Аналогично мы определим $C^0_{\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ и $C^0_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$.

2.1.1. Определение. Если $\mathcal{G} \in C^0_z(U, \mathcal{A}_r)$, то мы скажем, что $\mathcal{G}$ является z-представленным. Элементы в $C^0_{\tilde{z}}$ (или $C^0_{z,\tilde{z}}$) мы назовем $\tilde{z}$- (или $(z, \tilde{z})$– соответственно) представленными функциями. Если $f : U \to \mathcal{A}_r$ является (теоретико-множественно) непрерывной функцией с $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \in C^0_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, так что каждая последовательность Коши $\{\zeta_n : n \in \mathbf{N}\}$ из семейства $\mathcal{G}$ (сходящихся последовательностей Коши) сходится к f относительно C^0-равномерности, то мы назовем каждое $g \in \mathcal{G} = \mathcal{G}(f)$ алгебраической непрерывной функцией g. (Поскольку $\mathcal{F}$ является классом эквивалентности, то каждое $\{\zeta_n : n\} \in \mathcal{G}$ сходится к тому же пределу f).

Мы скажем, что $\mathcal{G}$ обладает свойством A, если каждое $\{\zeta_n : n\} \in \mathcal{G}$ обладает свойством A. Мы скажем, что f обладает свойством A, если существует $\mathcal{G}(f)$ обладающее свойством A и такое, что $\mathcal{G}(f) = \mathcal{H}$, где или $\mathcal{H} \in C^0_z(U, \mathcal{A}_r)$ или $\mathcal{H} \in C^0_{\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, или $\mathcal{H} \in C^0_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$. Если $\mathcal{G} \ne \emptyset$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ и $\mathcal{G} \ne \mathcal{H}$, то мы будем говорить о $(A, \mathcal{G})$ свойстве. Если f имеет больший класс гладкости C^n, C^∞ или C^ω и т.д., то мы возьмем пересечения $\mathcal{G}(f)$ и $\mathcal{H}$ с C^n или C^∞, или C^ω и т.д., предполагая сходимость относительно соответствующей равномерности и так что $\mathcal{G}(f) \cap C^n$ или $\mathcal{G}(f) \cap C^\infty$, или $\mathcal{G}(f) \cap C^\omega$ и т.д. непусто. Записывая аргументы $({}_1z, ..., {}_nz)$ функции f мы выясним ситуацию в каждом случае укзывая в каждом случае подмножество переменных по которым выполнено свойство A. Мы можем писать кратко $f(z)$ или f вместо $f(z, \tilde{z})$

в ситуациях, в которых это не может вызвать неясности. Наше общее предположение состоит в том, что непрерывная функция имеет $(z, \tilde{z})$-представление, если не предполагается иное.

2.1.2. Предложение. *Пусть A является $\mathcal{A}_r$-аддитивным, $\mathbf{R}$-гомогенным оператором $A : \mathcal{A}_r^n \to \mathcal{A}_r^n$, $r \geq 2$, $n \geq 1$, тогда A является $\mathbf{R}$-линейным и существует конечное семейство A_j право-$\mathcal{A}_r$-линейных и B_j лево-$\mathcal{A}_r$-линейных операторов $j \in \{1, 2, ..., 2^r\}$ независимых от $h \in \mathcal{A}_r^n$, так что $A(h) = \sum_j A_j(hB_j)$ для любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, где мы пишем $A_j(h) =: A_j h$ и $B_j(h) =: hB_j$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго отметим, что $A(h) = \sum_{j=0}^{2^r-1} A(i_j)h_j$, где $h_j \in \mathbf{R^{n2^r}}$, $h = \sum_{j=0}^{2^r-1} h_j i_j$, $A(i_j)$ является $\mathbf{R}$-линейным оператором независимым от h_j. С другой стороны,
$h_j = (-hi_j + i_j(2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(hi_j^*)\})/2$ для любого $j = 1, 2, ..., 2^r - 1$,
$h_0 = (h + (2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(hi_j^*)\})/2$.
Подставляя эти выражения h_j, $j = 0, 1, ..., 2^r - 1$, в каждый член $A(i_j)h_j$, мы получим второе утверждение.

2.2. Определение. Рассмотрим открытую область U в $\mathcal{A}_r^n$, $r \geq 3$, n-кратное произведение копий $\mathcal{A}_r$, и пусть $f : U \to \mathcal{A}_r$ является функцией. Тогда будем говорить, что f является z-супердифференцируемой в точке $({}^1z, ..., {}^nz) = z \in U$, ${}^1z, ..., {}^nz \in \mathcal{A}_r$, если она удовлетворяет условиям $(2 - 7)$ ниже и если она может быть записана в виде

$$(1) \quad f(z + h) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} A_j\, {}^jh + \epsilon(h)|h|$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, так что $z + h \in U$, где A_j является $\mathcal{A}_r$-значным $\mathcal{A}_r$-аддитивным $\mathbf{R}$-гомогенным оператором h-переменных, в общем он нелинеен для любого $j = 1, ..., n$ и A_j обозначается $(Df(z)).e_j$ и существует производная $f'(z)$, так что дифференциал дается уравнением

$$(2) \quad Df(z).h := f'(z).h := \sum_{j=1}^{n} (\partial f(z)/\partial\, {}^jz)\, {}^jh,$$

где $\epsilon(h)$, $\epsilon : \mathcal{A}_r^n \to \mathcal{A}_r$, является функцией непрерывной в нуле, так что $\epsilon(0) = 0$, $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ -это вектор в $\mathcal{A}_r^n$ с 1 на j-th месте,

$$(3) \quad Df(z).h =: (Df)(z; h)$$

так что $(Df)(z; h)$ аддитивен на h и $\mathbf{R}$-гомогенен, то есть,

$$(4) \quad (Df)(z; h_1 + h_2) = (Df)(h_1) + (Df)(h_2) \text{ и } (Df)(z; vh) = v(Df)(z; h)$$

для любых h_1, h_2 и $h \in \mathcal{A}_r^n$, $v \in \mathbf{R}$. Также наложены условия:

$$(5) \quad (\partial_z z).h = h, \quad \partial_z 1 = 0, \quad \partial_z \tilde{z} = 0, \quad \partial_{\tilde{z}} z = 0, \quad (\partial_{\tilde{z}} \tilde{z}).h = \tilde{h}$$

$$\text{также } D = \partial_z + \partial_{\tilde{z}}, \quad (D(fg)).h = ((Df).h)g + f(Dg).h$$

для произведения двух супердифференцируемых функций f и g и любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, где обозначение ∂_z соответствует $\partial/\partial z$ и $\partial_{\tilde{z}}$ соответствует $\partial/\partial\tilde{z}$. Мы также имеет законы дистрибутивности относительно умножения справа на элементы $\lambda \in \mathcal{A}_r$:

$$(6) \quad (D(f + g))(z; h\lambda) = (Df)(z; h\lambda) + (Dg)(z; h\lambda),$$

$$(Df)(z; h(\lambda_1+\lambda_2)) = (Df)(z; h\lambda_1) + (Df)(z; h\lambda_2)$$

для любых супердифференцируемых функций f и g в точке z и любых λ, λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$. Имеются ещё законы дистрибутивности слева:

$$(7) \quad (D\lambda(f+g))(z; h) = \lambda(Df)(z; h) + \lambda(Dg)(z; h),$$

$$(D(\lambda_1+\lambda_2)f)(z; h) = \lambda_1(Df)(z; h) + \lambda_2(Df)(z; h).$$

Если использовать $(z,\tilde{z})$-представление полиномов и функций, то мы определим $(z,\tilde{z})$-супердифференцируемость по паре $(z,\tilde{z})$, по z и по $\tilde{z}$, так что
(8) $D_z\tilde{z} = 0$, $D_{\tilde{z}}z = 0$, $(D_z z).h = h$, $(D_{\tilde{z}}\tilde{z}).h = \tilde{h}$,
$(D_{z,\tilde{z}}(fg)).h = ((D_{z,\tilde{z}}f).h)g + f(D_{z,\tilde{z}}g).h$ и $(D_{z,\tilde{z}}f).h = (D_z f).h + (D_{\tilde{z}}f).h$
для любых двух $(z,\tilde{z})$-супердифференцируемых функций f и g, любого $h \in \mathcal{A}_r^n$ (см. также [27]). Мы возьмем функцию $g({}_1z, {}_2z)$ в z-представлении по ${}_1z$ и ${}_2z$, затем рассмотрим оператор D по переменной $({}_1z, {}_2z)$ и в выражении $(Dg({}_1z, {}_2z)).h$, положим для компонент ${}_1z = z$, ${}_2z = \tilde{z}$, ${}_1h = {}_2h =: \alpha \in \mathcal{A}_r^n$ и рассмотрим функцию $g(z,\tilde{z}) =: f$, где $z = ({}^1z, ..., {}^nz) \in U \subset \mathcal{A}_r^n$, $\tilde{z} = ({}^1\tilde{z}, ..., {}^n\tilde{z})$, $az := (a\,{}^1z, ..., a\,{}^nz)$, $zb := ({}^1zb, ..., {}^nzb)$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_r$.

Если существует функция $g({}_1z, {}_2z)$ на открытом подмножестве W в $\mathcal{A}_r^{2n}$ со значениями в $\mathcal{A}_r$ $({}_1z, {}_2z)$-супердифференцируемая в точке $({}_1z, {}_2z)$, ${}_1z$ и ${}_2z \in \mathcal{A}_r^n$, также
$g({}_1z, {}_2z)|_{{}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}} =: f(z,\tilde{z})$, $z = \xi$,
Тогда мы скажем, что f является $(z,\tilde{z})$-супердифференцируемой в точке ξ и
(9) $(D_z f(z,\tilde{z})).h = (\partial f(z,\tilde{z})/\partial z).h := \{(Dg({}_1z, {}_2z)).(h,0)\}|_{{}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}$,
$(D_{\tilde{z}} f(z,\tilde{z})).h = (\partial f(z,\tilde{z})/\partial \tilde{z}).h := \{(Dg({}_1z, {}_2z)).(0,h)\}|_{{}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}$,
где $h \in \mathcal{A}_r^n$ и f предоплагается определенной g и его ограничением на $\{({}_1z, {}_2z) \in W : {}_2z = ({}_1z)\tilde{}\}$,
(10) $D_{{}_1z}g({}_1z, {}_2z).h := D_{({}_1z,\ {}_2z)}g({}_1z, {}_2z).(h,0)$,
$D_{{}_2z}g({}_1z, {}_2z).h := D_{({}_1z,\ {}_2z)}g({}_1z, {}_2z).(0,h)$,
$(D_z f(z,\tilde{z})).e_j =: \partial f(z,\tilde{z})/\partial\,{}^jz$, $(D_{\tilde{z}} f(z,\tilde{z})).e_j =: \partial f(z,\tilde{z})/\partial\,{}^j\tilde{z}$.
Поскольку алгебры Кэли-Диксона над $\mathbf{R}$ и дифференциалы Фреше единственны, то для функций $g : W \to \mathcal{A}_r$ и $f : U \to \mathcal{A}_r$, их супердифференциалы $(Dg).h$ и $(D_{(z,\tilde{z})}f).\alpha$ единственны, поэтому мы имеем $D_z = D_{{}_1z}|_{{}_1z=z}$, $D_{\tilde{z}} = D_{{}_2z=\tilde{z}}$ в $(z,\tilde{z})$-представлении, где U открыто в $\mathcal{A}_r^n$ так что $\{({}_1z = z, {}_2z = \tilde{z}) : z \in U\} \subset W$. В частности, если существуют функции f_1, f_2, f_3 такие, что $f_3 = f_1(z,\tilde{z})f_2(z,\tilde{z})$, $f_j = g_j({}_1z, {}_2z)|_{{}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}$, $j = 1, 2, 3$, где или g_j для любого j представлено минимизированным рядом §2.1, или при умножении $(f_1, f_2) \mapsto f_1f_2$ не производится реорганизация ряда, например, по минимальности (это имеет место в случае определения данного выше), тогда
(11) $(D_z f_1f_2).h = ((D_z f_1).h)f_2 + f_1(D_z f_2).h$ и
$(D_{\tilde{z}} f_1f_2).h = ((D_{\tilde{z}} f_1).h)f_2 + f_1(D_{\tilde{z}} f_2).h$
для любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, так как $D_{z,\tilde{z}} = D_z + D_{\tilde{z}}$.
В общем случае, $(D_{z,\tilde{z}}f_1f_2).h = ((D_{z,\tilde{z}}f_1).h)f_2 + f_1(D_{z,\tilde{z}}f_2).h$ для любых $(z,\tilde{z})$-супердифференцируемых функций f_1 и f_2 на U и любого $h \in \mathcal{A}_r^n$.

Функция $f : U \to \mathcal{A}_r$ называется $\tilde{z}$-супердифференцируемой в точке ξ, если существует функция $g : U \to \mathcal{A}_r$ такая, что $g(\tilde{z}) = f(z)$ и $g(z)$ является z-супердифференцируемой в ξ.

Обозначения. Мы можем записывать функцию $f(z)$ с $z \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 2$, в переменных $(({}^jw_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, ..., n)$, $\mathbf{b} := \mathbf{b}_r$, как

$$F(({}^jw_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, ..., n) = f \circ \sigma(({}^jw_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, ..., n),$$

где $\sigma((\,^j w_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, ..., n) = (\,^j z : j = 1, ..., n)$ – это биективное отображение. Для U открытого в $\mathcal{A}_r^n$ и $F : U \to \mathcal{A}_r$ мы можем записать F в виде $F = \sum_{s\in\mathbf{b}} F_s s$, где $F_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$, $F_{vs} := vF_s$ для любого $v \in \mathbf{R}$.

2.2.1. Предложение. *Пусть $g : U \to \mathcal{A}_r^m$, $r \geq 3$, и $f : W \to \mathcal{A}_r^n$ – это две супердифференцируемые функции на U и W соответственно, так что $g(U) \supset W$, U открыто в $\mathcal{A}_r^k$, W открыто в $\mathcal{A}_r^m$, $k, n, m \in \mathbf{N}$. Тогда сложная функция $f \circ g(z) := f(g(z))$ супердифференцируема на $V := g^{-1}(W)$ и*

$(Df \circ g(z)).h = (Df(g)).((Dg(z)).h)$

для любого $z \in V$ и любого $h \in \mathcal{A}_r^k$, где f и g являются одновременно $(z, \tilde{z})$, или z, или $\tilde{z}$-супердифференцируемыми и, следовательно, $f \circ g$ имеет тот же тип супердифференцируемости.

Доказательство. Поскольку g супердифференцируема, то g непрерывна и $g^{-1}(W)$ открыто в $\mathcal{A}_r^k$. Тогда $f \circ g(z+h) - f \circ g(z) = (Df(g))|_{g=g(z)}.(g(z+h) - g(z)) + \epsilon_f(\eta)|\eta|$, где $\eta = g(z+h)-g(z)$, $g(z+h)-g(z) = (Dg(z)).h+\epsilon_g(h)|h|$ (см. §2.2). Поскольку Df является $\mathcal{A}_r^m$-аддитивным и $\mathbf{R}$-гомогенным (и непрерывным) оператором на $\mathcal{A}_r^m$, то

$f \circ g(z+h) - f \circ g(z) = (Df(g))|_{g=g(z)}.((Dg(z)).h) + \epsilon_{f\circ g}(h)|h|$, где

$\epsilon_{f\circ g}(h)|h| := \epsilon_f((Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|)|(Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h||$

$+[(Df(g))|_{g=g(z)}.(\epsilon_g(h))]|h|)$,

$|(Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|| \leq [\|Dg(z)\| + |\epsilon_g(h)|]|h|$, следовательно,

$|\epsilon_{f\circ g}(h)| \leq |\epsilon_f((Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|)|[\|Dg(z)\| + |\epsilon_g(h)|] + \|(Df(g))|_{g=g(z)}\||\epsilon_g(h)|$

и неизбежно $\lim_{h\to 0} \epsilon_{f\circ g}(h) = 0$. Более того, $\epsilon_{f\circ g}(h)$ непрерывна по h, так как ϵ_g и ϵ_f – это непрерывные функции, Df и Dg являются непрерывными операторами. Очевидно, если $\partial_{\tilde{z}} f = 0$ и $\partial_{\tilde{z}} g = 0$ на областях определений f и g соответственно, то $\partial_{\tilde{z}} f \circ g = 0$ на V, так как $D = \partial_z + \partial_{\tilde{z}}$.

2.3. Предложение. *Функция $f : U \to \mathcal{A}_r$ является z-супердифференцируемой в точке $a \in U$ тогда и только тогда, когда F является дифференцируемой по Фреше в a и $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a} = 0$. Если f является z-супердифференцируемой на U, то f является z-представленной на U. Если $f'(a)$ является право суперлинейной на суперальгебре $\mathcal{A}_r^n$, то f является z-супердифференцируемой в $a \in U$ тогда и только тогда, когда F является дифференцируемой по Фреше в $a \in U$ и удовлетворяет следующим уравнениям:*

$$(1) \quad (\partial F_{ps}/\partial\,^j w_p) = ((ps)p^*)^*((qs)q^*)(\partial F_{qs}/\partial\,^j w_q), \quad \text{для любых } p, q, s \in \mathbf{b}$$

или коротко:

$$(2) \quad \partial F/\partial\,^j w_1 = (\partial F/\partial\,^j w_q)q^*$$

для любого $q \in \hat{b}_r$ и любого $j = 1, ..., n$. $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемая функция f в $a \in U$ является z-супердифференцируемой в $a \in U$ тогда и только тогда, когда $D_{\tilde{z}} f(z, \tilde{z})|_{z=a} = 0$.

Доказательство. Для любого канонического замкнутого компактного подмножества U в $\mathcal{A}_r$ множество всех полиномиальных по z функций плотно в пространстве всех непрерывных на U дифференцируемых по Фреше функций на $Int(U)$.

Как обычно множество A имеющее структуру аддитивной группы и имеющее дистрибутивное умножение его элементов на числа Кэли-Диксона $z \in \mathcal{A}_v$ слева и справа называется векторным пространством над $\mathcal{A}_v$. В таком смысле оно является $\mathbf{R}$-линейным пространством, а также левым и правым модулем над $\mathcal{A}_v$. Для двух векторных пространств A и B над $\mathcal{A}_v$ рассмотрим их упорядоченное тензорное произведение $A \otimes B$ над $\mathcal{A}_v$ состоящее из элементов $a \otimes b := (a, b)$, так что $a \in A$ и $b \in B$,

$\alpha(a,b) = (\alpha a, b)$ и $(a,b)\beta = (a, b\beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_v$, $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ для любых $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$. В вышеупомянутом отношении $A \otimes B$ является $\mathbf{R}$-линейным пространством и в тоже время левым и правым модулем над $\mathcal{A}_v$. Тогда $A \otimes B$ имеет структуру векторного пространства над $\mathcal{A}_v$. По индукции рассмотрим тензорные произведения $\{C_1 \otimes C_2 \otimes ... \otimes C_n\}_{q(n)}$, где $C_1, ..., C_n \in \{A, B\}$, $q(n)$ указывает на порядок тензорного умножения в $\{*\}$. Для двух $\mathcal{A}_v$-векторных пространств V и W их прямая сумма $V \oplus W$ является $\mathcal{A}_v$-векторным пространством состоящим из всех элементов (a, b) с $a \in V$ и $b \in W$, так что $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$ и $(a,b)\beta = (a\beta, b\beta)$ для любых α и $\beta \in \mathcal{A}_v$. Поэтому, прямая сумма всех различных тензорных произведений $\{C_1 \otimes C_2 \otimes ... \otimes C_n\}_{q(n)}$, которые являются $\mathbf{R}$-линейными пространствами и правыми и левыми модулями над $\mathcal{A}_v$, поставляет минимальное тензорное пространство $T(A, B)$ порожденное A и B.

Операторы ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ определены на $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$ и $C^\omega_{\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, следовательно, они единственны на тензорном пространстве $T(C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r), C^\omega_{\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r))$, которое плотно в $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, так как $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r) := C^\omega_{\ _1z,\ _2z}(U^2, \mathcal{A}_r)|_{\ _1z=z,\ _2z=\tilde{z}}$. Поэтому, операторы ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ определены единственным образом на $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$.

Если имеется произведение fg двух фраз f и g из $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, тогда если оно приведено к минимальной фразе ξ, тогда это делается с помощью формул $z^n z^m = z^{n+m}$, и $\tilde{z}^n \tilde{z}^m = \tilde{z}^{n+m}$, и тождеств для констант в $\mathcal{A}_r$, так как никакое сокращение связанное с их перестановкой $z\tilde{z} = \tilde{z}z$, или заменой z на $\tilde{z}$, или $\tilde{z}$ на z, например, используя тождество $\tilde{z} = l(zl^*)$ не разрешается в $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ в соответствии с нашим соглашением в §2.1, так как $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r) := C^\omega_{\ _1z,\ _2z}(U^2, \mathcal{A}_r)|_{\ _1z=z,\ _2z=\tilde{z}}$ и в $C^\omega_{\ _1z,\ _2z}(U^2, \mathcal{A}_r)$ переменные $_1z$ and $_2z$ не коммутируют, $_1z$ и $_2z$ являются различными переменными, которые не связаны между собой. Поэтому, $\partial_z \xi.h = (\partial_z f.h)g + f(\partial_z g.h)$ и $\partial_{\tilde{z}} \xi.h = (\partial_{\tilde{z}} f.h)g + f(\partial_{\tilde{z}} g.h)$, следовательно, ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ корректно определены. В частности, семейство всех функций вида ряда $f = \sum \{\ _{l_1}f ...\ _{l_t}f\}_{q(t)}$ сходящегося на U вместе со своим супердифференциалом на $Int(U)$, так что каждая $_lf$ суперлинейно z-супердифференцируема на $Int(U)$ относительно супералгебры $\mathcal{A}_r$, плотно в $\mathbf{R}$-линейном пространстве всех z-супердифференцируемых функций g на U, так как $(Dg(z)).h$ непрерывно по (z, h). Мы можем использовать δ-приближение для любого $\delta > 0$ для $Dg(z).h$ на достаточно малом открытом подмножестве V в U, так что $z \in V$ функциями ζ_n полиномиальными в z и $\mathbf{R}$-гомогенными $\mathcal{A}^n_r$-аддитивными в h и разложением единицы в U по C^ω_z-функциям на, и тогда рассмотрим функции ξ_n с ${\xi_n}'$ соответствующими ζ_n, так как $\epsilon(h)$ непрерывно в 0 для любого $z \in U$ и любого канонического замкнутого компактного подмножества W в U из каждого открытого покрытия мы можем выбрать конечное подпокрытие множества W.

Из условий 2.2.$(2-7)$ следует, что условия z-супердифференцируемости определены единственным образом на пространстве полиномов. В силу условий 2.2.$(1-7)$ z-супердифференцируемость полинома или сходящегося ряда P на U означает, что он выражается через сумму сходящегося ряда с членами состоящими из произведений ^jz и постоянных из $\mathcal{A}_r$. Поэтому, каждая z-супердифференцируемая функция f на U является классом эквивалентности всех последовательностей Коши из $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$ сходящихся к f относительно C^1-равномерности, так как $(D*).h : C^1 \to C^0$ непрерывно для любого $h \in \mathcal{A}^n_r$.

Предположим, что f z-супердифференцируема в точке a. Каждой $f'(z)$ соответствует $\mathbf{R}$-линейный оператор на Евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{\mathbf{2^r n}}$. Более того, мы имеем аксиомы дистрибутивности и ассоциативности для $(Df)(z;h)$ относительно правого умножения на элементы $\lambda \in \mathcal{A}_r$ (см. §2.1, 2.2). Тогда $f(a+h) - f(a) = \partial_a f(a).h + \epsilon(h)|h|$ и $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a} = 0$, так как в общем случае

$f(a+h)-f(a)=(\partial_a f(a)).h+(\partial_{\tilde{a}} f(a)).h+\epsilon(h)|h|$, где $\epsilon(h)$ непрерывно по h и $\epsilon(0)=0$. Обратно, если F является дифференцируемой по Фреше и $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a}=0$, то выражая $w_s s$ для любого $s\in \mathbf{b}_r$ через линейные комбинации z (с умножением на постоянные из $\mathcal{A}_r$ слева и справа) с постоянными коэффициентами, мы получим f как выше.

Рассмотрим теперь частный случай, когда f' является право суперлинейной на супер態алгебре $\mathcal{A}_r^n$ и $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a}=0$. В этом случае $f'(a)$ является $\mathcal{A}_r$-линейной. Используя определение z-суперпроизводной и то, что существует биективное соответствие между z и $(({}^j w_s : s\in \mathbf{b}_r) : j=1,...,n)$, ${}^j w_s\in \mathbf{R}$ для любого $s\in \mathbf{b}_r$, $j=1,...,n$, мы рассмотрим функции $f=f(z)$ и $F(({}^j w_s : s\in \mathbf{b}_r) : j=1,...,n)=f\circ\sigma$, где f является z-супердифференцируемой по z, следовательно, F является дифференцируемой по Фреше $(({}^j w_s : s\in \mathbf{b}_r) : j=1,...,n)$ и мы получаем выражения:

$$\partial F/\partial\, {}^j w_s=(\partial F/\partial\, {}^j z).(\partial\, {}^j z/\partial\, {}^j w_s),$$

так как $\partial\, {}^j z/\partial\, {}^k w_s=0$ и $\partial\, {}^j \tilde{z}/\partial\, {}^k w_s=0$ и $\partial f(z)/\partial\, {}^j \tilde{z}|_{z=a}=0$ для любого $k\neq j$. Из $\partial\, {}^j z/\partial\, {}^j w_s=s$ для любого $s\in \mathbf{b}_r$ мы получим уравнения (2), так как $ps=-sp$, $F_{ps}=-F_{sp}$ и $pp^*=1$ для любого $p\neq s\in \hat{b}$. Используя равенство $F=\sum_{s\in \mathbf{b}} F_s s$, мы получим уравнения (1) из последних уравнений, так как qf является право суперлинейно супердифференцируемой вместе с f для любого $q\in \mathbf{b}$, $((ps)p^*)^*((qs)q^*)\in\{-1,1\}\subset \mathbf{R}$ для любых $p,q,s\in \mathbf{b}$.

Пусть теперь F является дифференцируемой по Фреше в точке a и пусть F удовлетворяет условиям (1). Тогда

$$f(z)-f(a)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s\in \mathbf{b}}(\partial F/\partial\, {}^j w_s)\Delta\, {}^j w_s+\epsilon(z-a)|z-a|,$$

где $\Delta({}^j w_s : s\in \mathbf{b})=\sigma^{-1}({}^j z)-\sigma({}^j a)$ для любого $j=1,...,n$. Из условий (2) эквивалентных (1), мы получим

$$f(z)-f(a)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s\in \mathbf{b}}(\partial F/\partial^j w_1)s\Delta\, {}^j w_s+\epsilon(z-a)|z-a|=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(\partial F/\partial\, {}^j w_1)\Delta\, {}^j z+\epsilon(z-a)|z-a|,$$

где ϵ – это функция непрерывная в 0 и $\epsilon(0)=0$. Поэтому, f является супердифференцируемой по z в a, так что $f'(a)$ является правосуперлинейной, так как $\partial F/\partial\, {}^j w_s$ – действительные матрицы и, следовательно, $f'(a).({}_1h\lambda_1+{}_2h\lambda_2)=(f'(a)\, {}_1h)\lambda_1+(f'(a)\, {}_2h)\lambda_2$ для любых λ_1 и $\lambda_2\in \mathcal{A}_r$ и любых ${}_1h$ и ${}_2h\in \mathcal{A}_r^n$.

Последнее утверждение этого предложения следует из определения 2.2.

2.3.1. Обозначения. Если $f : U\to \mathcal{A}_r$ является либо z-супердифференцируемой, либо $\tilde{z}$-супердифференцируемой в точке $a\in U$ или на U, то мы можем также записать $D_{\tilde{z}}$ вместо $\partial_{\tilde{z}}$ и D_z вместо ∂_z в точке $a\in U$ или на U соответственно в ситуациях, когда это не может вызвать неопределенности, где U открыто в $\mathcal{A}_r^n$.

2.4. Следствие. *Пусть f является непрерывно супердифференцируемой функцией по z с право суперлинейным супердифференциалом на супер態алгебре $\mathcal{A}_r^n$, $r\geq 3$, на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r^n$ и пусть F является дважды непрерывно дифференцируемой по $(({}^j w_s : s\in \mathbf{b}_r) : j=1,...,n)$ на U, тогда каждая компонента F_s функции F является гармонической функцией по парам переменных $({}^j w_p,\ {}^j w_q)$ для любых $p\neq q\in \mathbf{b}_r$, а именно:*

$$(1)\qquad \triangle_{\, {}^j w_p,\ {}^j w_q} F_s=0,$$

для любых $j=1,..,n$, *где* $\triangle_{\ {}^jw_p,\ {}^jw_q}F_s := \partial^2F_s/\partial\ {}^jw_p^2+\partial^2F_s/\partial\ {}^jw_q^2$.

Доказательство. Из уравнений 2.3.(1) и в силу дважды непрерывной дифференцируемости F следует, что $(\partial^2F_s/\partial\ {}^jw_p^2) = (\partial^2F_{(sp^*)q}/\partial\ {}^jw_p\partial\ {}^jw_q) = \partial^2F_{(((sp^*)q)p^*)q}/\partial\ {}^jw_q^2) = -(\partial^2F_s/\partial\ {}^jw_q^2)$, так как $F_{vs}=vF_s$ для любого $v\in\mathbf{R}$ и любого $s\in\mathbf{b}_r$, $p\ne q\in\mathbf{b}_r$ и, следовательно, $p^*q\in\hat{b}_r$, $t^2=-1$ для любого $t\in\hat{b}_r$, $p^*=-p$ для любого $p\in\hat{b}_r$, $pq=-qp$ для любого $p\ne q\in\hat{b}_r$.

2.5. Замечание и определение. Пусть U является открытым подмножеством в $\mathcal{A}_r$ и пусть $f:U\to\mathcal{A}_r$, $r\ge 3$, является функцией определенной на U, так что

$$(i)\quad f(z,\tilde{z})=\{f^1(z,\tilde{z})...f^j(z,\tilde{z})\}_{q(j)},$$

где каждая функция $f^s(z,\tilde{z})$ представляется рядом Лорана

$$(ii)\quad f^s(z,\tilde{z})=\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{m=m_0}^{\infty}(f^s_{n,m}(z-\zeta)^n)(\tilde{z}-\tilde{\zeta})^m$$

сходящимся на U, где $f^s_{n,m}\in\mathcal{A}_r$, $z\in U$, $\zeta\in\mathcal{A}_r$ является отмеченной точкой, n и $m\in\mathbf{Z}$, если $n_0<0$ или $m_0<0$, тогда $\zeta\notin U$. Рассмотрим случай $f^s_{-1,m}=0$ для любых s и m. Случай с членами $f^s_{-1,m}\ne 0$ будет рассмотрен позже.

Пусть $[a,b]$ – это сегмент в $\mathbf{R}$ и $\gamma:[a,b]\to\mathcal{A}_r$ – непрерывная функция. Рассмотрим разбиение P отрезка $[a,b]$, то есть, P является конечным подмножеством в $[a,b]$, состоящим из возрастающей последовательности точек $a=c_0<...<c_k<c_{k+1}<...<c_t=b$, тогда норма P определена так: $|P|:=\max_k(x_{k+1}-x_k)$ и P-вариация γ как $v(\gamma;P):=\sum_{k=0}^{t-1}|\gamma(c_{k+1})-\gamma(c_k)|$, где $t=t(P)\in\mathbf{N}$. Полная вариация (или длина) кривой γ определена как $V(\gamma)=\sup_P v(\gamma;P)$. Предположим, что γ спрямляема, то есть, $V(\gamma)<\infty$. Для f имеющей разложение $(2.5.i,ii)$ с $f^s_{-1,m}=0$ для любых s и m, и спрямляемого пути $\gamma:[a,b]\to U$ мы определим интеграл вдоль пути над (некоммутативной) алгеброй Кэли-Диксона. Рассмотрим более общий случай.

Пусть $f:U\to\mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, где U открыто в $\mathcal{A}_r$, f определена непрерывной функцией $\xi:U^2\to\mathcal{A}_r$, так что

(1) $\xi(\ {}_1z,\ {}_2z)|_{\ {}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}=f(z,\tilde{z})$

или коротко $f(z)$ вместо $f(z,\tilde{z})$, где ${}_1z$ и ${}_2z\in U$. Пусть также $g:U^2\to\mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, которая является ${}_1z$-супердифференцируемой, так что

(2) $(\partial g(\ {}_1z,\ {}_2z)/\partial\ {}_1z).1=\xi(\ {}_1z,\ {}_2z)$ on U^2. Тогда положим

(3) $\hat{f}(z,\tilde{z}).h := \hat{f}_z(z,\tilde{z}).h := [(\partial g(\ {}_1z,\ {}_2z)/\partial\ {}_1z).h]|_{\ {}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}$ для любого $h\in\mathcal{A}_r$. Коротко мы можем это записать в виде $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).1=f(z,\tilde{z})$ и $\hat{f}_z(z,\tilde{z}).h:=\hat{f}(z).h:=(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).h$. Если существует следующий предел

$$(4)\quad \int_\gamma f(z,\tilde{z})dz:=\lim_P I(f,\gamma;P),\ \text{где}$$

$$(5)\quad I(f,\gamma;P):=\sum_{k=0}^{t-1}\hat{f}(z_{k+1},\tilde{z}_{k+1}).(\Delta z_k),$$

где $\Delta z_k:=z_{k+1}-z_k$, $z_k:=\gamma(c_k)$ для любого $k=0,...,t$, тогда мы скажем, что f является интегрируемой вдоль пути γ по переменной z. Аналогично мы определим $\int_\gamma f(z,\tilde{z})d\tilde{z}$ с $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial\tilde{z}).1=f(z,\tilde{z})$, $\hat{f}_{\tilde{z}}(z,\tilde{z}):=(\partial g(z,\tilde{z})/\partial\tilde{z}).h$, где $g(\ {}_1z,\ {}_2z)$ является ${}_2z$-супердифференцируемой.

Замечание. В силу определений 2.1, 2.2 и предложения 2.3 условия 2.5.$(1-3)$ корректны, например, достаточно взять функции ξ и g в $({}_1z,\ {}_2z)$-представлении.

Это определение оправдано следующей леммой и предложением.

2.5.1. Лемма. *Пусть $f : U \to \mathcal{A}_r$ удовлетворяет условиям* 2.2.$(1,2,5)$, *где U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$. Тогда условия*

(1) $\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$ *для любого* $j = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$ *и* $z \in U$,

где $z_{2j,2j+1} := w_s + w_p s^* p$ *with* $s = i_{2j}$, $p = i_{2j+1}$, *эквивалентны с* $\partial_{\tilde{z}} f(z) = 0$ *для любого* $z \in U$.

Доказательство. Поскольку $(z+h)^* - z^* = h^*$, $((\lambda h)^*)^* = \lambda h$ для любого z и $h \in \mathcal{A}_r^n$ и любого $\lambda \in \mathcal{A}_r$, $(h_1 + h_p p)^* = h_1 - h_p p$ для любого $p \in \hat{b}$, $(s(h_s + h_p s^* p))^* = (h_s - h_p s^* p)s^*$ для любого $s \ne p \in \hat{b}$, $(\partial z/\partial z).h = h$, $(\partial \tilde{z}/\partial \tilde{z}).h = \tilde{h}$, $\partial z/\partial \tilde{z} = 0$ и $\partial \tilde{z}/\partial z = 0$, где $h_p \in \mathbf{R}$ для любого $p \in \mathbf{b}$, следовательно,
$(\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1}).h = (\partial f(z)/\partial z).(sh)|_{h \in \mathbf{R} \oplus s^* p \mathbf{R}}$ и
$(\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).h = (\partial f(z)/\partial \tilde{z}).(sh)|_{h \in \mathbf{R} \oplus s^* p \mathbf{R}}$, где $s = i_{2j}$ и $p = i_{2j+1}$, тогда
$\partial z/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$, $\partial \tilde{z}/\partial z_{2j,2j+1} = 0$ и
$(\partial \bar{z}_{2j,2j+1}/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).h = \bar{h}$, $(\partial z_{2j,2j+1}/\partial z_{2j,2j+1}).h = h$ для любого $h \in \mathbf{R} \oplus s^* p \mathbf{R}$. В силу предложения 2.2.1 из $\partial_{\tilde{z}} f(z) = 0$ на U и условий 2.2.$(1,2,5)$ следует, что для любого j:
$\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = (\partial f(z)/\partial \tilde{z}).(\partial \tilde{z}/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}) + (\partial f(z)/\partial z).(\partial z/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}) = 0$,
так как $\partial_{\tilde{z}} f(z) = 0$ и $\partial z/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$. В общем для f ее производная $f'(z)$ не обязательно является право (или лево) суперлинейной на $\mathcal{A}_r$. Тогда $\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}$ являются $\mathbf{R}$-однородными аддитивными операторами на $\mathbf{R}$-линейном подпространстве $(\mathbf{R} \oplus s^* p \mathbf{R})$ в $\mathcal{A}_r$.

Пусть f удовлетворяет 2.2.$(1,2,5)$ и (1), тогда
$(Df(z)).h = \sum_{s \in \mathbf{b}} (Df(z)).h_s s = \sum_{s \in \mathbf{b}} (\partial f(z)/\partial w_s) h_s$,
так как $\partial z/\partial w_s = s$ для любого $s \in \mathbf{b}$, где $h = \sum_{s \in \mathbf{b}} h_s s \in \mathcal{A}_r$, $h_s \in \mathbf{R}\ \forall\ s \in \mathbf{b}$. Из
$(\partial f(z)/\partial w_s) h_s + (\partial f(z)/\partial w_p) h_p = (\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1}).(h_s + s^* p h_p)$
для любых $s = i_{2p}$ и $p = i_{2j+1}$, так как
$(\partial f(z)/\partial w_s) = (\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1}).1 + (\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).1$,
$(\partial f(z)/\partial w_p) = (\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1} - \partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).(s^* p)$
и $\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$, следует, что $(Df(z)).h = (\partial f(z)/\partial z).h$, так как в силу предложения 2.2.1 и условий (1)
$(\partial f(z)/\partial \tilde{z}).(h_s s + h_p p) = (\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).(h_s + h_p s^* p) = 0$ для любого j
и $(\partial f/\partial \tilde{z}).h = \sum_{j=0}^{2^{r-1}-1} (\partial f/\partial \tilde{z}).(i_{2j}(h_{2j} + h_{2j+1} i_{2j}^* i_{2j+1}))$, так как $h_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$.

2.6. Предложение. *Пусть f является функцией как в §2.5 и предположим, что имеются две постоянные r и R такие, что ряд Лорана* (2.5.*i*, *ii*) *сходится на множестве* $B(a, r, R, \mathcal{A}_m) := \{z \in \mathcal{A}_m : r \le |z - a| \le R\}$ *для любого* $s = 1, ..., j$, *пусть также γ является спрямляемым путем содержащимся в* $U \cap B(a, r', R', \mathbf{H})$, *где* $r < r' < R' < R$, $m \ge 3$. *Тогда существует интеграл вдоль пути над алгеброй Кэли-Диксона.*

Доказательство. Сначала отметим, что $\mathcal{A}_m$ является нормированной алгеброй, так что $|\xi \eta| \le |\xi||\eta|$ для любого ξ и $\eta \in \mathcal{A}_m$. Это можно доказать по индукции начиная с $\mathbf{C}$ и используя процедуру удвоения. Предположим, что $m \ge 2$ и $\mathcal{A}_{m-1}$ является нормированной алгеброй, тогда $|(a,b)(c,d)| = (|ac - d^* b|^2 + |da + bc^*|^2)^{1/2} \le (|ac|^2 + |d^* b|^2 + |da|^2 + |bc^*|^2)^{1/2} \le (|a|^2 + |b|^2)^{1/2}(|c|^2 + |d|^2)^{1/2} = |(a,b)||(c,d)|$, где $a, b, c, d \in \mathcal{A}_{m-1}$, (a,b) и $(c,d) \in \mathcal{A}_m$. Поскольку каждая f^s сходится в $B(a, r, R, \mathcal{A}_m)$, то

$$\overline{\lim}_{n+m>0}|f^s_{n,m}|^{1/(n+m)}R \le 1, \text{ следовательно,}$$

$$\|f\|_\omega := \prod_{s=1}^{j}(\sup_{n+m<0}|f^s_{n,m}|r^{n+m}, \sup_{n+m\ge 0}|f^s_{n,m}|R^{n+m}) < \infty$$

и неизбежно

$$\|f\|_{1,\omega,B(a,r',R',\mathcal{A}_m)} := \prod_{s=1}^{j}[(\sum_{n+m<0}|f^s_{n,m}|r'^{n+m}) + (\sum_{n+m>0}|f^s_{n,m}|R'^{n+m})] < \infty.$$

Для любой локально z-аналитической функции f на U и любого z_0 в U существует шар радиуса $r>0$ с центром z_0, так что f имеет разложение аналогичное $(2.5.i, ii)$ в этом шаре со всеми n неотрицательными. Рассмотрим две z-локально аналитические функции f и q на U, так что f и q не коммутируют. Пусть $f^0 := f$, $q^0 := q$, $q^{-n} := q^{(n)}$, $(\partial(q^n)/\partial z).1 =: q^{n-1}$ и $q^{-k-1}=0$ для некоторого $k\in\mathbf{N}$, тогда

(i) $(fq)^1 = f^1q - f^2q^{-1} + f^3q^{-2} + ... + (-1)^k f^{k+1}q^{-k}$. В частности, если $f=az^n$, $q=bz^k$, с $n>0$, $k>0$, $b\in\mathcal{A}_m\setminus\mathbf{R}I$, тогда $f^p = [(n+1)...(n+p)]^{-1}az^{n+p}$ для любого $p\in\mathbf{N}$, $q^{-s}=k(k-1)...(k-s+1)bz^{k-s}$ для любого $s\in\mathbf{N}$. Также

(ii) $(fq)^1 = fq^1 - f^{-1}q^2 + f^{-2}q^3 + ... + (-1)^n f^{-n}q^{n+1}$, когда $f^{-n-1}=0$ для некоторого $n\in\mathbf{N}$. Применим (i) для $n\ge m$ и (ii) для $n<k$ для решения уравнения $(\partial g(z,\tilde z)/\partial z).1 = f(z,\tilde z)$ для любого $z\in U$. Если f и q имеют ряды сходящиеся в $Int(B(z_0,r,\mathcal{A}_m))$, то эти формулы показывают, что существует z-аналитическая функция $(fq)^1$ с рядом сходящимся в $Int(B(0,r,\mathcal{A}_m))$, так как $\lim_{n\to\infty}(nr^n)^{1/n}=r$, где $0<r<\infty$. Применяя эту формулу по индукции к произведениям полиномов $\{P_1...p_n\}_{q(n)}$ и сходящимся рядам, мы получим g. Поскольку f является локально аналитической, то g также локально аналитична. Поэтому, для любой локально z-аналитической функции f существует оператор $\hat f$. Рассмотрение функции G действительной переменной соответствующей g дает в силу леммы 2.5.1, что все решения g отличаются на постоянные в $\mathcal{A}_m$, так как $\partial g/\partial w_s + (\partial g/\partial w_p).(s^*p)=0$ для любых $s=i_{2j}$, $p=i_{2j+1}$, $j=0,1,...,2^{r-1}-1$ и $\partial g/\partial w_1$ единственна, следовательно, $\hat f$ единственно для f. Поэтому,

$$(1)\quad |\{f^s_{n,m}(z_{j+1}-a)^k(\Delta z_j)(z_{j+1}-a)^{n-k}(\tilde z_{j+1}-\tilde a)^m\}_{q(n+m+1)}| \le$$

$$|f^s_{n,m}||(z_{j+1}-a)^n(\tilde z_{j+1}-\tilde a)^m||\Delta z_j|.$$

Из уравнения (1) следует, что $|I(f,\gamma;P)| \le \|f\|_{1,\omega,B(a,r',R',\mathbf{H})}v(\gamma;P)$, для любого P, и неизбежно

$$(2)\quad |I(f,\gamma;P)-I(f,\gamma;Q)| \le w(\hat f;P)V(\gamma)$$

для любого $Q\supset P$, где

$$(3)\quad w(\hat f;P) := \max_{(z,\zeta\in\gamma([c_j,c_{j+1}]))}\{\|\hat f(z)-\hat f(\zeta)\|: \quad z_j=\gamma(c_j), c_j\in P\},$$

$\|\hat f(z)-\hat f(\zeta)\| := \sup_{h\ne 0}|\hat f(z).h - \hat f(\zeta).h|/|h|$. Поскольку $\lim_{n\to\infty}(n)^{1/n}=1$, то $\lim_P\omega(\hat f,P)=0$. Из $\lim_P w(\hat f;P)=0$ следует существование $\lim_P I(f,\gamma;P)$.

2.7. Теорема. *Пусть γ – это спрямляемый путь в U, тогда для алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $r\ge 3$, интеграл вдоль пути имеет непрерывное продолжение на пространство $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$ ограниченных непрерывных функций $f: U\to\mathcal{A}_r$. Этот* *интеграл является* $\mathbf{R}$*-линейным и лево-*$\mathcal{A}_r$*-линейным и право-*$\mathcal{A}_r$*-линейным функционалом на* $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$.

Доказательство. Поскольку γ непрерывна на компактном сегменте $[a,b]$, то существует компактное каноническое замкнутое подмножество V в $\mathcal{A}_r$, то есть, $cl(Int(V)) = V$, так что $\gamma([a,b]) \subset V \subset U$. Пусть $f \in C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$, тогда в силу теоремы Стоуна-Вейерштрасса для функции $F(w_s : s \in \mathbf{b}) = f \circ \sigma(w_s : s \in \mathbf{b})$ и любого $\delta > 0$ существует полином T такой, что $\|F - T\|_0 < \delta$, где $\|f\|_0 := \sup_{z\in U} |f(z)|$. Этот полином принимает значения в $\mathcal{A}_r$, следовательно, он имеет вид: $T = \sum_{s\in\mathbf{b}} T_s s$, где $T_s : U \to \mathbf{R}$. Имеются соотношения $zp = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s sp$, $sp = -ps$ для любого $s \neq p \in \hat{b}$, следовательно, $zp = -w_p + \sum_{s\in\mathbf{b};s\neq p} w_s sp$, $(zp)^* = p^*z^* = -w_p + \sum_{s\in\mathbf{b};s\neq p} w_s(sp)^* = -w_p - \sum_{s\in\mathbf{b},s\neq p} w_s sp$, так как $p^* = -p$ для любого $p \in \hat{b}$. Тогда $w_1 = (z+\tilde{z})/2$ и $w_p = (p\tilde{z} - zp)/2$ для любого $p \in \hat{b}$, где используется тождество $\tilde{z} = (2^r-2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\}$ (см. §2.1). Запишем $F = \sum_{s\in\mathbf{b}} F_s s$, где $F_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$, тогда применение теоремы Стоуна-Вейерштрасса по действительным переменным $(w_s : s \in \mathbf{b})$ выраженным через z и $s \in \mathbf{b}$ с действительными постоянными множителями дает, что $\mathbf{R}$-линейное пространство функций даваемых уравнениями $(2.5.i, ii)$ плотно в $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$.

Рассмотрим функцию $g(z)$ на U. Пусть $g(z)$ супердифференцируема по z. Рассмотрим пространство всех таких g на U, для которых $(Dg(z)).s$ – это ограниченная непрерывная функция на U для любого $s \in \mathbf{b}$, оно обозначается через $C^1_b(U,\mathcal{A}_r)$ и оно снабжено нормой $\|g\|_{C^1_b} := \|g\|_{C^0_b} + \sum_{s\in\mathbf{b}} \|(Dg(z).s\|_{C^0_b}$, где $\|g\|_{C^0_b} := \sup_{z\in U} |g(z)|$, следовательно, $(Dg(z)).h \in C^0_b(U \times B(0,0,1,\mathcal{A}_r),\mathcal{A}_r)$, где $h \in B(0,0,1,\mathcal{A}_r)$. Поэтому, существует положительная постоянная C, так что

$$(1) \quad \sup_{h\neq 0} |(Dg(z)).h|/|h| \leq C \sum_{s\in\mathbf{b}} \|(Dg(z)).s\|_{C^0_b},$$

так как $h = \sum_{s\in\mathbf{b}} h_s s$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$ и $Dg(z)$ является $\mathbf{R}$-линейной и $(Dg(z)).(\ ^1h +\ ^2h) = (Dg(z)).\ ^1h + (Dg(z)).\ ^2h$ для любых ^1h и $^2h \in \mathcal{A}_r$, где h_s – действительное число для любого $s \in \mathbf{b}$, $G(w_s : s \in \mathbf{b}) := g \circ \sigma(w_s : s \in \mathbf{b})$ является дифференцируемой по Фреше на открытом подмножестве $U_\sigma \subset \mathbf{R^{2^r}}$, так что $\sigma(U_\sigma) = U$.

В §2.6 было показано, что уравнение $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).1 = f(z,\tilde{z})$ имеет решение в классе локально z-аналитических функций на U. Подмножество $C^\omega(U,\mathcal{A}_r)$ плотно в равномерном пространстве $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$.

Если $g = \{g^1...g^j\}_{q(j)}$ является произведением функций $g^s \in C^1_b(U,\mathcal{A}_r)$, тогда $(Dg(z)).h = \sum_{v=1}^j \{g^1(z)...g^{v-1}(z)[(Dg^v(z)).h]g^{v+1}(z)...g^j(z)\}_{q(j)}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Рассмотрим пространство $\hat{C}^0_b(U,\mathcal{A}_r) := \{(Dg(z)).s : s \in \mathbf{b}\}$. Оно имеет вложение ξ в $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$ и $\|g\|_{C^1_b} \geq \sum_{s\in\mathbf{b}} \|(Dg(z)).s\|_{C^0_b}$. В силу неравенства (1) пополнение $\hat{C}^0_b(U,\mathcal{A}_r)$ относительно $\| * \|_{C^0_b(U,\mathcal{A}_r)}$ совпадает с $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$.

Пусть $\{f^v : \ v \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность функций имеющих разложение $(2.5.i, ii)$ и сходящаяся к f в $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$ относительно метрики $\rho(f,q) := \sup_{z\in U} |f(z) - q(z)|$, так что $f^v = \xi((Dg^v(z)).s : s \in \mathbf{b})$ для некоторого $g^v \in C^1_b(U,\mathcal{A}_r)$. Относительно этой метрики $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$ полно. Мы имеем равенство

$$\partial(\int_0^q F(\phi h_s : s \in \mathbf{b}))/\partial q = F(w_s : s \in \mathbf{b})$$

для любой непрерывной функции F на U_σ, где $w_s = w_{0,s} + qh_s$ для любого $s \in \mathbf{b}$, $(w_{0,s} : s \in \mathbf{b}) + \phi(h_s : s \in \mathbf{b}) \in U_\sigma$ для любого $\phi \in \mathbf{R}$ с $0 \leq \phi < q + \epsilon$, $0 < \epsilon < \infty$, $h_s \in \mathbf{R}$

для любого $s \in \mathbf{b}$. Пусть z_0 – это отмеченная точка в V. Существует $R > 0$, так что γ содержится во внутренности параллелепипеда $V := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s s;$ $|w_s - w_{0,s}| \le R$ для любого $s \in \mathbf{b}\}$.

Если V не содержится в U, то рассмотрим непрерывное продолжение функции F с $V \cap U_0$ на V, где U_0 – это замкнутое подмножество в U, так что $Int(U_0) \supset \gamma$ (о теореме о непрерывном продолжении см. [9]). Поэтому, предположим, что F дана на V. Тогда функция $F_1(w_s : s \in \mathbf{b}) := \int_{w_{0,1}}^{w_1} ... \int_{w_{0,t}}^{w_t} F(w_s : s \in \mathbf{b}) dw_1 ... dw_t$ принадлежит $C^1(V, \mathcal{A}_r)$ (с односторонними производными на ∂V изнутри V), где $t := i_{2^r-1}$. Рассмотрим фолиацию (foliation) V посредством $(2^r - 1)$-мерными C^0-многообразия Υ_z, так что $\Upsilon_z \cap \Upsilon_{z_1} = \emptyset$ для любого $z \ne z_1$, где $z, z_1 \in \gamma$, $\bigcup_{z\in\gamma} \Upsilon_z = V_1$, V_1 является каноническим замкнутым подмножеством в $\mathcal{A}_r$, так что $\gamma \subset V_1 \subset V$. Рассмотрим эту фолиацию, так чтобы получить разложение меры Лебега dV в произведение мер $d\nu(z)$ вдоль γ и $d\Upsilon_z$ для любого $z \in \gamma$. В силу теоремы Фубини существует $\int_V f(w_s : s \in \mathbf{b}) dV = \int_\gamma (\int_{\Upsilon_z} f(z) d\Upsilon_z) d\nu(z)$. Если γ является отрезком прямой, тогда $\int_\gamma f(z) dz$ принадлежит $L^1(\Upsilon, \mathcal{A}_r)$. Пусть $U_\mathbf{R}$ – это действительная область в $\mathbf{R}^{\mathbf{2^r}}$ соответствующая U в $\mathcal{A}_r$.

Рассмотрим пространство Соболева $W_2^q(U_\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathbf{2^r}})$ функций $h : U_\mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathbf{2^r}}$, для которых $D^\alpha h \in L^2(U_\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathbf{2^r}})$ для любого $|\alpha| \le q$, где $0 \le q \in \mathbf{Z}$. В силу теоремы 18.1.24 [14] (см. также обозначения там), если $A \in \Psi^m$ является псевдодифференциальным эллиптическим оператором порядка m с соответствующим носителем с главным символом $a \in S^m(T^*(X))/S^{m-1}(T^*(X))$ имеющим обратный в $S^{-m}(T^*(X))/S^{-m-1}(T^*(X))$, тогда можно найти $B \in \Psi^{-m}$ с соответствующим носителем, так что $BA - I \in \Psi^{-\infty}$, $AB - I \in \Psi^{-\infty}$. Тогда B называется параметриксой (parametrix) для A. В силу предложения 18.1.21 [14] каждое $A \in \Psi^m$ может быть записано в виде суммы $A = A_1 + A_0$, где $A_1 \in \Psi^m$ – это ядро A_0 с соответсвующим носителем и принадлежащее C^∞. В частности, мы можем взять псевдодифференциальный оператор с главным символом $a(x,\xi) = (b+|\xi|^2)^{s/2}$, где $b > 0$ – это постоянная и $s \in \mathbf{Z}$, что соответствует $b+\Delta$ для $s = 1$ с точностью до младших членов, где $\Delta = \nabla^2$ – это Лапласиан (см. также теорему 3.2.13 [10] о его семействе параметрикс). Для оценки решения может быть применена также теорема 3.3.2 и следствие 3.3.3 [10] относящееся к параболическим псевдодифференциальным уравнениям для нашего частного случая соответствующего $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).1 = f$ переписанного в действительных переменных.

В силу теоремы Соболева (см. [32, 33]) существует вложение пространства Соболева $W_2^{2^{r-1}+1}(V, \mathcal{A}_r)$ в $C^0(V, \mathcal{A}_r)$, так что

(2) $\|g\|_{C^0} \le C\|g\|_{W_2^{2^{r-1}+1}}$ для любого $g \in W_2^{2^{r-1}+1}$, где C – положительная постоянная независимая от g. Если $h \in W_2^{k+1}(V, \mathcal{A}_r)$, тогда $\partial h/\partial w_s \in W_2^k(V, \mathcal{A}_r)$ для любого $k \in \mathbf{N}$ и, в частности, для $k = 2^{r-1} + 1$ и любого $s \in \mathbf{b}$ (см. [32]). С другой стороны, $\|h\|_{L^2(V,\mathcal{A}_r)} \le \|h\|_{C^0(V,\mathcal{A}_r)}(2R)^{2^{r-1}}$ для любого $h \in L^2(V, \mathcal{A}_r)$. Поэтому,

(3) $\|A^{-k}h\|_{W_2^k(V,\mathcal{A}_r)} \le C\|h\|_{C^0(V,\mathcal{A}_r)}(2R)^{k+2^{r-1}}$ для любого $k \in \mathbf{N}$, где $C = const > 0$, A – это эллиптический псевдодифференциальный оператор, так что A^2 соответствует $(1 + \Delta)$. Для оценки снизу используется лемма Гронуолла (смотри, например, параграф 3.3.1 [3]), которая заключается в следующем. Пусть $\phi(t)$ и $\psi(t)$ – это ограниченные измеримые функции, а $\eta(t)$ – непрерывная неотрицательная функция, так что

$\phi(t) \le X + \psi(t) + \int_0^t \eta(\tau)\phi(\tau) d\tau$. Тогда

$\phi(t) \le X \exp[\int_0^t \eta(\tau) d\tau] + \psi(t) + \int_0^t \exp[\int_\tau^t \eta(v) dv] \psi(\tau)\eta(\tau) d\tau$.

Воспользуемся этой леммой для $\phi(t) := |\int_{z\in\{\gamma(v): a\le v\le t\}} (f(z) - q(z)) dz|$, $X := C_1\rho(f,q)V(\gamma)$, $\psi(t) = 0$, $\eta(t) = C'_2 R^{2^r+1}$, где $C_1 > 0$ и $C'_2 > 0$ являются подходящими постоянными независимыми от f, q и γ, так как $\|(\hat{f}-\hat{q})(z)\| \le \rho(f,q)+\|Im\circ(\hat{f}-\hat{q})(z)\|$ and $\|Im\circ(\hat{f}-\hat{q})(z)\| \le \|\hat{f}-\hat{q}(z)\|$ и $\hat{f}(z).1 = f$ для любого $z \in \gamma([a,b])$, $|(\hat{f}-\hat{q})(\gamma(x_{k+1})).(\gamma(x_{k+1})-\gamma(x_k))| \le \|(\hat{f}-\hat{q})(\gamma(x_{k+1}))\||\gamma(x_{k+1})-\gamma(x_k)|$ для любого разбиения P: $a = x_0 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_w = b$, где $Im(z) := (z - l(zl^*))/2$. Из уравнений 2.5.(1, 2) и неравенств $(1-3)$ следует, что существует $0 < \epsilon < \infty$, так что

$$(4) \quad |I(f-q,\gamma;P)| \le \rho(f,q)V(\gamma)C_1\exp(C_2R^{2^r+2})$$

для любого разбиения P нормы $|P|$ меньшей, чем ϵ, где C_1 и C_2 – положительные постоянные независимые от R, f и q. В силу формул 2.6.(1, 2) $\{\int_\gamma f^v(z)dz : v \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность Коши в $\mathcal{A}_r$, а последнее пространство полно как метрическое пространство. Поэтому, существует $\lim_v \lim_P I(f^v,\gamma;P) = \lim_v \int_\gamma f^v(z)dz$, который обозначается через $\int_\gamma f(z)dz$. Как и в §2.6 мы получим, что все решения g отличаются на кватернионные постоянные на каждой связной компоненте в U, следовательно, функционал $\int_\gamma$ определен единственным образом на $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$. Функционал $\int_\gamma : C^0_b(U,\mathcal{A}_r) \to \mathcal{A}_r$ непрерывен в силу формулы (4) и очевидно является $\mathbf{R}$-линейным, так как $\lambda z = z\lambda$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ и любого $z \in \mathcal{A}_r$, то есть, $\int_\gamma(\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))dz = \int_\gamma(f_1(z)\lambda_1 + f_2(z)\lambda_2)dz = \lambda_1\int_\gamma f_1(z)dz + \lambda_2\int_\gamma f_2(z)dz$ для любых λ_1 и $\lambda_2 \in \mathbf{R}$, f_1 и $f_2 \in C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$. Более того, он лево-$\mathcal{A}_r$-линеен, то есть, $\int_\gamma(\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))dz = \lambda_1\int_\gamma f_1(z)dz + \lambda_2\int_\gamma f_2(z)dz$ для любых λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$, f_1 и $f_2 \in C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$, так как $I(f,\gamma;P)$ является лево-$\mathcal{A}_r$-линейным. Если $g_k \in C^1(U,\mathcal{A}_r)$, тогда $g_k\lambda \in C^1(U,\mathcal{A}_r)$ для любого $\lambda \in \mathcal{A}_r$, а $(Dg_k(z)\lambda).h = (Dg_k(z).h)\lambda$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как $D\lambda = 0$, в частности, для g_k такого, что $(\partial g_k(z,\tilde{z})/\partial z).1 = f_k(z)$ и удовлетворяющего 2.5.1.(1) согласно лемме 2.5.1 на U, $k = 1, 2$, так как $g({}_1z, {}_2z)$ является ${}_1z$-супердифференцируемой. Поэтому, $\int_\gamma(f_1(z)\lambda_1 + f_2(z)\lambda_2)dz = (\int_\gamma f_1(z)dz)\lambda_1 + (\int_\gamma f_2(z)dz)\lambda_2$ для любых констант λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$, следовательно, $(\hat{f}_k(z).h)\lambda = (f_k(z)\lambda)\hat{}.h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Но это конечно не означает, что $(\int_\gamma f(z)dz)\lambda$ и $\lambda(\int_\gamma f(z)dz)$ равны.

2.8. Замечание. Пусть η – это дифференциальная форма на открытом подмножестве U Евклидова пространства $\mathbf{R^{2^rm}}$ со значениями в $\mathcal{A}_r$, тогда она может быть записана в виде

$$(1) \quad \eta = \sum_\Upsilon \eta_\Upsilon db^{\wedge\Upsilon},$$

где $b = ({}^1b, ..., {}^mb) \in \mathbf{R^{2^rm}}$, ${}^jb = ({}^jb_1, ..., {}^jb_{2^r})$, ${}^jb_k \in \mathbf{R}$, $\eta_\Upsilon = \eta_\Upsilon(b) : \mathbf{R^{2^rm}} \to \mathcal{A}_r$ являются s раз непрерывно дифференцируемыми $\mathcal{A}_r$-значными функциями с $s \in \mathbf{N}$, $\Upsilon = (\Upsilon(1), ..., \Upsilon(m))$, $\Upsilon(j) = (\Upsilon(j,1), ..., \Upsilon(j,2^r)) \in \mathbf{N^{2^r}}$ для любого j, $db^{\wedge\Upsilon} = d\,{}^1b^{\wedge\Upsilon(1)}\wedge...\wedge d\,{}^mb^{\wedge\Upsilon(m)}$, $d\,{}^jb^{\wedge\Upsilon(j)} = d\,{}^jb_1^{\Upsilon(j,1)}\wedge...\wedge d\,{}^jb_{2^r}^{\Upsilon(j,2^r)}$, где $d\,{}^jb_k^0 := 1$, $d\,{}^jb_k^1 = d\,{}^jb_k$, $d\,{}^jb_k^v = 0$ для любого $v > 1$. Если $s \ge 1$, тогда определён (внешний) дифференциал

$$d\eta = \sum_{\Upsilon,(j,k)} (\partial\eta_\Upsilon/\partial\,{}^jb_k)(-1)^{\alpha(j,k)}db^{\wedge(\Upsilon+e(j,k))},$$

где $e(j,k) = (0,...,0,1,0,...,0)$ с 1 на $2^r(j-1)+k$-м месте, $\alpha(j,k) = (\sum_{p=1}^{j-1}\sum_{v=1}^{2^r}\Upsilon(p,v)) + \sum_{v=1}^{k-1}\Upsilon(j,v)$. Теперь воспользуемся соотношениями

(2) ${}^jb_1 = ({}^jz + (2^r-2)^{-1}\{-{}^jz + \sum_{s\in\hat{b}} s({}^jzs^*)\})/2$ и

${}^jb_p = (i_p(2^r-2)^{-1}\{-{}^jz + \sum_{s\in\hat{b}} s({}^jzs^*)\} - {}^jzi_p)/2$ для любого $i_p \in \hat{b}$. Тогда η может быть выражена по переменным z. Рассмотрим базисные элементы $S = ({}^1S, ..., {}^mS)$ и их упорядоченное произведение $S^{\to\Upsilon} := (...({}^1S^{\to\Upsilon(1)}\,{}^2S^{\to\Upsilon(2)})...)\,{}^mS^{\to\Upsilon(m)}$, где ${}^jS =$

$({}^jS_1, ..., {}^jS_{2^r}) = (1, i_1, i_2, ..., i_{2^r-1})$, ${}^jS^{\to\Upsilon(j)} = (...(i_1^{\Upsilon(j,2)} i_2^{\Upsilon(j,3)})...) i_{2^p-1}^{\Upsilon(j,2^r)}$, $S^0 = 1$. Тогда уравнение (1) может быть записано в виде:

$$(3) \quad \eta = \sum_{\Upsilon} \xi_{\Upsilon} d(Sb)^{\wedge\Upsilon},$$

где $Sb = ({}^1S_1\, {}^1b_1, ..., {}^1S_{2^r}\, {}^1b_{2^r}, ..., {}^mS_1\, {}^mb_1, ..., {}^mS_{2^r}\, {}^mb_{2^r}) \in \mathcal{A}_r^{2^r m}$,
$d\, {}^jS_k\, {}^jb_k = {}^jS_k d\, {}^jb_k$,
$d(Sb)^{\wedge\Upsilon} := (...((d\, {}^1S\, {}^1b)^{\wedge\Upsilon(1)} \wedge (d\, {}^2S\, {}^2b)^{\wedge\Upsilon(2)}) \wedge ...) \wedge (d\, {}^mS\, {}^mb)^{\wedge\Upsilon(m)}$,
$(d\, {}^vS\, {}^vb)^{\wedge\Upsilon(v)} := (...((d\, {}^vS_1\, {}^vb_1)^{\Upsilon(v,1)} \wedge (d\, {}^vS_2\, {}^vb_2)^{\Upsilon(v,2)}) \wedge ...) \wedge (d\, {}^vS_{2^r}\, {}^vb_{2^r})^{\Upsilon(v,2^r)}$, $\xi_\Upsilon := \eta_\Upsilon (S^{\to\Upsilon})^*$. Относительно внешнего произведения $d\, {}^jb_1$ антикоммутируют с другими базисными дифференциальными 1-формами ${}^jS_k d\, {}^jb_k$; для $k = 2, ..., 2^r$ эти 1-формы коммутируют друг с другом относительно внешнего произведения. Это означает, что алгебра дифференциальных форм над алгеброй Кэли-Диксона градуирована относительно внешнего произведения.

Из уравнения (2) следует, что

(4) $db_1 = (dz + d(2^r-2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\})/2$,
$db_p = (di_p(2^r-2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\} - dzi_p)/2$ для любого $i_p \in \hat{b}$. Поэтому, правая часть уравнения (3) может быть переписана с $d\, {}^jzi_p$, $di_p((s\, {}^jz)s^*)$ с правой стороны, где $i_p \in \{1, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$, $s \in \hat{b}$. Здесь также можно воспользоваться $di_p\, {}^j\tilde{z}$ и $d((2^r-2)^{-1}\{-{}^j\tilde{z} + \sum_{s\in\hat{b}} s({}^j\tilde{z}s^*)\})i_p$ в зависимости от рассматриваемого представления либо z, либо $\tilde{z}$, либо $(z, \tilde{z})$ функций и дифференциальных форм. Эти 1-формы не являются ни коммутирующими, ни антикоммутирующими, так как они не являются чистыми элементами градуированной алгебры. Например,
$d\, {}^jz \wedge d\, {}^jz = 2\sum_{1\le v<k\le 2^r-1} i_v i_k d\, {}^jb_{v+1} \wedge d\, {}^jb_{k+1}$;
$(d\, {}^jz)^{\wedge p} = p! \sum_{1\le v(1)<...<v(p)\le 2^r-1} (...(i_{v(1)} i_{v(2)})...) i_{v(p)} d\, {}^jb_{v(1)+1} \wedge ... \wedge d\, {}^jb_{v(p)+1}$ для любого $3 \le p \le 2^r$. С другой стороны уравнение (1) может быть переписано с использованием тождеств (2). Это показывает, что оператор внешнего дифференцирования ${}_{\mathcal{A}_r}d$ для $\mathcal{A}_r$-значных дифференциальных форм над $\mathcal{A}_r$ и оператор внешнего дифференцирования на дифференциальных формах в их действительной реализации ${}_{\mathbf{R}}d$ совпадают и их общий оператор обозначается d. Рассмотрим равенство

$$(\partial\eta_\Upsilon/\partial\, {}^jb^l)\, {}^jb^l \wedge db^\Upsilon = [(\partial\eta_\Upsilon/\partial\, {}^jz).(\partial\, {}^jz/\partial\, {}^jb^l)]\, {}^jb^l \wedge db^\Upsilon$$

$$+[(\partial\eta_\Upsilon/\partial\, {}^j\tilde{z}).(\partial\, {}^j\tilde{z}/\partial\, {}^jb_l)]\, {}^jb^l \wedge db^\Upsilon.$$

Применяя его к $l = 1, ..., 2^r$ и суммируя левые и правые части этих равенств мы получим $d\eta(z, \tilde{z}) = ((\partial\eta/\partial z).d\, {}^jz) \wedge db^\Upsilon + ((\partial\eta/\partial\tilde{z}).d\, {}^j\tilde{z}) \wedge db^\Upsilon$, следовательно, внешнее дифференцирование может быть представлено в виде

$$(5) \quad d = \partial_z + \partial_{\tilde{z}},$$

где ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ являются внешними дифференцированиями по переменным z и $\tilde{z}$ соответственно.

Конечно, для внешнего произведения $\eta_1 \wedge \eta_2$ не существует (в общем случае) $\lambda \in \mathcal{A}_r$ такого, что $\lambda\eta_2 \wedge \eta_1 = \eta_1 \wedge \eta_2$, если η_1 и η_2 не являются чистыми элементами (четными или нечетными) градуированной алгебры дифференциальных форм над $\mathcal{A}_r$.

2.9. Определение. Хаусдорфово топологическое пространство X называется n-связным для $n \ge 0$, если каждое непрерывное отображение $f : S^k \to X$ из k-мерной действительной сферы в X имеет непрерывное продолжение на $\mathbf{R^{k+1}}$ для любого $k \le n$. 1-связное пространство также называется просто связным.

2.10. Замечание. В соответствиии с теоремой 1.6.7 [31] пространство X является n-связным тогда и только тогда, когда оно линейно связно и $\pi_k(X,x)$ тривиально для любой базисной точки $x \in X$ и любого k такого, что $1 \le k \le n$.

Обозначим через $Int(U)$ внутренность множества U в топологическом пространстве X, а через $cl(U) = \bar{U}$ замыкание U в X. Для подмножества U в $\mathcal{A}_r$, пусть $\pi_{s,p,t}(U) := \{u : z \in U, z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v,\ u = w_s s + w_p p\}$ для любого $s \neq p \in \mathbf{b}$, где $t := \sum_{v \in \mathbf{b} \setminus \{s,p\}} w_v v \in \mathcal{A}_{r,s,p} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v,\ w_s = w_p = 0,\ w_v \in \mathbf{R}\ \forall v \in \mathbf{b}\}$. То есть, геометрически $\pi_{s,p,t}(U)$ – это проекция на комплексную плоскость $\mathbf{C}_{s,p}$ пересечения U с плоскостью $\tilde{\pi}_{s,p,t} \ni t$, $\mathbf{C}_{s,p} := \{as + bp : a, b \in \mathbf{R}\}$, так как $sp^* \in \hat{b}$.

2.11. Теорема. *Пусть U – это область в $\mathcal{A}_r$, $r \ge 3$, так что $\emptyset \neq Int(U) \subset U \subset cl(Int(U))$ и U является $(2^r - 1)$-связной; $\pi_{s,p,t}(U)$ является просто связной в $\mathbf{C}$ для любого $k = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$, $s := i_{2k}$, $p := i_{2k+1}$, $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$ для которого существует $z = u + t \in U$ (см. §2.10). Предположим, что $f \in C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$ и f супердифференцируема по $z \in U$ и f имеет непрерывное продолжение на открытую область W, так что $W \supset U$. Тогда для любого спрямляемого замкнутого пути (то есть, петли) γ в U интеграл вдоль пути над алгеброй Кэли-Диксона равен нулю, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Доказательство. В силу Предложение 2.3 f является z-представленной и $\partial_{\tilde{z}} f = 0$ на U. Поэтому, $\xi({}_1z, {}_2z)$ независимо от ${}_2z$, где ξ является соответствующей f функцией из §2.5, следовательно, $g({}_1z, {}_2z)$ также независима от ${}_2z$ и мы можем записать коротко $g(z)$. Для пути γ существует компактное каноническое замкнутое подмножество в $\mathcal{A}_r$: $W \subset Int(U)$, так что $\gamma([0,1]) \subset W$, так как γ спрямляем и $\mathcal{A}_r$ локально компактна. В силу теоремы 2.7 для любой последовательности функций $f_n \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$ сходящейся к f в $C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$, так что $f_n(z) = (\partial g_n(z)/\partial z).1$ с $g_n(z) \in C^2(U, \mathcal{A}_r)$ и удовлетворяющей условиям §2.5, так как ξ независимо от ${}_2z$, а каждая последовательность путей $\gamma_n : [0,1] \to U$ C^3-непрерывно дифференцируема и сходится к γ относительно полной вариации $V(\gamma - \gamma_n)$, то существует $\lim_n \int_{\gamma_n} f_n(z, \tilde{z})dz = \int_\gamma f(z)dz$. Поэтому, достаточно рассмотреть случай $f \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, так что $f(z) = (\partial g(z)/\partial z).1$ on U, and continuously differentiable γ, где $g \in C^2(U, \mathcal{A}_r)$ удовлетворяет условиям §2.5. Обозначим интеграл $\int_\gamma f(z)dz$ by Q. Можно записать этот интеграл в виде $Q = \int_0^1 (\partial g(z)/\partial z).\gamma'(t)dt$. Запишем f в виде:

$f = \sum_{s \in \mathbf{b}} f_s s = \sum_{\beta=0}^{2^{r-1}-1} f_{2\beta, 2\beta+1}$, где $f_{\beta,\nu} := f_{i_\beta} i_\beta + f_{i_\nu} i_\nu$, $f_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Поэтому,

$d\gamma(t) = \gamma'(t)dt = \sum_{j=0}^{2^{r-1}-1} {\gamma'}_{2j,2j+1}(t)dt$. Условие $\gamma(0) = \gamma(1)$ эквивалентно $\gamma_{2j,2j+1}(0) = \gamma_{2j,2j+1}(1)$ для любого $j = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$. Мы имеем $\gamma_{\beta,\nu} \subset \pi_{\beta,\nu,t}(U)$ для любого $\beta \neq \nu \in \mathbf{b}$. Умножение в $\mathcal{A}_r$ дистрибутивно, следовательно,

$(\partial g(z)/\partial z).(d\gamma(t)) = \sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} (\partial g(z)/\partial z).(d\gamma_{2k,2k+1}(t))$.

В силу теоремы Гуревича об изоморфизме (см. §7.5.4 [31]) $H_q(U,x) = 0$ для любого $x \in U$ и любого $q < 2^r$, следовательно, $H^l(U,x) = 0$ для любого $l \ge 1$.

Если $f : Y \to V$ непрерывно, то $r \circ f : Y \to \Omega$ непрерывно, если f отображает на V, тогда $r \circ f$ отображает на Ω, где $r : V \to \Omega$ – это ретракция, V, Y и Ω – это топологические пространства. Топологическое пространство U метризуемо, следовательно, для любого замкнутого подмножества Ω in U существует каноническое замкнутое подмножество $V \subset U$, так что $V \supset \Omega$ и Ω является ретракцией V, то есть, существует непрерывное отображение $r : V \to \Omega$, $r(z) = z$ для любого $z \in \Omega$ (см. [9] и теорему 7.1 [16]). Поэтому, если V является $(2^r - 1)$-связным каноническим замкнутым подмножеством в U и Ω является двумерным C^0-многообразием, так что Ω является ретракцией V, тогда Ω просто связна, так как каждое непрерывное отображение $f : S^k \to \Omega$ с $k \le 1$ имеет непрерывное продолжение $f : \mathbf{R^{k+1}} \to V$ и $r \circ f : \mathbf{R^{k+1}} \to \Omega$ является также непрерывным продолжением f с S^k на $\mathbf{R^{k+1}}$.

Из (2^r-1)-связности U следует, что существует двумерное действительное дифференцируемое многообразие Ω содержащееся в U, так что $\partial\Omega = \gamma$. Это можно вывести из рассмотрения разбиений Z_n множества U посредством $S^n_{l,k} \cap U$ и беря $n \to \infty$, где $S^n_{l,k}$ – это параллелепипеды в $\mathcal{A}_r$ с ребрами длины n^{-1}, l, k и $n \in \mathbf{N}$, двумерные грани ${}_1S^n_l$ и 2^{r-1}-мерные грани ${}_2S^n_k$ для $S^n_{l,k} = {}_1S^n_l \times {}_2S^n_k$ параллельны $\mathbf{C}_{s,p}$ или $\mathcal{A}_{r,s,p}$ с $s = i_{2k}$ и $p = i_{2k+1}$ соответственно, так что существует последовательность путей γ_n сходящаяся к γ относительно $|*|_{\mathcal{A}_r}$ и последовательность (непрерывных) двумерных C^0-многообразий Ω^n с $\partial\Omega^n = \gamma^n$, $\Omega^n \subset \bigcup_{l,k}[(\partial\ {}_1S^n_l) \times (\partial\ {}_2S^n_k)]$. Выберем Ω ориентируемыми и класса C^3 как Римановы многообразия, так что взятие их проекции на $\mathbf{C}_{s,p}$ дает соответствующие пути $\gamma_{2k,2k+1}$ и области $\Omega_{s,p}$ в $\mathbf{C}_{s,p}$ удовлетворяющие условиям отмеченным выше в данном доказательстве.

К появляющимся интегралам можно применить классическую (обобщенную) теорему Стокса (см. теорему V.1.1 [36]):

$\int_{\Omega_{2k,2k+1}} \eta(v) = \int_0^1 (\partial g(z)/\partial z).\gamma'_{2k,2k+1}(t)dt$,

где $\Omega_{2k,2k+1}$ – это просто связная область в $\mathbf{C}_{i_{2k},i_{2k+1}}$, так что $\partial\Omega_{2k,2k+1} = \gamma_{2k,2k+1}$ для любого k, $\eta(v) = d[(\partial g(z)/\partial z).dv]$, $v = z_{2k,2k+1} \in \Omega_{2k,2k+1} \subset \mathbf{C}_{i_{2k},i_{2k+1}}$. Функция g принадлежит $C^2(U, \mathcal{A}_r)$, следовательно, $(D^2g(z)).(h_1, h_2) := (D^2g(z)).(h_2, h_1)$ для любых h_1 и h_2 в $\mathcal{A}_r$. Поэтому, в силу условий §2.5 наложенных на g выполняются равенства

$\int_{\Omega_{2k,2k+1}} \eta(v) = \int_{\Omega_{2k,2k+1}} d[(\partial g(z)/\partial z).dv] = \int_{\Omega_{2k,2k+1}} d^2q(z_{2k,2k+1}) = 0$

для любого $k = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$, так как

$(\partial g(z)/\partial z).\gamma'_{2k,2k+1} = (\partial g(z)/\partial z).(s(\gamma'_{2k} + \gamma'_{2k+1}s^*p))$, так что

$(\partial g(z)/\partial z).\gamma'_{2k,2k+1} = (\partial g(z)/\partial w_s).\gamma'_{2k} + (\partial g(z)/\partial w_p).\gamma'_{2k+1}$

$= (\partial g(z)/\partial z_{2k,2k+1}).(\gamma'_{2k} + \gamma'_{2k+1}s^*p)$,

$\partial y(z)/\partial w_s = (\partial y(z)/\partial z_{2k,2k+1} + \partial y(z)/\partial \bar{z}_{2k,2k+1}).1$ and

$\partial y(z)/\partial w_p = (\partial y(z)/\partial z_{2k,2k+1} - \partial y(z)/\partial \bar{z}_{2k,2k+1}).(s^*p)$ для любой z-супердифференцируемой функции y на U и $\partial g(z)/\partial \bar{z}_{2k,2k+1} = 0$, где q соответствует $g|_{\Omega_{2k,2k+1}}$, $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$.

2.12. Определения. Непрерывная функция на открытой области U в $\mathcal{A}_r$ такой, что $\emptyset \ne U$ и $\int_\gamma f dz = 0$ для любой спрямляемой петли (то есть, замкнутого пути) γ в U, тогда f называется $\mathcal{A}_r$-интегрально голоморфной на U (см. §2.5).

Если f является z-супердифференцируемой функцией на U, тогда она называется $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U.

2.13. Следствие. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на открытой (2^r-1)-связной области U в $\mathcal{A}_r$, так что $\pi_{s,p,t}(U)$ просто связна в $\mathbf{C}_{s,p}$ для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, $s := i_{2k}$, $p := i_{2k+1}$ для которых существует $z = t + u \in U$, тогда f является $\mathcal{A}_r$-интегрально голоморфной.*

Это немедленно следует из теоремы 2.11.

2.14. Определение. Пусть U – это подмножество в $\mathcal{A}_r$, и $\gamma_0 : [0,1] \to \mathcal{A}_r$, и $\gamma_1 : [0,1] \to \mathcal{A}_r$ – два непрерывных пути. Тогда γ_0 и γ_1 называются гомотопными относительно U, если существует непрерывное отображение $\gamma : [0,1]^2 \to U$ такое, что $\gamma([0,1],[0,1]) \subset U$, и $\gamma(t,0) = \gamma_0(t)$, и $\gamma(t,1) = \gamma_1(t)$ для любого $t \in [0,1]$.

2.15. Теорема. *Пусть W – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$, $r \ge 3$, и f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на W со значениями в $\mathcal{A}_r$. Предположим, что* *существуют два спрямляемых пути γ_0 и γ_1 в W с общими начальной и конечной точками ($\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ и $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$) гомотопные относительно U, где U является $(2^r - 1)$-связным подмножеством в W, так что $\pi_{s,p,t}(U)$ просто связно в $\mathbf{C}$ для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$, для которых существует $z = u + t \in U$. Тогда $\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$.*

Доказательство. Гомотопия γ_0 с γ_1 относительно U влечет гомотопию $(\gamma_0)_{2j,2j+1}$ с $(\gamma_1)_{2j,2j+1}$ относительно $\pi_{2j,2j+1,t}(U)$ в $\mathbf{C}_{s,p}$ с $s = i_{2j}$ и $p = i_{2j+1}$ для любого $j = 0, 1, 2^{r-1} - 1$, для любого $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которого существует $z = t + u \in U$. Рассмотрим путь ζ такой, что $\zeta(t) = \gamma_0(2t)$ для любого $0 \le t \le 1/2$ и $\zeta(t) = \gamma_1(2 - 2t)$ для любого $1/2 \le t \le 1$. Тогда ζ является замкнутым путем содержащимся в U. В силу теоремы 2.11 $\int_\zeta f(z)dz = 0$. С другой стороны, $\int_\zeta f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz$, следовательно, $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.

2.15.1. Следствие. *Пусть $f \in C^1$ удовлетворяет условиям теоремы 2.15. Тогда для любого $z \in U$ существует $(\partial(\int_\gamma f(\zeta)d\zeta)/\partial z).h = \hat{f}(z).h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, где $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$, z_0 – это отмеченная точка в U.*

2.16. Теорема. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической функцией на открытой области U в $\mathcal{A}_r^n$, тогда f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U.*

Доказательство. Из определения супердифференциала мы получим $(Dz^n).h = \sum_{k=0}^{n-1} z^k h z^{n-k-1}$. Используя формулу супердифференциала для произведения функций, из §2.7 мы получим, что каждая f вида $(2.5.i, ii)$ супердифференцируема (по z), когда $n_0 \ge 0$ в $(2.5.ii)$. Используя сходимость по норме $\|*\|_\omega$ степенного ряда по z для данной $f \in C^\omega(U, \mathcal{A}_r)$, мы получим для любого $a \in U$, что существует её окрестность W, где f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной, следовательно, f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U.

2.17. Замечание. В следующем параграфе показано, что октонион-голоморфная функция бесконечно дифференцируема; более того, при подходящих условиях там доказана эквивалентность между свойствами октонионной голоморфности, октонионной интегральной голоморфности и октонионной локальной z-аналитичности. Интеграл (2.5.4) может быть обобщен для непрерывной функции $q : U \to \mathcal{A}_r$, так что $V(q \circ \gamma) < \infty$. Заменяя Δz_k на $q(z_{k+1}) - q(z_k) =: \Delta q_k$ в формуле (2.5.5), мы получим

$$(1) \quad \int_\gamma f(z, \tilde{z}) dq(z) := \lim_P I(f, q \circ \gamma; P), \text{ где}$$

$$(2) \quad I(f, q \circ \gamma; P) = \sum_{k=0}^{q-1} \hat{f}(z_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}).(\Delta q_k).$$

В частности, если $\gamma \in C^1$ и q является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U, а также $f(z, \tilde{z}) = (\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1$, где $g \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, тогда

$$\int_\gamma f(z, \tilde{z}) dq(z) = \int_0^1 (\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).((\partial_z q(z)|_{z=\gamma(s)}).\gamma'(s))ds$$

и $V(\gamma) \le \int_0^1 |\gamma'(s)| ds$.

Пусть $f : U \to \mathcal{A}_r$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на U, где U – это открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$. Если существует $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция $g : U \to \mathcal{A}_r$ такая, что $g'(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$, то g называется примитивной функцией для f.

2.18. Предложение. *Пусть U – это открытое связное подмножество $\mathcal{A}_m^n$, $m \geq 3$, а g – это примитивная функция для f на U, тогда множество примитивных функций для f таково: $\{h : h = g + C, C = const \in \mathcal{A}_m\}$.*

Доказательство. В силу леммы 2.5.1 для любых двух примитивных g_1 и g_2 для f и для любого $z \in U$ существует шар $B \subset U$, $z \in U$, так что $(g_1 - g_2)|_U = const \in \mathcal{A}_m$ (см. §2.7). Предположим, что $h'(z) = 0$ для любого $z \in U$, тогда рассмотрим $q(s) := h((1-s)a + sz)$ для любого $s \in [0, r]$, где a – это отмеченная точка в U и $B(a, r, \mathcal{A}_m)$ – это шар, содержащийся в U, $r > 0$, $z \in B(a, r, \mathcal{A}_m)$. Тогда q корректно определена на $q(0) = q(1)$. Поэтому, множество $V := \{z \in U : h(z) = h(a)\}$ открыто в U, так как с каждой точкой a она содержит окрестность. С другой стороны, она замкнута в силу непрерывности h, следовательно, $V = U$, так как U связна, следовательно, $h = const$ на U.

3. Мероморфные функции и их вычеты.

Сначала мы определим и опишем экспоненциальную и логарифмическую функции октонионных переменных и тогда применим их к исследованию октонионных вычетов. Более того, эти изучения выполнены также для переменных из алгебр Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ для любого $r \geq 4$.

3.1. Замечание и определение. Для переменной $z \in \mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$ положим

$$(3.1.) \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!.$$

В силу замечания 2.1 z^n и, следовательно, $\exp(z)$ корректно определены, так как действительные числа коммутируют с каждым элементом из $\mathcal{A}_r$, $n! \in \mathbf{N} \subset \mathbf{R}$. Если $|z| \leq R < \infty$, то ряд (3.1) сходится, так как $|exp(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z^n/n!| \leq \exp(R) < \infty$. Поэтому, $\exp : \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r$. Ограничение exp на каждое подмножество $\mathbf{Q}_s := \{z : z \in \mathcal{A}_r, z = a + bs,\ a, b \in \mathbf{R}\}$ коммутативно, где $s \in \hat{b}$, $\hat{b}_r := \mathbf{b}_r \setminus \{1\}$, $\mathbf{b} := \mathbf{b}_r$, $\hat{b} := \hat{b}_r$, но в общем два элемента z_1 и $z_2 \in \mathcal{A}_r$ не коммутируют и функция $\exp(z_1 + z_2)$ на $\mathcal{A}_r^2$ не совпадает с $\exp(z_1)\exp(z_2)$.

3.2. Предложение. *Пусть $z \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, записано в виде $z = v + M$, где $v \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{I}_r$, $\mathcal{I}_r := \{\eta \in \mathcal{A}_r : Re(\eta) = 0\}$, тогда*

$$(3.2) \quad \exp(z) = \exp(v)\exp(M), \text{ где}$$

$$(3.3) \quad \exp(M) = (\cos|M|) + [(\sin|M|)/|M|]M$$

для $M \neq 0$ и $\exp(0) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим $M \in \mathcal{I}_r$ и запишем его в виде $M = a + bl$, где $l = i_{2^{r-1}}$ – это элемент, возникающий в результате процедуры удвоения $\mathcal{A}_r$ из $\mathcal{A}_{r-1}$, $a, b \in \mathcal{A}_{r-1}$, $Re(a) = 0$. Тогда
$M^2 = a^2 + a(bl) + a^*(bl) - (bl)(bl)^* = -(|a|^2 + |b|^2)$,
так как $a^* = -a$, $(bl)(bl)^* = (bl)^*(bl) = (lb^*)(bl^{-1}) = b^*b = bb^*$, следовательно,
$M^{2n} = (-|M|^2)^n$, $M^{2n+1} = (-|M|^2)^n M$ для любого $1 \leq n \in \mathbf{Z}$. Поэтому,

$$\exp(M) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-|M|^2)^n/(2n)! + \sum_{n=0}^{\infty}(-|M|^2)^n M/(2n+1)!$$

$$= (\cos|M|) + [(\sin|M|)/|M|]M$$

для любого $M \neq 0$, $\exp(0) = 1$. Поскольку $\lim_{0 \neq \phi \to 0} \sin(\phi)/\phi = 1$, где $\phi \in \mathbf{R}$, то предел взятый в формуле (3.3) при $|M| \neq 0$ стремящемся к 0 дает частный случай $\exp(0) = 1$. Поскольку $v \in \mathbf{R}$ коммутирует с M, $[v, M] = 0$, то $\exp(v + M) = \exp(v)\exp(M)$.

3.3. Следствие. *Если $z \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, записано в виде $z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s$ с действительными w_s для любого $s \in \mathbf{b}$, то $|\exp(z)| = \exp(v)$.*

Доказательство. Если $\sum_{s \neq 1} w_s^2 = 0$, то это очевидно. Предположим, что $\sum_{s \neq 1} w_s^2 \neq 0$. В силу формул (3.2, 3.3)

$$(3.4) \quad exp(z) = exp(v)A, \text{ где } A = \cos|M| + [(\sin|M|)/|M|]M$$

так как $A \in \mathcal{A}_r$, тогда $A^* = \cos|M| - [(\sin|M|)/|M|]M$, $M^* = -M$ и неизбежно $|\exp(z)| = \exp(v)$.

3.4. Следствие. *Функция $\exp(z)$ на множестве $\mathcal{I}_r := \{z : z \in \mathcal{A}_r, Re(z) = 0\}$ периодична с $(2^r - 1)$ генераторами периодов $s \in \hat{b}_r$, так что $\exp(z(1 + 2\pi n/|z|)) = \exp(z)$ для любого $0 \neq z \in \mathcal{I}_r$ и любого целого числа n. Если $z \in \mathcal{A}_r$ записано в виде $z = 2\pi s M$, где $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, то $\exp(z) = 1$ тогда и только тогда, когда $s \in \mathbf{Z}$.*

Доказательство. В силу формул (3.2, 3.3) $\exp(sM) = 1$ для данного $z = sM \in \mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$ тогда и только тогда, когда $\cos(s|M|) = 1$ и $\sin(s|M|) = 0$, что эквивалентно $s \in \{2\pi n : n \in \mathbf{Z}\}$, так как $|M| = 1$ согласно гипотезе этого следствие. Частные случаи формулы (3.3) таковы: $w_{s_0} \neq 0$ и $w_s = 0$ для любого $s \neq s_0$ из $\hat{b} := \hat{b}_r$, следовательно, $s \in \hat{b}$ являются $(2^r - 1)$ генераторами для периодов exp.

3.5. Следствие. *Функция* exp *– это эпиморфизм с $\mathcal{I}_r$ на $(2^r - 1)$-мерную единичную сферу $S^{2^r - 1}(0, 1, \mathcal{A}_r) := \{z : z \in \mathcal{A}_r, |z| = 1\}$.*

Доказательство. В силу следствия 3.3 образ $\exp(\mathcal{I}_r)$ содержится в $S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$. Сферы $S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$ характеризуются условием $\sum_{s \in \mathbf{b}} w_s^2 = 1$ или $w_1^2 + |M_1|^2 = 1$, где $M_1 \in \mathcal{I}_r$. Для доказательства $\exp(\mathcal{I}_r) = S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$ достаточно найти $z = v + M$, где $v \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{I}_r$, так что $w_1 = \cos|M|$, $M_1 = [(\sin|M|)/|M|]M$. Для этого возьмем $|M| = \arccos w_1 \in [0, \pi]$, так как $w_1 \in [-1, 1]$, а при $|w_1| \neq 1$ положим $M = M_1(1 - w_1^2)^{-1/2} \arccos w_1$. В частности, для $w_1 = 1$ возьмем $M = 0$; для $w_1 = -1$ возьмем $M = \pi q$, где $q \in \hat{b}$.

3.6. Следствие. *Каждый элемент алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, имеет полярное разложение*

$$(3.5) \quad z = \rho \exp(2\pi(\sum_{s \in \hat{b}} \phi_s s)),$$

где $\phi_s \in [-1, 1]$ для любого $s \in \hat{b}$, $\sum_{s \in \hat{b}} \phi_s^2 = 1$, $\rho := |z|$.

Доказательство. Это следует из формул (3.2, 3.3) и следствия 3.5.

3.6.1. Определение. Пусть $\mathcal{A}_\infty$ обозначает семейство состоящее из всех элементов $z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s$ таких, что $\tilde{z} := w_1 - \sum_{s \in \hat{b}} w_s s$, $z\tilde{z} =: |z|^2 = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s^2 < \infty$, где $\mathbf{b} := \mathbf{b}_\infty := \bigcup_{r=2}^{\infty} \mathbf{b}_r = \{1, i_1, i_2, ..., i_{2^r}, ...\}$, $\hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$, $w_s \in \mathbf{R}$ для любого s.

3.6.2. Теорема. *Семейство $\mathcal{A}_\infty$ имеет структуру нормированной ассоциативной со степенями лево и право дистрибутивной алгебры над $\mathbf{R}$ с внешней инволюцией порядка два.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}_\infty := \{z \in \mathcal{A}_\infty : Re(z) = 0\}$. Тогда каждое $M \in \mathcal{I}_\infty$ является пределом последовательности $M_r \in \mathcal{I}_r$, также $|z| =: \rho$ – это предел последовательности $\rho_r := |z_r|$, где $z_r \in \mathcal{A}_r$. Поэтому, $z = \lim_{r \to \infty} z_r = \lim_{r \to \infty} \rho_r \{\cos|M_r| + [(\sin|M_r|)/|M_r|]M_r\} = \rho\{\cos|M| + [(\sin|M|)/|M|]M\} = \rho \exp(M)$. Использование полярных координат (ρ, M) доказывает ассоциативность со степенями. В самом деле, существует естественная проекция P_r из $\mathcal{A}_\infty$ на $\mathcal{A}_r$ для любого $r \geq 2$ даваемая формулами: $M_r := \{\sum_{s\in\hat{b}_r} m_s s\}|M|[\sum_{s\in\hat{b}_r} m_s^2]^{-1/2}$ для $\sum_{s\in\hat{b}_r} m_s^2 \neq 0$ и $M_r = 0$ в противном случае для любого $M = \sum_{s\in\hat{b}} m_s s \in \mathcal{I}_\infty$, где $m_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \hat{b}$; тогда $z_r := P_r(z) = \rho_r\{\cos|M_r| + [(\sin|M_r|)/|M_r|]M_r\}$, где $\rho_r = (\sum_{s\in\mathbf{b}_r} w_s^2)^{1/2}$, $z = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s s$, $\lim_{0\neq\phi\to 0}\sin(\phi)/\phi = 1$. Итак, $\lim_{r\to\infty} z_r = z$ относительно нормы $|z|$ в $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому, для любого $n \in \mathbf{Z}$ существует $\lim_{r\to\infty}(\rho_r)^n\exp(nM_r) = \rho^n\exp(nM) = z^n$, следовательно, $\mathcal{A}_\infty$ ассоциативна со степенями, так как каждая $\mathcal{A}_r$ ассоциативна со степенями, а cos и sin – это непрерывные функции. Очевидно, $\mathcal{A}_\infty$ является $\mathbf{R}$-линейным пространством. Непрерывность умножения относительно нормы $|z|$ следует из неравенств $|\xi_r\eta_r - \psi_r\zeta_r| \leq |\xi_r\eta_r - \xi_r\zeta_r| + |\xi_r\zeta_r - \psi_r\zeta_r| \leq |\xi||\eta-\zeta| + |\xi-\psi||\zeta|$ и взятия предела при r стремящемся к бесконечности, так как $|\xi_r| \leq |\xi|$ и $|\xi_r\eta_r| \leq |\xi_r||\eta_r|$ для любого $\xi_r, \eta_r \in \mathcal{A}_r$ и для любого $r \in \mathbf{N}$. Левая и правая дистрибутивность $(\xi+\psi)\zeta = \xi\zeta + \psi\zeta$ и $\zeta(\xi+\psi) = \zeta\xi + \zeta\psi$ следует в результате взятия предела при r стремящемся к бесконечности и такой дистрибутивности в каждой $\mathcal{A}_r$. Инволюция $z \mapsto \tilde{z} =: z^*$ в $\mathcal{A}_r$ имеет порядок два, так как $(z^*)^* = z$. Она является внешней, так как не существует никакого конечного алгебраического соотношения с постоянными в $\mathcal{A}_\infty$ преобразующим переменную $z \in \mathcal{A}_\infty$ в z^*. Соотношение $z^* = \lim_{r\to\infty}(2^r-2)^{-1}\{-z_r + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(z_r s^*)\}$ $= \lim_{r\to\infty}(2^r-2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(zs^*)\}$ имеет бесконечный порядок. Соотношения типа $z_r^* = l_{r+1}(z_r l_{r+1}^*)$ в $\mathcal{A}_r$ используют внешний автоморфизм с $l_{r+1} := i_{2^r} \in \mathcal{A}_{r+1} \setminus \mathcal{A}_r$, более того, последнее соотношение не выполняется для z^* и $z \in \mathcal{A}_\infty$ вместо $z_r \in \mathcal{A}_r$.

Никакое конечное множество ненулевых постоянных $a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}_\infty$ не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ в $\mathcal{A}_\infty$. Для доказательства этого рассмотрим $\mathbf{R}$-подалгебру $\Upsilon_{M_1,...,M_n}$ в $\mathcal{A}_\infty$ порожденную $\{M_1, ..., M_n\}$, где $a_j = |a_j|e^{M_j}$, $M_j \in \mathcal{I}_\infty$. Поскольку $a_1 a_1^* = |a_1|^2 > 0$, то $\mathbf{R}|a_1|^2 = \mathbf{R} \subset \Upsilon_{M_1,...,M_n}$, следовательно, $1 \in \Upsilon_{M_1,...,M_n}$. Если $\Upsilon_{M_1,...,M_n} = \mathbf{R}$, тогда это конечно не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ в $\mathcal{A}_\infty$. Рассмотрим $\Upsilon_{M_1,...,M_n} \neq \mathbf{R}$, без ограничения общности предположим, что $a_1 \notin \mathbf{R}$. Имеется скалярное произведение $Re(z\tilde{y})$ в $\mathcal{A}_\infty$ для любых $z, y \in \mathcal{A}_\infty$. Пусть b_1 – это проекция a_1 на подпространство в $\mathcal{A}_\infty$ ортогональное $\mathbf{R}1$, тогда по нашему предположению $b_1 \neq 0$ и $b_1 \in \mathcal{I}_\infty$. Поэтому, $b_1^2/|b_1|^2 = -1$, следовательно, Υ_{M_1} изоморфно $\mathbf{C}$. Конечно, никакая $\mathcal{A}_r$, $r \in \mathbf{N}$, не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ или $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому, без ограничения общности предположим, что $\Upsilon_{M_1,...,M_n}$ не изоморфно $\mathbf{C}$ и $a_2 \notin \mathbf{C}$. Если $M, N \in \mathcal{I}_r$ и $Re(MN^*) = 0$, тогда $MN \in \mathcal{I}_r$ и, следовательно, $(MN)^* = NM = -MN$, так как $A^* = -A$ для любого $A \in \mathcal{I}_r$. Пусть b_2 – это проекция M_2 в подпостранство в $\mathcal{A}_\infty$ ортогональное Υ_{M_1} относительно скалярного произведения $Re(z\tilde{y})$. Тогда $b_2 \neq 0$ по нашему предположению и $b_2 \in \mathcal{I}_\infty$, $b_2^2/|b_2|^2 = -1$, следовательно, после процедуры удвоения с $b_2/|b_2|$ мы получим, что Υ_{M_1,M_2} – это подалгебра в $\mathcal{A}_4$. Тогда продолжим по индукции, предположим, что $\Upsilon_{M_1,...,M_k}$ – это подалгебра в $\mathcal{A}_{2^k}$, $k \in \mathbf{N}$, $k < n$. Поскольку $\mathcal{A}_{2^k}$ не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ в $\mathcal{A}_\infty$, то предположим без ограничения общности, что $a_{k+1} \notin \Upsilon_{M_1,...,M_k}$ и рассмотрим ортогональную проекцию b_{k+1} вектора M_{k+1} в подпространство $\mathcal{A}_\infty$ ортогональное $\Upsilon_{M_1,...,M_k}$ относительно скалярного произведения $Re(z\tilde{y})$. Тогда $b_{k+1} \neq 0$ и $b_{k+1} \in \mathcal{I}_\infty$, $b_{k+1}^2/|b_{k+1}|^2 = -1$. Итак, процедура удвоения с $b_{k+1}/|b_{k+1}|$ дает алгебру $\Upsilon_{M_1,...,M_{k+1}}$, которая является подалгеброй в $\mathcal{A}_{2^{k+1}}$, и т.д. В результате $\Upsilon_{M_1,...,M_n}$ – это подалгебра в $\mathcal{A}_{2^n}$ и она не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ алгебры $\mathcal{A}_\infty$, где $a_1, ..., a_n \in \Upsilon_{M_1,...,M_n}$ в силу формулы полярного разложения (см. (3.2,3)) чисел Кэли-Диксона.

3.6.3. Замечание и определение. Пусть Λ обозначает хаусдорфово топологическое пространство с неотрицательной мерой μ на σ-алгебре борелевских подмножеств, так что для любой точки $x \in \Lambda$ существует открытая окрестность $U \ni x$ с $0 < \mu(U) < \infty$. Рассмотрим множество генераторов вещественной алгебры $\{i_x : x \in \Lambda\}$ такое, что $i_x i_y = -i_y i_x$ для любых $x \neq y \in \Lambda \setminus \{0\}$ и $i_x^2 = -1$ для любого $x \in \Lambda \setminus \{0\}$. К этому множеству присоединим единицу $1 =: i_0$ так, что $a i_x = i_x a$ для любых $a \in \mathbf{R}$ и $x \in \Lambda$. В случае конечного множества Λ алгебра Кэли-Диксона порожденная такими генераторами изоморфна $\mathcal{A}_{N-1}$, где $N = card(\Lambda)$ – мощность множества Λ. Для любого бесконечного счетного подмножества генераторов $\{i_0, i_{x_j} : j \in \mathbf{N}, x_j \in \Lambda\}$ конструкция выше из §3.6.1 дает алгебру изоморфную $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому рассмотрим случай $card(\Lambda) > \aleph_0$. Будем считать, что Λ линейно упорядочена и это линейное упорядочение дает интервалы $(a,b) := \{x \in \Lambda : a < x < b\}$ являющиеся μ-измеримыми, например, $\Lambda = \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^m$ имеет естественное линейное упорядочение индуцированное линейным упорядочением из $\mathbf{R}$ и лексикографическим упорядочением в произведении, где $n, m \in \mathbf{N}$.

Тогда рассмотрим конечное разбиение Λ в дизъюнктное объединение $\Lambda = \bigcup_{j=1}^p \Lambda_j$, где $x < y$ для любых $x \in \Lambda_j$ и $y \in \Lambda_l$ при $j < l \leq p$, $p \in \mathbf{N}$. Семейство таких разбиений обозначим $\mathcal{Z}$. Пусть $T \in \mathcal{Z}$, $x_j \in A_j$ – отмеченные точки. Тогда существует простая функция f_T такая, что $f_T(x) = C_j i_{x_j}$ для любого $x \in A_j$, где $C_j \in \mathbf{R}$. Рассмотрим норму $\|f_T\|_\Lambda^2 := \int_\Lambda f_T(x)\tilde{f}_T(x)\mu(dx)$, где $\tilde{f}_T(x) := C_0\chi_{A_0}(x)\delta_{0,x_0} - \sum_{x_j \neq 0} C_j \chi_{A_j}(x) i_{x_j}$, $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$, $\delta_{x,y} = 1$ при $x = y$, $\delta_{x,y} = 0$ при $x \neq y$. Каждой f_T сопоставим элемент $z_{f_T} := \sum_j C_j i_{x_j}\mu(A_j)$. Алгебру являющуюся пополнением по $\| * \|_\Lambda$ минимальной алгебры, порожденной семейством элементов z_{f_T} для f_T из семейства $\mathcal{F}$ всех простых функций и их всевозможных упорядоченных конечных произведений обозначим $\mathcal{A}_\Lambda$.

3.6.4. Теорема. *Множество $\mathcal{A}_\Lambda$ является алгеброй над $\mathbf{R}$ полной относительно нормы $\| * \|_\Lambda$ с центром $Z(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathbf{R}$, причем имеются вложения $\mathcal{A}_\infty \hookrightarrow \mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) \geq \aleph_0$. Множество генераторов алгебры $\mathcal{A}_\Lambda$ имеет мощность $card(\Lambda)$ при $card(\Lambda) \geq card(\mathbf{R})$. Существует функция $\overrightarrow{\exp}(\int_\Lambda f(x)\mu(dx))$ упорядоченного интегрального произведения из $\mathcal{A}_\Lambda$ на $\mathcal{A}_\Lambda$.*

Доказательство. При $card(\Lambda) \leq \aleph_0$ алгебра $\mathcal{A}_\Lambda$ изоморфна $\mathcal{A}_{N-1}$ или $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому остается рассмотреть случай $card(\Lambda) > \aleph_0$. Для любой $f_T \in \mathcal{F}$ можно задать упорядоченное интегральное экспоненциальное произведение
$\overrightarrow{\exp}(\int_\Lambda f_T(x)\mu(dx)) := \{\exp(C_1\mu(A_1)\pi i_{x_1}/2)...\exp(C_p\mu(A_p)\pi i_{x_p}/2)\}_{q(p)}$
с $q(p)$ соответствующим левой расстановке скобок. Поэтому существуют вложения $\mathcal{A}_\infty$ в $\mathcal{A}_\Lambda$. Тогда очевидно $Z(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathbf{R}$. Пополнение семейства $\mathcal{F}$ содержит все функции вида $f(x) = \sum_j f_j(x)\chi_{A_j}(x) i_{x_j}$, где $\{A_j : j \in \mathbf{N}\}$ является дизъюнктным объединением Λ, каждое A_j μ-измеримо, $f_j \in L^2(\Lambda, \mu, \mathbf{R})$ и $\lim_{n\to\infty}\sum_{j>n}\|f_j(x)\chi_{A_j}(x)\|^2_{L^2(\Lambda,\mu,\mathbf{R})} = 0$. Поскольку $\exp(M) = \cos(|M|) + M\sin(|M|)/|M|$ для любого $M \in \mathcal{A}_\infty$, а $|\exp(M) - 1| \leq \exp(|M|) - 1$, то для любой $f \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует $\lim_{\mathcal{F}\ni f_T \to f}\overrightarrow{\exp}(\int_\Lambda f_T(x)\mu(dx)) =: \overrightarrow{\exp}(\int_\Lambda f(x)\mu(dx))$ относительно $\| * \|_\Lambda$. Поскольку $\exp(\pi i_x/2) = i_x$ для любого $x \in \Lambda \setminus \{0\}$, то семейство всех элементов вида $\overrightarrow{\exp}(\int_\Lambda f(x)\mu(dx))$, $f \in \mathcal{F}$ содержит все генераторы вложенной подалгебры $\mathcal{A}_\infty$, порожденной счетным подсемейством $\{i_{x_j} : j \in \mathbf{N}\}$. Пополнение $\tilde{\mathcal{F}}$ семейства $\mathcal{F}$ по норме $\| * \|_\Lambda$ является бесконечномерным линейным подпространством над $\mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_\Lambda$. Всевозможные упорядоченные конечные произведения элементов из $\tilde{\mathcal{F}}$ и пополнение их $\mathbf{R}$ линейной оболочки по $\| * \|_\Lambda$ дает $\mathcal{A}_\Lambda$. Тогда для любого элемента из $\mathcal{A}_\Lambda$ существует представление в виде упорядоченного интегрального экспоненциального произведения. Поскольку $\mathcal{A}_\Lambda$ является алгеброй над $\mathbf{R}$ и $card(\Lambda)^{\aleph_0} = card(\Lambda)$, то семейство генераторов алгебры $\mathcal{A}_\Lambda$ имеет мощность $card(\Lambda)$.

3.6.5. Замечание. Из теорем 3.6.2, 4 следует, что $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) > \aleph_0$ вместе с $\mathbf{C} = \mathcal{A}_1$ – это два крайних случая, где сопряжение $z \to z^*$ является внешним автоморфизмом, хотя поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ легче использовать благодаря его коммутативности и ассоциативности, чем алгебру $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) \geq \aleph_0$, которая не является ни коммутативной, ни ассоциативной. В силу определения 3.6.1 и теорем 3.6.2, 4 предыдущие результаты можно перенести со случая $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 4$ на $\mathcal{A}_\Lambda$. Определения $2.1-2.2$ переносятся на $\mathcal{A}_\infty$, более того, в силу алгебраической независимости z и z^* в $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) \geq \aleph_0$, мы получим, что z и z^* являются автоматически независимыми переменными, и имеются проекции $P_r : \mathcal{A}_\Lambda \to \mathcal{A}_r$ для любого $r \geq 2$ оправдывающие определения $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ и $C^n_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, также это оправдывает аксиомы супердифференцирования в §2.2. Очевидно, предложения $2.2.1, 2.3, 2.6$ и следствие 2.4, лемма 2.5.1 выполняются в случае $\mathcal{A}_\Lambda$ с $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\Lambda$ вместо $\mathbf{b} = \mathbf{b}_r$. Определение 2.5 имеет смысл также для $\mathcal{A}_\Lambda$. Теорема 2.7 выполняется также для $\mathcal{A}_\Lambda$, так как для любого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует вложенная подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая z. Путь γ спрямляем, поэтому он имеет счетное плотное подмножество. Для любого $\epsilon > 0$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ проекция $\psi(t)$ на которую пути γ отличается от $\gamma(t)$ не более, чем на ϵ для любого $t \in [a, b]$, где $\gamma : [a, b] \to \mathcal{A}_\Lambda$. Для $\mathcal{A}_\infty$ с помощью проекций P_r мы имеем $\psi = \lim_{r\to\infty} P_r(\psi)$, $P_r(\psi) \subset U_r$, $\{P_r(\gamma) : r \in \mathbf{N}\}$, сходится к ψ равномерно на компактном отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$, где $U_r = P_r(U)$. Возьмем последовательность таких путей ψ_n с $\sup_{t\in[a,b]} |\psi_n(t)-\gamma(t)| < 1/n$. Тогда $\int_{\psi_n} f(z)dz$ образуют последовательность Коши в $\mathcal{A}_\Lambda$, которая полна. Поэтому существует $\lim_{n\to\infty} \int_{\psi_n} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz)$. Следовательно, интеграл вдоль пути имеет единственное непрерывное продолжение на $C^0_b(U, \mathcal{A}_\Lambda)$.

В замечании 2.8 можно использовать $l_2(\mathbf{R})^m$ вместо $\mathbf{R}^{\mathbf{2^r m}}$ и представлять дифференциальные формы η над $\mathcal{A}_\infty$ как поточечные пределы (или равномерную сходимость на компактных подмножествах) дифференциальных форм над $\mathcal{A}_r$ при r стремящемся к бесконечности, так как $z_r \to z$ при r стремящемся к бесконечности, где $z \in \mathcal{A}_\infty$, $z_r := P_r(z)$. В случае $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) > \aleph_0$ можно использовать это поточечно, так как для каждого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ и содержащая z. В общем случае:

$$(i) \quad \eta(z, \tilde{z}) = \sum_{I,J} \eta_{I,J}\{(d^{\,p_1} z^{\wedge I_1}\alpha_1 \wedge ... \wedge d^{\,p_n} z^{\wedge I_n}\alpha_n \wedge d^{\,t_1}\tilde{z}^{\wedge J_1}\beta_1 \wedge ...$$
$$... \wedge d^{\,t_n}\tilde{z}^{\wedge J_n}\beta_n\}_{q(|I|+|J|+2n)}$$

– это дифференциальная форма над $\mathcal{A}_\Lambda$, где каждая $\eta_{I,J}(z, \tilde{z})$ – это непрерывная функция на открытом подмножестве U_n в $\mathcal{A}^n_\infty$ со значениями в $\mathcal{A}_\infty$, $I = (I_1, ..., I_n)$, $J = (J_1, ..., J_n)$, $|I| := I_1 + ... + I_n$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n \in \mathbf{N}$, $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \in \mathbf{N}$, $0 \leq I_k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq J_k \in \mathbf{Z}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{A}_\Lambda$ являются постоянными для любого $k = 1, ..., n$, $d^{\,p}z^0 := 1$, $d^{\,p}\tilde{z}^0 := 1$, $n \in \mathbf{N}$, $\pi^l_n(U_l) \subset U_n$ для любого $l \geq n$, где $\pi^l_n : \mathcal{A}^l_\Lambda \to \mathcal{A}^n_\Lambda$ – естественная проекция для любого $l \geq n$. Сходимость в правой части формулы (i) в случае бесконечного ряда по I или J предполагается относительно $C^0_b(W, \mathcal{A}^{\wedge *}_\infty)$-топологии равномерной сходимости на W, где $W = pr - \lim\{U_n, \pi^l_n, \mathbf{N}\}$, $\mathcal{A}^{\wedge *}_\Lambda$ снабжена топологией нормы наследуемой из сопряженного пространства всех поли $\mathbf{R}$-однородных $\mathcal{A}_\Lambda$-аддитивных функционалов.

В замечании 2.10 определим $\mathcal{A}_{\Lambda,s,p}$ и используем проекции $\pi_{s,p,t}$ для любого $s \neq p \in \mathbf{b}$. Теоремы $2.11, 2.15$ и следствия $2.13, 2.15.1$ переносятся на $\mathcal{A}_\Lambda$ с $card(\Lambda) \geq \aleph_0$ наложением условия $(2^r - 1)$-связности $P_r(U) =: U_r$ для любого $r \geq 3$ и для всевозможных вложений $\mathcal{A}_\infty$ в $\mathcal{A}_\Lambda$ для $card(\Lambda) > \aleph_0$ при соответствующем $\mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}_\infty$, рассматривая $\pi_{s,p,t}(U)$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $0 \leq k \in \mathbf{Z}$. Тогда определения $2.12, 2.14$ и теорема 2.16, замечания $2.17, 3.1$ выполняются также для $\mathcal{A}_\infty$. Выполнимость следствия 3.3 следует из доказательства теоремы 3.6.2. Мы также имеем вместо 3.4 и 3.5 следующее.

3.4′. Следствие. *Функция* $\exp(z)$ *на множестве* $\mathcal{I}_\Lambda := \{z \in \mathcal{A}_\Lambda : Re(z) = 0\}$ *периодична с бесконечным семейством генераторов периодов* $s \in \hat{b}_\Lambda$, *так что* $\exp(z(1 + 2\pi n/|z|)) = \exp(z)$ *для любого* $0 \neq z \in \mathcal{I}_\Lambda$ *и любого целого числа* n, *где* $card(\Lambda) \geq \aleph_0$. *Если* $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ *записано в виде* $z = 2\pi sM$, *где* $M \in \mathcal{I}_\infty$, $|M| = 1$, *то* $\exp(z) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $s \in \mathbf{Z}$.

3.5′. Следствие. *Функция* exp *является эпиморфизмом с* $\mathcal{I}_\Lambda$ *при* $card(\Lambda) \geq \aleph_0$ *на бесконечномерную единичную сферу* $S^\Lambda(0, 1, \mathcal{A}_\Lambda) := \{z : z \in \mathcal{A}_\Lambda, |z| = 1\}$.

3.7. Замечание. В некоммутативном случае $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, имеется следующее соотношение для производной функции exp:

$$(3.6) \quad \exp(z)'.h = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} ((z^k)h)z^{n-k-1}/n!,$$

где z и $h \in \mathcal{A}_r$. В частности,

$$(3.7) \quad \exp(z)'.v = v \exp(z)$$

для любого $v \in \mathbf{R}$, но в общем случае не для всех $h \in \mathcal{A}_r$. Функция exp периодична на $\mathcal{A}_r$, следовательно, обратная функция обозначаемая Ln определена только локально.

Пусть сначала $2 \leq r \in \mathbf{N}$. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{\mathbf{2^r}}$ всех переменных $(w_s : s \in \mathbf{b})$ для которых exp периодична на $\mathcal{A}_r$. Условие $\sum_{s \in \hat{b}} w_s^2 = 1$ определяет в $\mathbf{R}^{\mathbf{2^r}}$ сферу единичного радиуса S^{2^r-2} с центром в нуле. Последняя имеет элемент центральной симметрии C для преобразования $C(w_s : s \in \mathbf{b}) = (-w_s : s \in \mathbf{b})$. Рассмотрим подмножество $P = P_0 \cup \bigcup_{q, j_1, ..., j_q} P_{j_1,...,j_q}$ в S^{2^r-2}, где $1 \leq q \leq 2^{r-1} - 1$, всех точек характеризуемых условиями:

$P_0 := \{(w_s : s \in \hat{b}) \in S^{2^r-2} : w_s \leq 0, \forall s \in \hat{b}\}$,

$P_{j_1,...,j_q} := \{(w_s : s \in \hat{b}) \in S^{2^r-2} : w_s \leq 0, \forall s \in \hat{b} \setminus \{j_1, ..., j_q\}, w_s \geq 0, \forall s \in \{j_1, ..., j_q\}\}$,

тогда $P \cup CP = S^{2^r-2}$ и пересечение $P \cap CP$ является (2^r-3)-мерным над $\mathbf{R}$. Эта сфера S^{2^r-2} соответствует вложению $\theta_1 : (w_s : s \in \hat{b}) \hookrightarrow (0, w_s : s \in \hat{b}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{2^r}}$. Рассмотрим вложение $\mathbf{R}^{\mathbf{2^r}}$ в $\mathcal{A}_r$ даваемое формулой $\theta_2 : (w_s : s \in \mathbf{b}) \hookrightarrow \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s \in \mathcal{A}_r$. Это дает вложение $\theta := \theta_2 \circ \theta_1$ сферы S^{2^r-2} в $\mathcal{A}_r$. Каждая окружность единичного радиуса с центром в 0 в $\mathcal{A}_r$ пересекает экватор $\theta(S^{2^r-2})$ сферы $S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$. Соединим каждую точку $\sum_{s \in \hat{b}} w_s s$ на $\theta(S^{2^r-2})$ с нулем в $\mathcal{A}_r$ отрезком прямой $\{a \sum_{s \in \hat{b}} w_s s : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$, где $\bar{\mathbf{R}}_+ := \{a \in \mathbf{R} : a \geq 0\}$. Эта линия пересекает круг вложенный в $S^{2^r-1}(0, 1, \mathcal{A}_r)$, который является следом окружности $\{\exp(2\pi aM) : a \in [0, 1]\}$ радиуса 1 в $\mathcal{A}_r$, где $M = \sum_{s \in \hat{b}} w_s s$. Поэтому, $\psi(s) := \exp(v + 2\pi aM)$ как функция (v, a) для фиксированного $(w_s : s \in \hat{b}) \in S^{2^r-2}$ определяет биекцию области $X \setminus \{aM : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$ на свой образ, где X – это $\mathbf{R}^\mathbf{2}$ вложенное как $(v, a) \hookrightarrow (v + aM) \in \mathcal{A}_r$, где $v \in \mathbf{R}$. Это означает, что $Ln(z)$ корректно определен на каждом подмножестве $X \setminus \{aM : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$ in $\mathcal{A}_r$. Объединение $\bigcup_{(w_s : s \in \hat{b}) \in P} \{a \sum_{s \in \hat{b}} w_s s : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$ дает $(2^r - 1)$-мерное (над $\mathbf{R}$) подмножество $Q := Q_0 \cup \bigcup_{q, j_1, ..., j_q} Q_{j_1,...,j_q}$, где $Q_0 = \theta(S_0)$, $Q_{j_1,...,j_q} := \theta(S_{j_1,...,j_q})$, $S_0 := \bar{\mathbf{R}}_+ P_0$, $S_{j_1,...,j_q} := \bar{\mathbf{R}}_+ P_{j_1,...,j_q}$, $1 \leq q \leq 2^{r-1} - 1$. Тогда, на области $\mathcal{A}_r \setminus Q$, функция $\exp(z)$ определяет биекцию с образом $\exp(\mathcal{A}_r \setminus Q)$ и ее обратная функция $Ln(z)$ корректно определена на $\mathcal{A}_r \setminus \exp(Q)$. Вращением $\mathcal{A}_r \setminus Q$ можно получить другие области на которых Ln может быть определен как функция (с одним значением в каждой точке, то есть, $Ln(z)$ – это одна точка в $\mathcal{A}_r$), но не на всей $\mathcal{A}_r$). Это означает, что $Ln(z)$ – это локально биективная функция. Выполняются элементарные тождества

$\cos(2\pi-\phi)=\cos(\phi)$ и $\sin(2\pi-\phi)=-\sin(\phi)$ для любого $\phi\in\mathbf{R}$. Если $0<\phi<2\pi$, то $w_1\sin(\phi)/\phi=w_2\sin(2\pi-\phi)/(2\pi-\phi)$ тогда и только тогда, когда $w_1=-\phi w_2/(2\pi-\phi)$. Для исключения этой неопределённости положим в формуле (3.3) $\phi=|M|\geq 0$ и $w_{i_1}\geq 0$. Поэтому, $Ln(\exp(z))=z$ на $\mathcal{A}_r\setminus Q$, следовательно, используя формулы $(3.4,3.5)$ получим многозначную функция

$$(3.8)\quad Ln(z)=ln(|z|)+Arg(z),\ \text{где}\ Arg(z):=arg(z)+2\pi aM$$

на $\mathcal{A}_r\setminus\{0\}$, где ln – это обычный действительный логарифм на $(0,\infty)$, $a\in\mathbf{Z}$,

$$|z|\exp(2\pi arg(z))=z,\quad arg(z):=\sum_{s\in\hat{b}}w_{s,z}s,\quad (w_{s,z}:s\in\hat{b})\in\mathbf{R^{2^r-1}},$$

$\sum_{s\in\hat{b}}w_{s,z}^2\leq 1$, $w_{i_1,z}\geq 0$, $M=\sum_{s\in\hat{b}}w_s s$ – это произвольный вектор единичной длины (то есть, $|M|=1$) в $\mathcal{I}_r$ коммутирующий с $arg(z)\in\mathcal{A}_r$, $arg(z)$ определён однозначно таким ограничением $(w_s:s\in\hat{b})$, например, $M=\zeta arg(z)$ для любого $\zeta\in\mathbf{R}$, когда $arg(z)\neq 0$.

Для любого фиксированного $M\in\mathcal{I}_r$ $\exp(aM)$ – это однопараметрическое семейство специальных преобразований алгебры $\mathcal{A}_r$, то есть, $\exp(aM)\eta\in\mathcal{A}_r$ для любого $\eta\in\mathcal{A}_r$ и $|\exp(aM)|=1$, где $\mathcal{A}_r$ как линейное пространство над $\mathbf{R}$ изоморфно $\mathbf{R^{2^r}}$. С другой стороны, существуют специальные преобразования алгебры $\mathcal{A}_r$, для которых $a=\pi/2+\pi k$, но M – это переменная с $|M|=1$, где $k\in\mathbf{Z}$, тогда $\exp(z)=(-1)^kM$. Каждой замкнутому пути (петле) γ в $\mathcal{A}_r$ соответствует петля $P_\xi(\gamma)$ в $\mathbf{R}$-линейном подпространстве $\xi\ni 0$, где P_ξ – это проекция на ξ, например,

$P_{\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}s}(z)=(z-s(zs))/2=w_1+w_s s$ для $\xi=\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}s$,

$P_{\mathbf{R}s\oplus\mathbf{R}p}(z)=sP_{\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}s^*p}(s^*z)=[z-p(s^*z(s^*p))]/2=w_s s+w_p p$

для любого $s\neq p\in\hat{b}$. Частные случаи таких специальных преобразований также соответствуют $w_s=0$ для $s\in\hat{b}$ при $M\neq 0$. Каждой петле γ в $\mathcal{A}_r$ и любым a и b в $\mathcal{A}_r$ с $ab\neq 0$ соответствует петля $(a\gamma)b$ в $\mathcal{A}_r$.

Вместо римановой двумерной поверхности комплексной логарифмической функции мы получим 2^r-мерное многообразие W, то есть, подмножество в $Y^{\aleph_0}:=\prod_{i\in\mathbf{Z}}Y_i$, где $Y_i=Y$ для любого i, так что каждое Y является копией $\mathcal{A}_r$ вложенной в $\mathcal{A}_r\times\mathbf{R^{2^r-1}}$ и разрезанной по (2^r-1)-мерному подмногообразию Q и с диффеоморфной деформацией окрестности Q, так что два (2^r-1)-мерных края ${}_1Q$ и ${}_2Q$ для Y диффеоморфные Q не пересекаются вне нуля, ${}_1Q\cap{}_2Q=\{0\}$, то есть, граница ∂Q также разрезана везде вне нуля. Мы имеем $\partial Q=\bigcup_{j\in\hat{b}}\partial Q^j$, где $\partial Q^j:=\{\theta(w_s:s\in\hat{b}):w_j=0,(w_s:s\in\hat{b})\in S_0\cup\bigcup_{q,j_1,\dots,j_q}S_{j_1,\dots,j_q}\}$, для любого $j\in\hat{b}$. Для исключения вращений в каждом подпространстве $v+a\xi$ изоморфном $\mathbf{R^2}$ и вложенном в $\mathbf{R}+\partial Q^j$, где $\xi\in\partial Q^j$, $\xi\neq 0$, мы разрезали ∂Q. Тогда в $\mathcal{A}_r\times\mathbf{R^{2^r-1}}$ две копии Y_i и Y_{i+1} склеены отношением эквивалентности ${}_2Q_i$ с ${}_1Q_{i+1}$ посредством отрезков $\{a_{l,i}M:a_{l,i}\in\bar{\mathbf{R}}_+\}$, так что $a_{1,i+1}=a_{2,i}$ для любого $a_{l,i}\in\bar{\mathbf{R}}_+$ и любых данных $(w_s\in\mathbf{R}:s\in\hat{b})\in P$ с $M=\sum_{s\in\hat{b}}w_s s$, $|M|=1$. Это задает 2^r-мерное многообразие W вложенное в $\mathcal{A}_r\times\mathbf{R^{2^r-1}}$ и $Ln:\mathcal{A}_r\setminus\{0\}\to W$ – это однозначная функция, то есть, $Ln(z)$ – это одноточечное подмножество в W для любого $z\in\mathcal{A}_r\setminus\{0\}$.

В случае $\mathcal{A}_\Lambda$ с $card(\Lambda)\geq\aleph_0$ рассмотрим семейство Υ подмножеств в $\hat{b}=\hat{b}_\Lambda$, так что если $A\in\Upsilon$, то $\hat{b}\setminus A\notin\Upsilon$, положим $Q:=\{M\in\mathcal{I}_\Lambda:w_s\leq 0\ \forall s\in A,\ w_s\geq 0\ \forall s\in\mathbf{b}\setminus A,\ A\in\Upsilon\}$, где $M=\sum_{s\in\hat{b}}w_s s$, $w_s\in\mathbf{R}$ для любого $s\in\mathbf{b}$. Тогда $\partial Q=\bigcup_{j\in\hat{b}}\partial Q^j$, где $\partial Q^j:=\{z\in Q:w_j=0\}$. Рассмотрим $Y^{\aleph_0}=\prod_{k\in\mathbf{N}}Y_k$, где $Y_k=Y$ – это копия $\mathcal{A}_\Lambda$ вложенная в $\mathcal{A}_\Lambda\times l_2(\mathbf{R})$ разрезанная по бесконечномерному подмногообразию Q и с диффеоморфной деформацией окрестности Q, так что бесконечномерные края ${}_1Q$ и

${}_2Q$ не пересекаются вне нуля, ${}_1Q \cap {}_2Q = \{0\}$. Тогда в $\mathcal{A}_\infty \times l_2(\mathbf{R})$ две копии Y_k и Y_{k+1} склеены отношением эквивалентности ${}_2Q_k$ с ${}_1Q_{k+1}$ по отрезкам $\{a_{l,k}M : a_{l,k} \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$, так что $a_{1,k+1} = a_{2,k}$ для любого $a_{l,k} \in \bar{\mathbf{R}}_+$ и любого данного $M = \sum_{s \in \hat{b}} w_s s \in Q \cap S(0,1,\mathcal{I}_\Lambda)$ с $|M| = 1$, где $S(z_0, \rho, \mathcal{I}_\Lambda) := \{z \in \mathcal{I}_\Lambda : |z - z_0| = \rho\}$, $\rho > 0$. Это определяет бесконечномерное многообразие W вложенное в $\mathcal{A}_\Lambda \times l_2(\mathbf{R})$ и $Ln : \mathcal{A}_\Lambda \setminus \{0\} \to W$ – это однозначная функция.

3.8. Замечание. В действительном случае тригонометрические и гиперболические функции различны, но определенные как функции $\mathcal{A}_r$-переменной они связаны. Положим

$\cos(v) := [\exp(vM) + \exp(-vM)]/2$,

$\sin(v) := [\exp(vM) - \exp(-vM)]M^*/2$,

$\cosh(v) := [\exp(v) + \exp(-v)]/2$,

$\sinh(v) := [\exp(v) - \exp(-v)]/2$

для любого $v \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ и

$\cos(z) := [\exp(z) + \exp(-z)]/2$ и

$\sin(z) := [\exp(z) - \exp(-z)](z^* - z)/[2|z - z^*|]$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, где $z \neq z^*$ в последнем случае, тогда

$\cos(v + yM) = \cos(v)\cosh(y) - \sin(v)\sinh(y)M$,

$\sin(v + yM) = \sin(v)\cosh(y) + \cos(v)\sinh(y)M$

для любых $v, y \in \mathbf{R}$ и M как выше.

3.8.1. Предложение. *Пусть предположения предложение* 2.2.1 *выполнены при* $k = n = m$ *и* $f \circ g(z) = z$ *для любого* $z \in U$, *где* $g : U \to W$ *– это биективное сюрьективное отображение , то есть, существует обратное отображение* $f = g^{-1}$. *Тогда*

$(Df(g)|_{g=g(z)}).\eta = (Dg(z))^{-1}.\eta$ *для любого* $\eta \in \mathcal{A}_r^n$, $2 \leq r \leq \infty$ *или* $r = \Lambda$. *Если* f *является или* z, *или* $\tilde{z}$, *или* $(z, \tilde{z})$*-супердифференцируемой, тогда* g *является или* z, *или* $\tilde{z}$, *или* $(z, \tilde{z})$*-супердифференцируемой соответственно.*

Доказательство. В силу предложения 2.2.1 $(Df(g).((Dg(z)).h) = h$ для любого $z \in U$ и любого $h \in \mathcal{A}_r^n$. Поскольку $Dg(z)$ является $\mathbf{R}$-однородным и $\mathcal{A}_r^n$-аддитивным, то DG имеет обратный оператор, где $G = g \circ \sigma$ – это диффеоморфизм действительной области P (в $\mathbf{R}^{\mathbf{2^r n}}$ при $r \in \mathbf{N}$ или $l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ при бесконечном r) соответствующей U, $\sigma(P) = U$, где $l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ – гильбертово пространство над $\mathbf{R}$ с базисом мощности $card(\Lambda)$. Поэтому, существует обратный $\mathbf{R}$-однородный $\mathcal{A}_r^n$-аддитивный оператор $(Dg(z))^{-1}$ на $\mathcal{A}_r^n$. Полагая $\eta = (Dg(z)).h$, мы получим утверждение этого предложения. Последнее утверждение этого предложения следует из предложения 2.3, так как g является или z, или $\tilde{z}$, или $({}_1z, {}_2z)|_{{}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}$-представленной вместе с f.

3.8.2. Предложение. *Пусть* $g : U \to \mathcal{A}_r$, $\infty \geq r \geq 3$ *или* $r = \Lambda$, *является* $\mathcal{A}_r$*-голоморфной функцией на* U, *где* U *открыто в* $\mathcal{A}_r$. *Если* $0 \notin g(U)$, *то существует* $\mathcal{A}_r$*-голоморфная функция* $f = 1/g$ *на* U, *так что*

$(Df(z)).h = [D(1/g)|_{g=g(z)}].((Dg(z)).h)$ *для любого* $h \in \mathcal{A}_r$.

В частности, $(Df(z)).h = -\xi[((Dg(z)).h)\xi]$ *для* $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, *где* $\xi := 1/g$.

Доказательство. В силу формул $(3.2, 3.3)$ существует $f = 1/g$, то есть, $f(z)g(z) = g(z)f(z) = 1$ для любого $z \in U$, но это не означает существование решения уравнения $(ab)z = a$ в общем в $\mathcal{A}_r$ для $r \geq 4$. Используя предложение 2.2.1, получим

$(Df(z)).h = (D(1/g)|_{g=g(z)}).((Dg(z)).h)$,

так что $g((D(1/g)).h) = -((Dg).h)/g = -h/g$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. То есть, существует $D(1/g)$. Если $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, то $(D(1/g)).h = -\xi(h\xi)$, где $\xi := 1/g$, так как $\mathbf{K}$ является альтернативной.

3.8.3. Теорема. *Функция Ln является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на любой области U в $\mathcal{A}_r$ полученной в результате $\mathcal{A}_r$-голоморфного диффеоморфизма $\mathcal{A}_r \setminus Q$ на U, где $2 \le r \le \infty$ или $r = \Lambda$. Каждый путь γ в $\mathcal{A}_r$ такой, что $\gamma(t) = \rho \exp(2\pi t n M)$ с $t \in [0,1]$, $n \in \bar{\mathbf{R}}_+$, $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$ замкнут в $\mathcal{A}_r$ тогда и только тогда, когда $n \in \mathbf{N}$, где $\rho > 0$. В этом случае*

$$(3.9) \qquad \int_\gamma z^{-1} dz = \int_\gamma d(Lnz) = 2\pi n M.$$

Доказательство. В силу формул (3.2, 3.3) каждое $0 \ne z \in \mathcal{A}_r$ имеет z^{-1}. Если U и V – это два открытых подмножества в $\mathcal{A}_r$ и $g : V \to U$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфным диффеоморфизмом V на U и f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на V, тогда $f \circ g^{-1}$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на U, так как $(f \circ g^{-1})'(z).h = (f'(\zeta)|_{\zeta = g^{-1}(z)}.(g^{-1}(z))'.h$ для любого $z \in U$ и любого $h \in \mathcal{A}_r$ (см. предложения 2.2.1 и 3.8.1). Поскольку exp является диффеоморфизмом из $\mathcal{A}_r \setminus Q$ на $\mathcal{A}_r \setminus \exp(Q)$, то Ln является $\mathcal{A}_r$-голоморфным на $\mathcal{A}_r \setminus Q$ в силу предложения 3.8.1 и на каждом его $\mathcal{A}_r$-голоморфном образе после выбора определенной ветви многозначной функции $Ln(z)$ (см. формулу (3.8)).

Путь γ определён для любого $t \in \mathbf{R}$ не только для $t \in [0,1]$ благодаря существованию exp. В силу формул (3.2, 3.3) путь γ замкнут (то есть, $\gamma(t_0) = \gamma(t_0 + 1)$ для любого $t_0 \in \mathbf{R}$) тогда и только тогда, когда $\cos(2\pi n) = \cos(0) = 1$ и $\sin(2\pi n) = 0$, то есть, $n \in \mathbf{N}$.

Из определения интеграла вдоль пути следует равенство: $\int_\gamma d(Lnz) = \int_0^1 (Lnz)'.(\gamma'(t)dt)$. Рассмотрение интегральных сумм по разбиениям P отрезка $[0,1]$ и взятие предела по семейству всех P с диаметром разбиения стремящемся к нулю дает, что $\int_\gamma d(Lnz) = Arg(\gamma(1)) - Arg(\gamma(0))$ для выбранной ветви функции $Arg(z)$ (см. формулу (3.8)). Поэтому, $\int_\gamma d(Lnz) = 2\pi n M$.

Поскольку $\mathcal{A}_r$ ассоциативная со степенями, то z коммутирует с собой, следовательно, $\exp(z)'.z = \exp(z)z$. Поэтому, $\exp(Ln(z))'.1 = (d\exp(\eta)/d\eta)|_{\eta = Ln(z)}.(Ln(z))'.1 = \exp(Ln(z))(Ln(z))'.1$, следовательно, $(Ln(z))'.1 = \exp(-Ln(z)) = z^{-1}$ и неизбежно

$$\lim_P I(z^{-1}, \gamma; P) = \lim_P \sum_l \hat{z}_l^{-1} \Delta z_l = \lim_P \Delta Ln(z_l) = \int_\gamma dLn(z),$$

следовательно, $\int_\gamma z^{-1} dz = \int_\gamma dLn(z)$. То есть, $\int_\gamma dLn(z)$ можно рассматривать как определение $\int_\gamma z^{-1} dz$.

3.8.4. Обозначения. Обозначим упорядоченную композицию функций $\{f_1 \circ f_2 \circ ... f_m\}_{q(m)}$, где $q(m) := (q_m, ..., q_3)$, $q_m \in \mathbf{N}$ означает, что первая (наиболее внутренняя скобка) композиции является $f_{q_m} \circ f_{q_{m+1}} = f_{q_m}(f_{q_{m+1}}) =: [f_{q_m} \circ f_{q_{m+1}}]$, так что ситуации $(f_1 \circ ... \circ [f_t \circ f_{t+1}] \circ ... \circ [f_w \circ f_{w+1}] \circ ... \circ f_m)$ с двумя одновременными независимыми композициями, но $t < w$ по нашему определению упорядочения соответствует $q_m = w$ (в отличии от умножения). После первой композиции мы получим композицию $(\, {}'f_1 \circ ... \circ \, {}'f_{m-1})$, где не менее, чем $(m-2)$ элементов те же, что и в первой композиции, тогда q_{m-1} соответствует первой композиции в новом упорядоченном семействе функций, и так далее по индукции от j до $j-1$, $j = m, m-1, ..., 3$. Поскольку q_2 и q_1 единственны, то мы опустим их. После шагов $q_m, ..., q_{m-j+1}$ пусть соответствующая композиция обозначается
$\{ \, {}^j g_1 \circ ... \circ \, {}^j g_{m-j}\}_{q(m-j)}$,

где ${}^{j}g_1, ..., {}^{j}g_{m-j}$ – результаты композиций на предыдущих шагах, некоторые из них могут принадлежать множеству $\{f_1, ..., f_m\}$. Если f_l появляется в композиции на $k = k(l)$ шаге, то могут быть два варианта: $f_l \circ {}^{l}g_p$ или ${}^{l}g_p \circ f_l$, где $p = p(l)$, $j = j(l) = k(l) - 1$, ${}^{0}g_p := f_p$. В первом случае предположим, что $dom(f_l) \subset {}^{j}g_p(dom\, {}^{j}g_p)$, во втором случае пусть $dom({}^{j}g_p) \subset f_l(dom(f_l))$ для любого $l = 1, ..., m$.

3.8.5. Предложение. *Пусть $f_1,...,f_m$ – семейство $\mathcal{A}_r$ супердифференцируемых функций или все по z, или все по $\tilde{z}$, или все по $(z, \tilde{z})$, $f_j : U_j \to \mathcal{A}_r^{t(j)}$, U_j открыто в $\mathcal{A}_r^{t(j+1)}$, $t(j) \in \mathbf{N}$ для любого $j = 1, ..., m$, так что их области удовлетворяют условиям выше, где $2 \le r \le \infty$ или $r = \Lambda$. Тогда*

$$(i) \quad (D\{f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_m\}_{q(m)}(z)).h = \{Df_1({}^{j(1)}g_{p(1)}).Df_2({}^{j(2)}g_{p(2)})....(Df_m(z)).h\}_{q(m)}$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^{t(m+1)}$, где $Df_l({}^{j(l)}g_{p(l)}).\xi = (Df_l(\eta)|_{\eta = {}^{j(l)}g_{p(l)}(z)}).\xi$ для любого $\xi \in \mathcal{A}_r^{t(l+1)}$. Более того, $\{f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_m\}_{q(m)}$ супердифференцируема или по z, или по $\tilde{z}$, или по $(z, \tilde{z})$ соответственно. Если $r = 2$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, то композиция в (i) ассоциативна, для любого $r \ge 3$ она может быть в общем неассоциативной. В отмеченной точке $z = a \in U_m$ она имеет вид:

$$(ii) \quad (D\{f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_m\}_{q(m)}(z)).h = \{Df_1(\eta_1).Df_2(\eta_2)....(Df_m(z)).h\}_{q(m)},$$

где $\eta_l := f_l(f_{l+1}(...f_{m-1}(f_m(z))...))$ для любого $l = 1, ..., m-1$.

Доказательство. Для $m = 2$ это предложение было доказано в §2.2.1. Докажем это предложение по индукции и применим предложение 2.2.1 к парам функций в появляющихся композициях. Сначала отметим, что порядок композиций для дифференциала существен для $\mathcal{A}_r$ с $r \ge 3$. Частный случай всех правосупердифференцируемых функций показывает, что в общем $(Df_1.Df_2).Df_3$ не равно $Df_1.(Df_2.Df_3)$, так как эти операторы правосуперлинейны, но умножение матриц с элементами принадлежащими алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $r \ge 3$ неассоциативно. Более того, эти выражения могут быть различны, когда Df_j не являются правосуперлинейными, но только $\mathcal{A}_r^{t(j+1)}$-аддитивными.

Пусть предложение доказано для всех $n \le m$, рассмотрим $\{f_1 \circ ... \circ f_{m+1})_{q(m+1)}$. В нем f_1 участвует в композиции на $k(1)$ шаге с ${}^{j(1)}g_{p(1)}$ вида $f_1 \circ {}^{j(1)}g_{p(1)}$, так как f_1 находится в крайней левой позиции. Если $k(1) = 1$, то ${}^{j(1)}g_{p(1)} = f_2$ и
$\{f_1 \circ ... \circ f_{m+1}\}_{q(m+1)} = \{[f_1 \circ f_2] \circ ... \circ f_{m+1}\}_{q(m)}$.
Применяя предположение индукции к композиции функций $[f_1 \circ f_2]$, f_3,...,f_{m+1} и подставляя в нее выражение $D(f_1 \circ f_2)$ согласно предложению 2.2.1, мы получим утверждение этого предложения в случае $k(1) = 1$. Если $k(1) > 1$, тогда на $k(1)$ шаге рассматривается композиция f_1 и ${}^{j(1)}g_2$,..., ${}^{j(1)}g_{m+1-j(1)}$, где $j(1) = k(1) - 1 \ge 1$, следовательно, $m+1-j(1) \le m$. Применяя предположение индукции к $\{f_1 \circ {}^{j(1)}g_2 \circ ... \circ {}^{j(1)}g_{m+1-j(1)}\}_{q(m+1-j(1))}$ и тогда к каждой ${}^{j(1)}g_p$ для нетривиальной композиции, мы получим утверждение предложения в случае $k(1) > 1$. Последнее утверждение также следует в силу математической индукции рассмотренной выше и из предложения 2.2.1.

Теоретикомножественная композиция функций независима от скобок, но она зависит только от порядка функций: $(f_1 \circ f_2) \circ f_3(z) = (f_1 \circ f_2)(f_3(z)) = f_1(f_2(f_3(z))) = f_1 \circ (f_2 \circ f_3(z))$, и т.д. по индукции. Неассоциативность в общем появляется после супердифференцирования над $\mathcal{A}_r$ с $r \ge 3$. Поскольку $\{f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_m\}_{q(m)}(z) = f_1(f_2(...(f_m(z))...)$, то для отмеченной точки $z = a \in U_m$ формула (i) принимает вид (ii).

В случае $r = 2$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, каждый $\mathbf{R}$-однородный $\mathbf{H}$-аддитивный оператор A имеет вид

$A.h = \sum_j B_j h C_j$ для любого $h \in \mathbf{H^n}$, где сумма по j конечна, $1 \le j \le 4$ (см. формулы в доказательстве теоремы 3.28 [27]), где B_j является $n \times n$ матрицей, h – это $n \times 1$ матрица, A_j – это 1×1 матрица с элементами из $\mathbf{H}$. Пусть A_k – это оператор соответствующий $Df_k(\eta_k)$ для данной отмеченной точки $z = a \in U_3$, $A_k.h = \sum_j B_{j,k} h C_{j,k}$ для любого $k = 1, 2, 3$, тогда $(A_1.A_2).A_3.h = \sum_{j_1,j_2,j_3} (B_{j_1,1} B_{j_2,2})(B_{j_3,3} h C_{j_3,3})(C_{j_2,2} C_{j_1,1})$ $= \sum_{j_1,j_2,j_3} B_{j_1,1}(B_{j_2,2} B_{j_3,3}) h (C_{j_3,3} C_{j_2,2}) C_{j_1,1} = (A_1.(A_2.A_3)).h$, так как матричное умножение над $\mathbf{H}$ ассоциативно. Применяя последнюю формулу по индукции, мы получим, что в случае $\mathbf{H}$ композиция в формуле (i) ассоциативна.

3.9. Теорема. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на открытой области U в $\mathcal{A}_r$, $\infty \ge r \ge 3$ или $r = \Lambda$. Если $(\gamma + z_0)$ и ψ представлены как кусочные объединения путей $\gamma_j + z_0$ и ψ_j относительно параметра $\theta \in [a_j, b_j]$ и $\theta \in [c_j, d_j]$ соответственно с $a_j < b_j$ и $c_j < d_j$ для любого $j = 1, ..., n$, и $\bigcup_j [a_j, b_j] = \bigcup_j [c_j, d_j] = [0, 1]$, $\gamma_j + z_0$ и ψ_j гомотопны относительно $U_j \setminus \{z_0\}$, где $U_j \setminus \{z_0\}$ является $(2^r - 1)$-связной открытой областью в $\mathcal{A}_r$, так что $\pi_{s,p,t}(U_j \setminus \{z_0\})$ просто связна в $\mathbf{C}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$ ($\forall 0 \le k \in \mathbf{Z}$ и $P_m(U_j \setminus \{z_0\})$ является $(2^m - 1)$-связной для любого $4 \le m \in \mathbf{N}$ если $r = \infty$ или $r = \Lambda$), для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которых существует $z = t + u \in \mathcal{A}_r$. Если $(\gamma + z_0)$ и ψ – замкнутые спрямляемые пути (петли) в U, так что $\gamma(\theta) = \rho \exp(2\pi\theta M)$ с $\theta \in [0, 1]$ и отмеченной $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$ и $z_0 \notin \psi$. Тогда*

$$(3.10) \quad (2\pi) f(z) M = \int_\psi f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$$

для любого $z \in U$ такого, что $|z - z_0| < \inf_{\zeta \in \psi([0,1])} |\zeta - z_0|$. Если $\mathcal{A}_r$ альтернативна, то есть, $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, или $f(z) \in \mathbf{R}$, тогда

$$(3.11) \quad f(z) = (2\pi)^{-1} (\int_\psi f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta) M^*.$$

Доказательство. Соединим γ и ψ спрямляемым путем ω, так что $z_0 \notin \omega$, который проходится дважды в одном направлении и противоположном, обозначемом ω^-, так что $\omega_j \cup \psi_j \cup \gamma_j \cup \omega_{j+1}$ гомотопно точке относительно $U_j \setminus \{z_0\}$ для подходящих ω_j и ω_{j+1}, где ω_j соединяет $\gamma(a_j)$ с $\psi(c_j)$, а ω_{j+1} соединяет $\psi(d_j)$ с $\gamma(b_j)$, так что z и $z_0 \notin \omega_j$ для любого j. Тогда $\int_{\omega_j} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta = -\int_{\omega_j^-} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$ для любого j. В силу теоремы 2.15 выполняется равенство $-\int_{\gamma^- + z} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta = \int_\psi f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$. Поскольку $\gamma + z$ - это окружность вокруг z, то ее радиус $\rho > 0$ может быть выбран настолько малым, что $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta, z)$, где α – это непрерывная функция на U^2, так что $\lim_{\zeta \to z} \alpha(\zeta, z) = 0$, тогда $\int_{\gamma+z} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta = \int_{\gamma+z} f(z)(\zeta - z)^{-1} d\zeta + \delta(\rho) =$ $2\pi f(z) M + \delta(\rho)$, где $|\delta(r)| \le |\int_\gamma \alpha(\zeta, z)(\zeta - z)^{-1} d\zeta| \le 2\pi \sup_{\zeta \in \gamma} |\alpha(\zeta, z)| C_1 \exp(C_2 \rho^6)$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные (см. неравенство (2.7.4)), следовательно, $\lim_{\rho \to 0, \rho > 0} \delta(\rho) = 0$. Взятие предела при $\rho > 0$ стремящемся к нулю дает утверждение этой теоремы. Если $r = 3$, то есть, $\mathcal{A}_r = \mathbf{K}$, или $f(z) \in \mathbf{R}$, тогда $((2\pi) f(z) M) M^* = 2\pi f(z)$.

3.9.1. Следствие. *Пусть f, U, ψ, z и z_0 те же, что и в теореме 3.9, тогда*

$$|f(z)| \le \sup_{(\zeta \in \psi, h \in \mathcal{A}_r, |h| \le 1)} |\hat{f}(\zeta).h|.$$

3.9.2. Теорема. *Пусть* $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ *– последовательность* $\mathcal{A}_r$*-голоморфных функций на окрестности* W *ограниченного канонического замкнутого подмножества* U *в* $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$, *так что* $Int(U)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.9 *и существует* $\delta > 0$, *для которого* $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ *равномерно сходится на* δ*-окрестности топологической границы* $Fr(U)^\delta$ *множества* U. *Тогда* $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ *сходится равномерно на* U *к* $\mathcal{A}_r$*-голоморфной функции на* $Int(U)$.

Доказательство. В силу §2.7 последовательность $\hat{f}_n$ равномерно сходится на $Fr(U)^\delta \cap W$. Рассмотрим сечения W плоскостями $i_{2m}\mathbf{R} \oplus i_{2m+1}\mathbf{R}$ для любого $m = 0, 1, 2, ...$ и рассмотрим спрямляемые петли γ в $Fr(U)^\delta \cap W \cap (i_{2m}\mathbf{R} \oplus i_{2m+1}\mathbf{R})$. Для $r > 3$ рассмотрим все возможные вложения $\mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$ и такие копии $\mathbf{K}$ содержат все соответствующие петли γ. В силу оценки 2.7.(4) и теоремы 3.9 последовательность $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ сходится равномерно на U к голоморфной функции, так как U имеет конечный диаметр.

3.10. Теорема. *Пусть* f *– непрерывная функция на открытом подмножестве* U *в* $\mathcal{A}_r$, $3 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$. *Если* f *является* $\mathcal{A}_r$*-интегрально голоморфной на* U, *тогда* f *является* $\mathcal{A}_r$ *локально* z*-аналитической на* U.

Доказательство. Пусть $z_0 \in U$ – отмеченная точка и пусть Γ обозначает семейство всех спрямляемых путей $\gamma : [0,1] \to U$, так что $\gamma(0) = z_0$, тогда $U_0 = \{\gamma(1) : \gamma \in \Gamma\}$ – связная компонента z_0 в U. Поэтому, $g = \{\gamma(1), \int_\gamma f(z)dz\}$ – это функция с областью U_0. Из формул (3.2, 3.3) следует, что каждое $0 \ne z \in \mathcal{A}_r$ имеет обратное $z^{-1}z = zz^{-1} = 1$ (это не означает существования решения уравнения $(ab)z = a$ с $b \ne 0$ в общем на $\mathcal{A}_r$ для $r \ge 4$). В силу предложения 2.2.1 $\partial_z(\zeta - z)^{-k}.1 = k(\zeta - z)^{-k-1}$, так как $0 = (\partial_z 1).h = (\partial_z z^k z^{-k}).h = ((\partial_z z^k).h)z^{-k} + z^k((\partial_z z^{-k}).h)$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$ и $z \ne 0$, $z \in \mathcal{A}_r$. Как в §2.15 можно доказать, что $F(z) := \int_\gamma f(z)dz$, для любого спрямляемого пути γ в U, зависит лишь от начальной и конечной точек. Этот интеграл конечен, так как $\gamma([0,1])$ содержится в компактном каноническом замкнутом подмножестве $W \subset U$, на котором f ограничена. Поэтому, $(\partial \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta/\partial z).h = \hat{f}(z).h$ для любых $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_r$, $(\partial \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta/\partial \tilde{z}) = 0$ для любых $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_r$, где z_0 – отмеченная точка в U, так что z и z_0 принадлежат одной связной компоненте в U, так как $\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta = \hat{f}(z).\Delta z + \epsilon(\Delta z)|\Delta z|$, где $\lim_{\Delta z \to 0} \epsilon(\Delta z) = 0$ (см. §2.5). В частности, $\hat{f}(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$. Здесь $\hat{f}$ корректно определено для любого $f \in C^{1,0}(U, \mathcal{A}_r)$ (см. следствие 2.15.1) в силу непрерывной супердифференцируемости функционала интегрирования на $C^0(U, \mathcal{A}_r)$. Для данной $z \in \mathbf{U}$ выберем окрестность W удовлетворяющую условиям теоремы 3.9. Тогда существует спрямляемый путь $\psi \subset W$, так что $f(z)$ представляется формулой (3.10). Последний интеграл бесконечно дифференцируем по z, так что

$$(3.12) \quad 2\pi((\partial^k F(z)/\partial z^k).h)M = (\int_\psi F(\zeta)(\partial^k(\zeta - z)^{-1}/\partial z^k).h)d\zeta),$$

где $h \in \mathcal{A}_r^k$, в частности, для $h = (1, ..., 1) =: 1^{\otimes k}$:

$$(3.13) \quad 2\pi((\partial^k F(z)/\partial z^k).1^{\otimes k})M = k!(\int_\psi F(\zeta)(\zeta - z)^{-k-1}d\zeta),$$

где $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Для простоты обозначений мы можем опустить $1^{\otimes k}$ слева в (3.13). В частности, мы можем выбрать шар $W = B(a, R, \mathcal{A}_r) := \{\xi \in \mathcal{A}_r : |\xi - a| \le R\} \subset U$ для достаточно малого $R > 0$ и $\psi = \gamma + a$, где $\gamma(s) = \rho \exp(2\pi t M)$ с $t \in [0,1]$, $0 < \rho < R$. Если мы докажем, что $F(z)$ является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической, то очевидно её z-производная $f(z) = F'(z).1$ также будет $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической.

Если $r \geq 4$, то существуют различные вложения алгебры октонионов $\mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$ (см. §3.6.2).

Предположим, что существует ряд $f(z) := \sum_j a_j(z-z_0)^j b_j$ сходящийся для $|z-z_0| < \rho$, где a_j, b_j для любого j принадлежат одной и той же подалгебре $\Upsilon_a \hookrightarrow \mathbf{C}$, $0 \neq a \in \mathcal{A}_r$, коэффициенты разложения не зависят от вложения $\Upsilon_{a,z-z_0}$ в $\mathcal{A}_r$, в то время как $z-z_0$ варьируется в пределах одной и той же копии $\mathbf{K}$. Тогда это разложение выполняется для любого $z \in \mathcal{A}_r$ с $|z-z_0| < \rho$, так как различные вложения $\mathbf{K}$ (с генераторами $\{1, M_1, ..., M_7\} \hookrightarrow \mathcal{A}_r$, так что $|M_i| = 1$, $Re(M_iM_j) = 0$ и $|M_iM_j| = |M_i||M_j|$ для любого $i \neq j$) в $\mathcal{A}_r$ дают все возможные значения $z \in \mathcal{A}_r$ с $|z-z_0| < \rho$. Рассмотрим ψ, так что $\Upsilon_{\zeta-a,z-a}$ имеет вложение в $\mathbf{K}$ для любого $\zeta \in \psi$, что в итоге не является ограничительным в силу теоремы 2.15.

В силу последнего утверждения используя альтернативность $\mathbf{K}$, рассмотрим $z \in B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$ с $0 < \rho' < \rho$, тогда $|z-a| < |\zeta-a|$ для любого $\zeta \in \psi$ и $(\zeta - a - (z-a))^{-1} = (1-(\zeta-a)^{-1}(z-a))^{-1}(\zeta-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}((\zeta-a)^{-1}(z-a))^k(\zeta-a)^{-1}$, где $0 \notin \psi$. Поэтому,

$$(3.14) \quad 2\pi F(z)M = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(z),$$

$$\text{где } \phi_k(z) := (\int_{\psi} F(\zeta)((\zeta-a)^{-1}(z-a))^k(\zeta-a)^{-1}d\zeta).$$

Таким образом, $|\phi_k(z)| \leq \sup_{\zeta\in\psi}|F(\zeta)|(\rho'/\rho)^{-k}$ для любого $z \in B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$ и ряд (3.14) сходится равномерно на $B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$. Каждая функция $\phi_k(z)$ очевидно $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитична на $B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$, следовательно, также $F(z)M$ локально z-аналитична. Поскольку для любого $a \in U$ существует $\rho' > 0$, для которого это выполняется, то $F(z)M$ является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической функцией. Теперь запишем $f(z) = \sum_{s\in\mathbf{b}} f_s s$, где $f_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Если петля γ невырождена, тогда петли $s\gamma$, γs, $(2^r-2)^{-1}\{-\gamma + \sum_{s\in\hat{b}} s(\gamma s^*)\} = \tilde{\gamma}$ невырождены. Если

(i) $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$, то $\int_\gamma sf(\zeta)d\zeta = 0$ и $\int_\gamma f(\zeta)sd\zeta = 0$ (см. теорему 2.7). В силу формул 2.8.(2):
$f_1 = (f + (2^r-2)^{-1}\{-f + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(fs^*)\})/2$ и
$f_p = (i_p(2^r-2)^{-1}\{-f + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(fs^*)\} - fi_p)/2$
для любого $i_p \in \hat{b}_r$ (в случае $\mathcal{A}_\infty$ воспользуемся $\lim_{r\to\infty}$ справа в этих формулах, а для $\mathcal{A}_\Lambda$, $card(\Lambda) > \aleph_0$ можно использовать то, что для любого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$, содержащая это z) мы имеем, что условие (i) эквивалентно: $\int_\gamma f_s(\zeta)d\zeta = 0$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Поэтому, доказательство выше показывает, что каждая функция $2\pi f_s(z)M$ является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической, где M произвольно в $\mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Но $f_s(z) \in \mathbf{R}$ для любого $z \in U$, следовательно, $f_s(z) = (2\pi f_s(z)M)(2\pi)^{-1}M^* = f_s(z)$ является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической для любого $s \in \mathbf{b}$, следовательно, f является также $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической на U.

3.11. Замечание. Теоремы 2.11, 2.15, 2.16, 3.10 и следствие 2.13 обосновывают эквивалентность понятий $\mathcal{A}_r$-голоморфных, $\mathcal{A}_r$-интегрально голоморфных и $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитических классов функций на областях удовлетворяющих условиям выше.

3.11.1. Определения. Пусть U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ и $f \in C^0(U, \mathcal{A}_r)$, тогда мы скажем, что f обладает первообразной $g \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, если $g'(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$. Область U в $\mathcal{A}_r$ назовем $\mathcal{A}_r$-голоморфно односвязной, если каждая $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на ней обладает первообразной.

Из §3.10 мы получим.

3.11.2. Теорема. *Если $f \in C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$, $2 \le r \le \infty$, где U является $(2^r - 1)$-связной ($P_m(U)$ является $(2^m - 1)$-связной для любого $4 \le m \in \mathbf{N}$ при $r = \infty$, а при $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$ также при всевозможных вложениях $\mathcal{A}_\infty$ в $\mathcal{A}_\Lambda$ и всевозможных проекторах P_m); $\pi_{s,p,t}(U)$ просто связна в $\mathbf{C}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$ в $\mathbf{b}$, $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которых существует $z = t + u \in U$, U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$, тогда существует $g \in C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$, так что $g'(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$.*

3.11.3. Теорема. *Пусть U и V – это $\mathcal{A}_r$-голоморфно односвязные области в $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \le \infty$ со связным пересечением $U \cap V \ne \emptyset$. Тогда $U \cup V$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфно просто связной.*

3.12. Следствие. *Пусть U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$, $2 \le r \le \infty$, тогда семейство всех $\mathcal{A}_r$-голоморфных функций $f : U \to \mathcal{A}_r$ имеет структуру $\mathcal{A}_r$-алгебра.*

Доказательство. Если $f_1(z) = \alpha g(z)\beta + \gamma h(z)\delta$ или $f_2(z) = g(z)h(z)$ для любого $z \in U$, где α, β, γ и $\delta \in \mathcal{A}_r$ – постоянные, g и h являются $\mathcal{A}_r$-голоморфными функциями на U, тогда F_1 и F_2 являются дифференцируемыми по Фреше на U по $(w_s : s \in \mathbf{b})$ (см. §2.1 и §2.2) и $\partial_{\tilde z} f_1(z) = \alpha(\partial_{\tilde z} g)\beta + \gamma(\partial_{\tilde z} h)\delta = 0$, и $\partial_{\tilde z} f_2(z) = (\partial_{\tilde z} g)h + g(\partial_{\tilde z} h) = 0$, следовательно, f_1 и f_2 также $\mathcal{A}_r$-голоморфны на U.

3.13. Предложение. *Для любой комплексно голоморфной функции f в окрестности $Int(B(q_0, \rho, \mathbf{C}))$, $\infty > \rho > 0$, точки $q_0 \in \mathbf{C}$ и любого $2 \le r \le \infty$, $s \ne p \in \mathbf{b}_r$, существует $\mathcal{A}_r$ z-аналитическая функция g на окрестности $Int(B(a, \rho, \mathcal{A}_r))$ точки $a \in \mathcal{A}_r$, так что $s^* g_{s,p}(u, t_0) = f(v)$ на $Int(B(u_0, \rho, \mathbf{C}))$, $u = s(Re(v) + s^*(pIm_{\mathbf{C}}(v)))$, где $B(x, \rho, X) := \{y \in X : d_X(x, y) \le \rho\}$ – это шар в пространстве X с метрикой d_X, $a = u_0 + t_0$, $u_0 \in \mathbf{C}_{s,p}$, $t_0 \in \mathcal{A}_{r,s,p}$, $u_0 = s(Re(q_0) + s^*(pIm_{\mathbf{C}}(q_0)))$, $Im_{\mathbf{C}}(v) := (v - \tilde v)/(2i)$.*

Доказательство. Среди условий (2.3.1) имеются независимые:

(3.15) $\quad \partial F_1/\partial\, {}^j w_p = \partial F_{pq^*}/\partial\, {}^j w_q$,

$\partial F_1/\partial\, {}^j w_q = -\partial F_{pq^*}/\partial\, {}^j w_p$

для любого $p = i_m$, $q = i_{m+1} \in \mathbf{b}_r$, $0 \le m \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим однородную полиномиальную функция на открытом шаре $Int(B)$ в $\mathcal{A}_r$, так что $P_n(\lambda z) = \lambda^n P_n(z)$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$, $P_n : Int(B) \to \mathcal{A}_r$, тогда P_{n+1} можно записать в виде

(3.16) $\quad P_{n+1}(z) = \sum_{s \in \mathbf{b}_r; k; j_1, ..., j_k} C_{s;k;j_1,...,j_k} v_1^{j_1} ... v_k^{j_k} s$;

где $v_l := w_{i_l}$ – действительная переменная для любого l, $z = \sum_{s \in \mathbf{b}_r} w_s s$, $0 \le j_1 \in \mathbf{Z}, ..., 0 \le j_k \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N}$, $j_1 + ... + j_k = n + 1$, $C_{s;k;j_1,...,j_k} \in \mathbf{R}$ – действительный коэффициент разложения для любого $s, k, j_1, ..., j_k$. В силу (2.3.1) функция f является право суперлинейно $\mathcal{A}_r$-супердифференцируемой в точке z_0 тогда и только тогда, когда sf является право суперлинейно $\mathcal{A}_r$-супердифференцируемой в z_0 для любого $s \in \hat b_r$. Тогда (3.15) применённое к (3.16) дает условия на коэффициенты однородных полиномов давая его правосуперлинейную супердифференцируемость:

(3.17) $\quad C_{1;k;j_1,...,j_m+1,...,j_k}(j_m + 1) = C_{pq^*;k;j_1,...,j_{m+1}+1,...,j_k}(j_{m+1} + 1)$ и

$C_{1;k;j_1,...,j_{m+1}+1,...,j_k}(j_{m+1} + 1) = -C_{pq^*;k;j_1,...,j_m+1,...,j_k}(j_m + 1)$,

для любого $p = i_m$, $q = i_{m+1}$ in $\mathbf{b}_r$. Поскольку $j_l + 1 \ge 1$ для любого l, то коэффициенты справа выражаются через коэффициенты слева, которые могут быть взяты как свободные переменные. Поэтому, для любого $n \ge 0$ существует нетривиальный (ненулевой) P_{n+1} удовлетворяющий (3.15). Очевидно, $\mathbf{R}$-линейное пространство всех правосуперлинейно $\mathcal{A}_r$-супердифференцируемых функций бесконечномерно, так как для любого n существует нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений (3.17).

Рассмотрим сначала продолжение в классе $\mathcal{A}_r$-голоморфных функций с супердифференциалом, который необязательно правосуперлинеен на супер携алгебре $\mathcal{A}_r$. Поскольку f голоморфна в $Int(B(q_0, \rho, \mathbf{C}))$, то она имеет разложение $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q-q_0)^n$, где $f_n \in \mathbf{C}$ – коэффициенты разложения, $q \in Int(B(q_0, \rho, \mathbf{C}))$. Рассмотрим его продолжение на $Int(B(z_0, \rho, \mathcal{A}_r))$, так что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-z_0)^n$, $z_0 = u_0 + t_0$, $u_0 = s(Re(q_0) + s^*(pIm_{\mathbf{C}}(q_0)))$, $t_0 \in \mathcal{A}_{r,s,p}$. Очевидно, что этот ряд сходится для любого $z \in Int(B(z_0, \rho, \mathcal{A}))$ и это продолжение f является $\mathcal{A}_r$-голоморфным, так как $f_n \in \mathcal{A}_r$ для любого n и $\partial f/\partial \tilde{z} = 0$.

Рассмотрим теперь более узкий класс $\mathcal{A}_r$ голоморфных функций с правосуперлинейным супердифференциалом на супер態алгебре $\mathcal{A}_r$. Условия Коши-Римана для комплексно голоморфных функций являются частными случаями (частью) условий (3.15). Сгруппировав ряд для комплексно голоморфной функции f в ряд по однородным полиномам и применив (3.17), мы получим коэффициенты разложения для правосуперлинейно супердифференцируемого продолжения функции f на $Int(B(z_0, \rho, \mathcal{A}))$.

3.14. Предложение. *Если f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \le \infty$, а $ker(f'(z_0)) = \{0\}$ и $f'(z_0)$ является правосуперлинейной, тогда она является конформным отображением в отмеченной точке $z_0 \in U$, то есть, сохраняющей углы между дифференцируемыми кривыми. Если $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, то $ker(f'(z_0)) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \ne 0$.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in U$ и f является правосуперлинейно супердифференцируемой в z_0. Рассмотрим скалярное произведение $(*,*)_r$ в $\mathbf{C}^m$ как во введении, $m = 2^{r-1}$ для $r < \infty$, или в $l_2(\Lambda, \mathbf{C})$ наследуемое из $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) \ge \aleph_0$, где $(x,y)_{l_2} = \lim_{r\to\infty}(x_r, y_r)_r$ (см. также §3.6.2). Правосуперлинейному оператору $f'(z_0)$ соответствует единственный ограниченный оператор A на $\mathbf{C}^m$ или $l_2(\Lambda, \mathbf{C})$ соответственно, так что $ker(A) = \{0\}$, то есть, $Ah = 0$ тогда и только тогда, когда $h = 0$. Если $r = 3$, то A обратим тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \ne 0$, так как $f'(z_0) \in \mathcal{A}_r$ и $\mathbf{K}$ является альтернативной: $(ab)y = a$ имеет единственное решение y для любого $b \ne 0$ in $\mathbf{K}$. В силу полярного разложения (3.5) $f'(z_0) = \rho \exp(M)$, где $\rho > 0$ и $M \in \mathcal{I}_r$. Тогда сопряженный оператор A^* соответствует $\rho \exp(-M)$, но $\exp(-M)\exp(M) = 1$, следовательно, A является унитарным оператором: $A \in U(m)$ или $A \in U(\infty)$ соответственно. Поскольку унитарная группа сохраняет скалярное произведение, то $f(z)$ сохраняет угол α между двумя дифференцируемыми кривыми в U пересекающимися в отмеченной точке z_0: если ψ и $\phi : (-1,1) \to U$ являются двумя дифференцируемыми кривыми пересекающимися в точке $z_0 \in U$, то $f(\psi(\theta))' = f'(z)|_{z=\psi(\theta)}.\psi'(\theta)$, где $\cos(\alpha) = Re(\psi'(0), \phi'(0))/(|\psi'(0)||\phi'(0)|)$ при $\psi'(0) \ne 0$ и $\phi'(0) \ne 0$.

3.14.1. Замечание. Для любого $r \ge 4$ алгебра Кэли-Диксона не является алгеброй с делением, следовательно, условие $ker(f'(z_0)) = \{0\}$ необходимо в предложении 3.14.

3.15. Теорема. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией, $2 \le r \le \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, так что $\sup_{z\in U, h\in B(0,1,\mathcal{A}_r)} |[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{}.h| \le C/|\zeta - z|^2$ для любого $\zeta \in \mathcal{A}_r \setminus cl(U)$. Тогда $|f'(z)| \le C/d(z)$ для любого $z \in U$, где $d(z) := \inf_{\zeta\in\mathcal{A}_r\setminus U} |\zeta - z|$; $|f(\xi) - f(z)|/|\xi - z| \le 2C/\rho$ для любого ξ и $z \in B(a, \rho/2, \mathcal{A}_r) \subset Int(B(a, \rho, \mathcal{A}_r)) \subset U$, где $\rho > 0$. В частности, если f – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция с ограниченной $[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{}.h|\zeta - z|^2$ на $\mathcal{A}_r^2 \times B(0,1,\mathcal{A}_r)$ с $|\zeta| \ge 2|z|$, то есть, $\sup_{\zeta,z\in\mathcal{A}_r, |\zeta|\ge 2|z|, h\in B(0,1,\mathcal{A}_r)} |[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{}.h||\zeta - z|^2 < \infty$, Тогда f постоянна.*

Доказательство. В силу теоремы 3.9 существует спрямляемый путь γ в U, так что

$$(3.18) \quad (\partial^k f(z)M/\partial z^k).h = (2\pi)^{-1}(\int_{\gamma+z_0} f(\zeta)(\partial^k(\zeta - z)^{-1}/\partial z^k).hd\zeta)$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^k$, где $\gamma(t) = \rho' \exp(2\pi t M)$ с $t \in [0,1]$, $0 < \rho'$. Тогда, в частности, для $h = 1^{\otimes k}$, которое опустим для краткости, мы получим

$$(3.19) \quad (\partial^k f(z)M/\partial z^k) = k!(2\pi)^{-1}(\int_{\gamma+z_0} f(\zeta)(\zeta - z)^{-k-1} d\zeta).$$

Поэтому, $|f'(z)| \leq C/d(z)$, так как $|(\partial(\zeta - z)^{-1}/\partial z).s| = |\zeta - z|^{-2}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Поскольку $\int_\zeta^z df(z) = f(z) - f(\zeta)$, то $|f(\xi) - f(z)|/|\xi - z| \leq \sup_{z \in B(a,\rho/2,\mathcal{A}_r)}[C/d(z)] \leq 2C/\rho$, где $\rho' < \rho/2$, ξ и $z \in B(a,\rho/2,\mathcal{A}_r) \subset Int(B(a,\rho,\mathcal{A}_r)) \subset U$. Беря ρ стремящимся к бесконечности, если f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной с ограниченной $[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{.}h|\zeta - z|^2$ на $\mathcal{A}_r^2 \times B(0,1,\mathcal{A}_r)$ при $|\zeta| \geq 2|z|$, тогда $f'(z) = 0$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, так как f является локально z-аналитической и $\sup_{\zeta,z \in U, |\zeta| \geq 2|z|, h \in B(0,1,\mathcal{A}_r)} |[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{.}h||\zeta - z|^2 < \infty$ ограничен, следовательно, f постоянна на $\mathcal{A}_r$.

3.16. Замечание. Теоремы 3.9, 3.10 и 3.15 являются $\mathcal{A}_r$-аналогами теорем Коши, Морера и Лиувилля соответственно. Очевидно, что теорема 3.15 также выполняется для правосуперлинейной $\hat{f}(z)$ на $\mathcal{A}_r$ для любого $z \in U$ и с ограниченной $\hat{f}(z).h$ на $U \times B(0,1,\mathcal{A}_r)$ вместо $[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{.}h|\zeta - z|^2$.

3.17. Теорема. *Пусть $P(z)$ – полином на $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, так что $P(z) = z^{n+1} + \sum_{\eta(k)=0}^n (A_k, z^k)$, где $A_k = (a_{1,k}, ..., a_{m,k})$, $a_{j,l} \in \mathcal{A}_r$, $k = (k_1, ..., k_m)$, $0 \leq k_j \in \mathbf{Z}$, $\eta(k) = k_1 + ... + k_m$, $0 \leq m = m(k) \in \mathbf{Z}$, $m(k) \leq \eta(k) + 1$, $(A_k, z^k) := \{a_{1,k}z^{k_1}...a_{m,k}z^{k_s}\}_{q(m+\eta(k))}$, $z^0 := 1$. Тогда $P(z)$ имеет корень в $\mathcal{A}_r$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала $r < \infty$. Предположим, что $P(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$. Рассмотрим спрямляемый путь γ_R в $\mathcal{A}_r$, так что $\gamma_R([0,1]) \cap \mathcal{A}_r = [-R, R]$, а вне $[-R, R]$: $\gamma_R(t) = R\exp(2\pi t M)$, где M – это вектор в $\mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$, $0 \leq t \leq 1/2$. Выразим $\tilde{P}$ также через переменную z с использованием $z^* = (2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s \in \hat{b}_r} s(zs^*)\}$. Поскольку $\lim_{|z| \to \infty} P(z)z^{-n-1} = 1$, то в силу теоремы 2.11 $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} (P\tilde{P})^{-1}(z)dz = \int_{-R}^R (P\tilde{P})^{-1}(v)dv = \int_{-R}^R |P(v)|^{-2}dv \geq 0$. Но $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} (P\tilde{P})^{-1}(z)dz = \lim_{R \to \infty} \pi R^{-2n-1} = 0$. С другой стороны, $\int_{-R}^R |P(v)|^{-2}dv = 0$ тогда и только тогда, когда $|P(v)|^{-2} = 0$ для любого $v \in \mathbf{R}$. Это противоречит нашему предположению, следовательно, существует корень $z_0 \in \mathcal{A}_r$, то есть, $P(z_0) = 0$.

В случае $r = \infty$ можно воспользоваться тем, что $z = \lim_{r \to \infty} z_r$. При $card(\Lambda) \geq \aleph_0$ рассмотрим все коэффициенты полинома принадлежащие $\mathcal{A}_\Lambda$. Их множество конечно. Минимальная подалгебра S_p в $\mathcal{A}_\Lambda$ порожденная этими коэффициентами конечномерна над $\mathbf{R}$. Таким образом, можно взять ограничение $P(z)$ на S_p, в которой $P(z)$ имеет корень, а значит и в $\mathcal{A}_\Lambda$.

3.18. Теорема. *Пусть f – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$. Предположим, что $\epsilon > 0$ и K – это компактное подмножество в U. Тогда для любого $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, существует функция $g_M(z) = P_\infty(z) + \sum_{k=1}^\nu P_k[(z - a_k)^{-1}]$, $z \in \mathcal{A}_r \setminus \{a_1, ..., a_\nu\}$, $\nu \in \mathbf{N}$, где P_∞ и P_j – полиномы, $a_j \in Fr(U)$, $Fr(U)$ обозначает топологическую границу U в $\mathcal{A}_r$, так что $|f(z)M - g_M(z)| < \epsilon$ для любого $z \in \mathsf{K}$. Если $r = 2$ или $r = 3$, тогда это утверждение выполняется также для $M = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим кубы S_j с ребрами параллельными осям координат соответствующим каноническим базисным векторам, причем ребра имеют длину n^{-1} в $\mathcal{A}_r$. Положим $S := \cup_j S_j$, так что $\mathsf{K} \subset Int(S)$, где $n \in \mathbf{N}$ стремится к бесконечности. Поскольку f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной и K – компакт, то мы можем применить формулу (3.10) к каждому пути $\gamma \subset Fr(S_j)$ определённому направляющим вектором $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Можно усмотреть, что f можно равномерно аппроксимировать на

K суммой вида $\sum_{k=1}^{\mu}\{(a_{1,k}(\zeta_k - z)^{-1}a_{2,k})\}_{q(3)}$, где $a_{j,k} \in \mathcal{A}_r$, $\zeta_k \in Fr(S_j)$. Для данного $n \in \mathbf{N}$, если $b \in Fr(S_j)$, то существует $a \in Fr(U_j) \cup \partial B(0, \rho, \mathcal{A}_r)$, так что $|b - a| \le n^{-1}$. Если $z \in \mathsf{K}$ и $|z - a| \ge n^{-1}$, тогда ряд $(z - b)^{-1} = (\sum_{k=0}^{\infty}[(z - a)^{-1}(b - a)]^k)(z - a)^{-1}$ сходится равномерно на K и ясно, что fM можно аппроксимировать равномерно на K функцией такого вида. В частности, при $r = 2$ или $r = 3$ уравнение $(ab)y = a$ имеет решение для любого $b \ne 0$ в $\mathcal{A}_r$, что даёт аппроксимацию f посредством $g_M M^*$.

3.19. Замечание и определения. Рассмотрим одноточечную (Александровскую) компактификацию $\hat{\mathcal{A}}_r$ локально компактного топологического пространства $\mathcal{A}_r$ для $2 \le r \in \mathbf{N}$. Она гомеоморфна единичной 2^r-мерной сфере S^{2^r} в Евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{\mathbf{2^r+1}}$. В случае $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) \ge \aleph_0$ рассмотрим сферу S^Λ единичного радиуса с центром в 0 в $\mathbf{R} \oplus \mathcal{A}_\Lambda$, так что $\mathcal{A}_\Lambda$ топологически гомеоморфна $S^\Lambda \setminus \{(1, 0, 0, ...)\}$. Если ζ – это точка в S^{2^r} или в S^Λ отличная от $(1, 0, 0, ...)$, тогда прямая линия содержащая $(1, 0, 0, ...)$ и ζ пересекает π_S в конечной точке z, где π_S – это 2^r-мерное или $card(\Lambda)$-мерное соответственно подпространство над $\mathbf{R}$ ортогональное вектору $(1, 0, 0, ...)$ и касательное к S^{2^r} или S^Λ в южном полюсе $(-1, 0, 0, ...)$. Это определяет биективное непрерывное отображение из $S^{2^r} \setminus \{(1, 0, 0, ...)\}$ или $S^\Lambda \setminus \{(1, 0, 0, ...)\}$ на π_S, так что $(1, 0, 0, ...)$ соответствует точке в бесконечности. Поэтому каждая функция на подмножестве U в $\mathcal{A}_r$ как топологическое пространство можно рассмотреть на гомеоморфном подмножестве V в S^{2^r} или S^Λ. Бесконечномерная сфера S^Λ не является локально компактной относительно топологии нормы, но она компактна относительно слабой топологии наследуемой из $l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ (см. [9, 28]).

Пусть $z_0 \in \hat{\mathcal{A}}_r$ – отмеченная точка. Если функция f определена и $\mathcal{A}_r$-голоморфна на $V \setminus \{z_0\}$, где V – это окрестность точки z_0, тогда z_0 называется изолированной особой точкой для f.

Предположим, что f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией в $B(a, 0, \rho, \mathcal{A}_r) \setminus \{a\}$ для некоторого $\rho > 0$. Тогда мы скажем, что f имеет изолированную особенность в a. Пусть $B(\infty, \rho, \mathcal{A}_r) := \{z \in \hat{\mathcal{A}}_r$, так что $\rho^{-1} < |z| \le \infty\}$. Тогда мы скажем, что f имеет изолированную сингулярность в ∞, если она $\mathcal{A}_r$-голоморфна в некотором шаре $B(\infty, \rho, \mathcal{A}_r)$.

Пусть $f : U \to \mathcal{A}_r$ – это функция, где U – окрестность $z \in \hat{\mathcal{A}}_r$. Тогда f называется *мероморфной* в z, если f имеет изолированную сингулярность в z. Если U является открытым подмножеством в $\hat{\mathcal{A}}_r$, тогда f называется мероморфной в U, если f мероморфна в каждой точке $z \in U$. Если U – это область определения f и f мероморфна в U, тогда f называется мероморфной в U. Обозначим через $\mathbf{M}(U)$ множество всех мероморфных функций на U. Пусть f является мероморфной в области U в $\hat{\mathcal{A}}_r$. Точка

$$c \in \bigcap_{V \subset U, V \text{ замкнуто и ограничено}} cl(f(U \setminus V))$$

называется предельным значением f.

3.20. Предложение. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией, $2 \le r \le \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, с право $\mathcal{A}_r$-суперлинейным супердифференциалом на открытом связном подмножестве $U \subset \hat{\mathcal{A}}_r$ и предположим, что существует последовательность точек $z_n \in U$ имеющих предельную точку $z \in U$, так что $f(z_n) = 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$, тогда $f = 0$ всюду на U.*

Доказательство следует из локальной z-аналитичности f и того факта, что $f^{(k)}(z) = 0$ для любого $0 \le k \in \mathbf{Z}$ (см. определение 2.2, теоремы 2.11 и 3.10), когда $f'(z)$ является право $\mathcal{A}_r$-суперлинейной на U. Поэтому, f равна нулю на окрестности точки z. Максимальное подмножество в U, на котором f равна нулю открыто в U. С другой стороны, оно замкнуто, так как f непрерывна, следовательно, f равна нулю на U, так как U связно.

3.21. Теорема. *Пусть* $\mathbf{A}$ *обозначает семейство всех функций* f *таких, что* f *является* $\mathcal{A}_r$*-голоморфной на* $U := Int(B(a,\rho,R,\mathcal{A}_r))$, $3 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$ *с* $card(\Lambda) > \aleph_0$, *где* a *– отмеченная точка в* $\mathcal{A}_r$, $0 \le \rho < R < \infty$ *фиксированы. Пусть* $\mathbf{S}$ *обозначает подмножество в* $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, *так что для любого* $k \in \mathbf{S}$ *существует* $m(k) := \max\{j : k_j \ne 0, k_i = 0$ *для любого* $i > j\} \in \mathbf{N}$ *и пусть* $\mathbf{B}$ *– семейство конечных последовательностей* $b_k = (b_{k,1},...,b_{k,m(k)}; q(m(k)+\eta(k)))$, *так что* $b_{k,j} \in \mathcal{A}_r$ *для любого* $j = 1,...,n$, $n \in \mathbf{N}$, $q(m(k)+\eta(k))$ *(см. §2.1). Тогда существует биективное соответствие между* $\mathbf{A}$ *и* $\zeta \in \mathbf{B}^{\mathbf{S}}$, *так что*

$$(3.20) \qquad \lim_{m+\eta\to\infty} \sup_{z\in B(a,\rho_1,R_1,\mathcal{A}_r)} \sum_{k,m(k)=m,\eta(k)=\eta} |\{(b_k,(z-a)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}| = 0$$

для любых ρ_1 *и* R_1 *таких, что* $\rho < \rho_1 < R_1 < R$, *где* $\eta(k) := k_1+...+k_{m(k)}$, $\zeta(k) =: b_k = (b_{k,1},...,b_{k,m(k)}; q(m(k)+\eta(k)))$, $\{(b_k,z^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))} = \{b_{k,1}z^{k_1}...b_{k,m(k)}z^{k_{m(k)}}\}_{q(m(k)+\eta(k))}$ *для любого* $k \in \mathbf{S}$, *то есть,* $f \in \mathbf{A}$ *может быть представлена сходящейся последовательностью*

$$(3.21) \qquad f(z) = \sum_{b\in\zeta} \{(b_k,(z-a)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}.$$

Доказательство. Если выполнено условие (3.20), то ряд (3.21) сходится на $B(a,\rho',R',\mathcal{A}_r)$ для любых ρ' и R' таких, что $\rho < \rho' < R' < R$, так как ρ_1 и R_1 являются произвольными удовлетворяющими неравенству $\rho < \rho_1 < R_1 < R$ и $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ сходится для любого $|p| < 1$. В частности, беря $\rho_1 < \rho' < R' < R_1$ для $p = R'/R_1$ или $p = \rho_1/\rho'$. Поэтому, из (3.20) и (3.21) следует, что f представленная рядом (3.21) является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U.

Обратно, пусть f принадлежит семейству $\mathbf{A}$. В силу теорем 2.11 и 3.9 существуют две спрямляемые петли γ_1 и γ_2, так что $\gamma_2(t) = a + \rho'\exp(2\pi t M_2)$ и $\gamma_1(t) = a + R'\exp(2\pi t M_1)$, где $t \in [0,1]$, M_1 и $M_2 \in \mathcal{A}_r$ с $|M_1| = 1$ и $|M_2| = 1$, где $\rho < \rho' < R' < R$, потому что как и в §3.9 U может быть представлена как конечное объединение областей U_j, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 2.11 (см. также §3.6.5). Использование конечного числа спрямляемых путей w_j (соединяющих γ_1 и γ_2 внутри U_j) обходимых дважды в одном и обратном направлении приводит к заключению, что для любого $z \in Int(B(a,\rho',R',\mathcal{A}_r))$ функция $f(z)M$ с $M = M_1 = M_2$ представляется интегральной формулой:

$$(3.22) \qquad f(z)M = (2\pi)^{-1}\{(\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta-z)^{-1}d\zeta) - (\int_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta-z)^{-1}d\zeta)\}.$$

На γ_1 имеется неравенство: $|(\zeta-a)^{-1}(z-a)| < 1$, на γ_2 выполняется другое неравенство: $|(\zeta-a)(z-a)^{-1}| < 1$. В силу §3.6.2 как и в §3.10 рассматривая различные возможные вложения $\Upsilon_{\zeta-a,z-a} \subset \mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$ и используя свойство альтернативности алгебры октонионов $\mathbf{K}$, мы получим, что для γ_1 ряд

$$(\zeta-z)^{-1} = (\sum_{k=0}^{\infty}((\zeta-a)^{-1}(z-a))^k)(\zeta-a)^{-1}$$

сходится равномерно по $\zeta \in B(a,R_2+\epsilon,R_1,\mathcal{A}_r)$ и $z \in B(a,\rho_2,R_2,\mathcal{A}_r)$ для ζ и z, так что $\Upsilon_{\zeta-a,z-a} \hookrightarrow \mathbf{K}$, в то время как для γ_2 ряд

$$(\zeta-z)^{-1} = -(z-a)^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty}((\zeta-a)(z-a)^{-1})^k)$$

сходится равномерно по $\zeta \in B(a, \rho_1, \rho_2 - \epsilon, \mathcal{A}_r)$ и $z \in B(a, \rho_2, R_2, \mathcal{A}_r)$ для ζ и z таких, что $\Upsilon_{\zeta-a,z-a} \hookrightarrow \mathbf{K}$, для любого $\rho' < \rho_2 < R_2 < R'$ и любого $0 < \epsilon < \min(\rho_2 - \rho_1, R_1 - R_2)$, так как коэффициенты разложений по $((\zeta-a)^{-1}(z-a))$ в первом ряду и по $((\zeta-a)(z-a)^{-1})$ во втором ряду не зависят от типа вложения. Рассмотрим соответствующие γ_1 и γ_2, так что $\zeta \in \gamma_1$ или $\zeta \in \gamma_2$ соответственно и a, ζ, z подчиняются условию $\Upsilon_{\zeta-a,z-a} \hookrightarrow \mathbf{K}$, которое в итоге не является ограничительным в силу теоремы 2.15. Следовательно,

$$(3.23) \quad f(z)M = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_k(z) + \psi_k(z)), \text{ где}$$

$$\phi_k(z) := (2\pi)^{-1}\{\int_{\gamma_1} f(\zeta)(((\zeta - a)^{-1}(z-a))^k(\zeta-a)^{-1})d\zeta)\},$$

$$\psi_k(z) := (2\pi)^{-1}\{\int_{\gamma_2} f(\zeta)((z-a)^{-1}((\zeta-a)(z-a)^{-1})^k)d\zeta)\},$$

где $\phi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ являются $\mathcal{A}_r$-голоморфными функциями, следовательно, fM имеет разложение (3.21) в U, так как в силу §2.15 и §3.9 существует $\delta > 0$, так что интегралы для ϕ_k и ψ_k вдоль γ_1 и γ_2 те же для любого $\rho' \in (\rho_1, \rho_1 + \delta)$, $R' \in (R_1 - \delta, R_1)$.

Используя определение $\mathcal{A}_r$ интеграла вдоль пути, мы получим ряд (3.21) сходящийся на U. Варьируя $z \in U$ по $|z|$ и $Arg(z)$, мы получим, что ряд (3.21) абсолютно сходится на U, следовательно, (3.20) выполнено для fM. Поскольку $M \in \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, произвольно, тогда как и в доказательстве теоремы 3.10 мы получим утверждение этой теоремы для f.

3.22. Замечания и определения. Пусть γ является замкнутой кривой в $\mathcal{A}_r$. Существуют естественные проекции из $\mathcal{A}_r$ на комплексные плоскости: $\pi_s(z) = w_1 + w_s s$ для любого $s \in \hat{b}_r$, где $2 \le r \le \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, $z = \sum_{s \in \mathbf{b}_r} w_s s$ с действительной w_s для любого $s \in \mathbf{b}_r$. Поэтому, $\pi_s(\gamma) =: \gamma_s$ – это кривые в комплексных плоскостях $\mathbf{C_s}$ изоморфных $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}s$. Путь γ в $\mathcal{A}_r$ замкнут (петля, иными словами) тогда и только тогда, когда γ_s замкнут для любого $s \in \hat{b}_r$, то есть, $\gamma(0) = \gamma(1)$ и $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ соответственно. В каждой комплексной плоскости существует стандартное понятие комплексного топологического индекса $In(a_s, \gamma_s)$ петли γ_s в точке $a_s = \pi_s(a)$. Поэтому, существует вектор $In(a, \gamma) := \{In(a_s, \gamma_s) : s \in \hat{b}_r\}$, который мы назовем топологическим индексом петли γ в точке $a \in \mathcal{A}_r$. Этот топологический индекс инвариантен относительно гомотопий удовлетворяющих условиям теоремы 3.9.

Рассмотрим теперь стандартный замкнутый путь $\gamma(s) = a + \rho \exp(2\pi t n M)$, где $M \in \mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$, $n \in \mathbf{Z}$, $\rho > 0$, $t \in [0, 1]$. Тогда $\hat{I}n(a, \gamma) := (2\pi)^{-1}(\int_\gamma dLn(z-a)) = nM$ называется $\mathcal{A}_r$-индексом γ в точке a. Он инвариантен относительно гомотопий удовлетворяющих условиям теоремы 3.9. Более того, $\hat{I}n(h_1(ah_2), h_1(\gamma h_2)) = \hat{I}n(a, \gamma)$ для любых h_1 и $h_2 \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ таких, что $h_1(Mh_2) = M$. Для $M = \sum_{s \in \hat{b}_r} m_s s$ выполняется равенство $\hat{I}n(a, \gamma) = \sum_{s \in \hat{b}_r} In(a_s, \gamma_s) m_s s$ (принимая соответствующее соглашение для знаков индексов в каждой комплексной плоскости $\mathbf{C_s}$ и соглашение о положительном направлении обхода вдоль кривых). В силу свойств Ln для любой кривой ψ в $\mathcal{A}_r$ существует $\int_\gamma dLn(z-a) = 2\pi q M$ для некоторых $q \in \mathbf{R}$ и $M \in \mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$. Для петли ψ с точностью до композиции гомотопий, каждая из которых характеризуется гомотопиями в $\mathbf{C_s}$ для $s \in \hat{b}_r$ существует стандартная γ с генератором M, для которого $\hat{I}n(a, \gamma) = qM$, где $q \in \mathbf{Z}$. Поэтому, мы можем взять за определение $\hat{I}n(a, \psi) = \hat{I}n(a, \gamma)$. Определим также вычет мероморфной функции с изолированной особенностью в точке $a \in \mathcal{A}_r$ как

(i) $res(a,f)M := (2\pi)^{-1}(\int_\gamma f(z)dz)$, где $\gamma(t) = a + \rho \exp(2\pi tM) \subset V$, $\rho > 0$, $|M| = 1$, $M \in \mathcal{I}_r$, $t \in [0,1]$, f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на $V \setminus \{a\}$. Продолжим $res(a,f)M$ по формуле (i) на $\mathcal{I}_r$ как
(ii) $res(a,f)M := [res(a,f)(M/|M|)]|M|$, $\forall M \neq 0$; $res(a,f)0 := 0$,
когда $res(a,f)M$ конечен для любого $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Для $r = 2$ или $r = 3$ уравнение для $res(a,f)$ можно разрешить для любого $M \neq 0$.

Если f имеет изолированную особую точку $a \in \hat{\mathcal{A}}_r$, тогда коэффициенты b_k её ряда Лорана (см. §3.21) независимы от $\rho > 0$. Общий ряд называется a-рядом Лорана. Если $a = \infty$, то $g(z) := f(z^{-1})$ имеет 0-ряд Лорана с коэффициентами c_k такими, что $c_{-k} = b_k$. Пусть $\beta := \sup_{b_k \neq 0} \eta(k)$, где $\eta(k) = k_1 + ... + k_m$, $m = m(k)$ для $a = \infty$; $\beta = \inf_{b_k \neq 0} \eta(k)$ для $a \neq \infty$. Мы скажем, что f имеет устранимую особенность, полюс, существенную особенность в ∞ в соответствии с $\beta \leq 0$, $0 < \beta < \infty$, $\beta = +\infty$. Во втором случае β называется порядком полюса в бесконечности ∞. Для конечного a соответствующие случаи следующие: $\beta \geq 0$, $-\infty < \beta < 0$, $\beta = -\infty$. Если f имеет полюс в a, тогда $|\beta|$ называется порядком полюса в a.

Значение функции $\partial_f(a) := \inf\{\eta(k) : b_k \neq 0\}$ называется дивизором f в точке $a \neq \infty$, $\partial_f(a) := \inf\{-\eta(k) : b_k \neq 0\}$ для $a = \infty$, где $b_k \neq 0$ означает, что $b_{k,1} \neq 0,...,b_{k,m(k)} \neq 0$. Тогда $\partial_{f+g}(a) \geq \min\{\partial_f(a), \partial_g(a)\}$ для любого $a \in dom(f) \cap dom(g)$ и $\partial_{fg}(a) = \partial_f(a) + \partial_g(a)$. Для функции f мероморфной на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$ функция $\partial_f(p)$ по переменной $p \in U$ называется дивизором f.

3.23. Теорема. *Пусть U – открытая область в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, с n различными отмеченными точками $p_1, ..., p_n$, и пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на $U \setminus \{p_1, ..., p_n\} =: U_0$ и ψ – спрямляемая петля лежащая в U_0, так что U_0 удовлетворяет условиям теоремы 3.9 для любого $z_0 \in \{p_1, ..., p_n\}$. Тогда*

$$\int_\psi f(z)dz = 2\pi \sum_{j=1}^n res(p_j, f)\hat{I}n(p_j, \psi)$$

и $res(p_j, f)M$ является $\mathbf{R}$-однородным $\mathcal{I}_r$-аддитивным (по переменной M в $\mathcal{I}_r$) $\mathcal{A}_r$-значным функционалом для любого j.

Доказательство. Для любого p_j рассмотрим главную часть T_j ряда Лорана для f в окрестности p_j, то есть,
$T_j(z) = \sum_{k,\eta(k)<0} \{(b_k, (z-p_j)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}$, где $\eta(k) = k_1 + ... + k_n$ для $k = (k_1, ..., k_n)$ (см. теорему 3.21). Поэтому, $h(z) := f(z) - \sum_j T_j(z)$ – это функция имеющая $\mathcal{A}_r$-голоморфное продолжение на U. В силу теоремы 3.9 для $\mathcal{A}_r$-голоморфной функции g в окрестности V точки p и спрямляемой петли ζ выполняется равенство:

$$g(p)\hat{I}n(p, \zeta) = (2\pi)^{-1}(\int_\zeta g(z)(z-p)^{-1}dz)$$

(см. §3.22). Мы можем рассмотреть достаточно малые петли ζ_j вокруг каждой p_j с $\hat{I}n(p_j, \zeta_j) = \hat{I}n(p_j, \gamma)$ для любого $j = 1, ..., n$. Тогда $\int_{\zeta_j} f(z)dz = \int_{\zeta_j} T_j(z)dz$ для любого j. Представляя U_0 как конечное объединение открытых областей U_j и соединяя ζ_j с γ путями ω_j проходимыми в одном и обратном направлении как в теореме 3.9, мы получим

$$\int_\gamma f(z)dz + \sum_j \int_{\zeta_j^-} f(z)dz = 0,$$

следовательно,

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_j \int_{\zeta_j} f(z)dz = \sum_j 2\pi res(p_j, f)\hat{I}n(p_j, \gamma),$$

где $\hat{I}n(p_j,\gamma)$ и $res(p_j,f)$ инвариантны относительно гомотопий удовлетворяющих условиям теоремы 3.9. Поскольку $\int_{\zeta_j} g(z)dLn(z-p_j)$ является $\mathbf{R}$-однородным и $\mathcal{I}_r$-аддитивным функционалом относительно направляющего вектора $M\in\mathcal{I}_r$ петли ζ_j, тогда $res(p_j,f)M$ определённый формулой 2.22.(i,ii) является $\mathbf{R}$-однородным $\mathcal{I}_r$-аддитивным по аргументу M в $\mathcal{I}_r$.

3.24. Следствие. *Пусть f и T те же, что и в §3.23, тогда $res(p_j,f)M=res(p_j,T_j)M=res(p_j,\sum_{k,\eta(k)=-1}\{(b_k,(z-p_j)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}M$, в частности, $res(p_j,\{b(z-p_j)^{-1}c\}_{q(3)})M=\{bMc\}_{q(3)}$ для любых $b,c\in\mathcal{A}_r$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из §3.23, второе утверждение следует из левой и правой-$\mathcal{A}_r$-линейности интеграла вдоль пути, хотя он не является суперлинейным функциналом (см. теорему 2.7).

3.25. Следствие. *Пусть U – открытая область в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2\le r\le\infty$, с n различными точками $p_1,...,p_n$, пусть также f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на $U\setminus\{p_1,...,p_n\}=:U_0$, $p_n=\infty$, а U_0 удовлетворяет условиям теоремы 3.9 с петлями ψ, γ и любой $z_0\in\{p_1,...,p_n\}$. Тогда $\sum_{p_j\in U} res(p_j,f)M=0$.*

Доказательство. Если γ – это петля охватывающая p_1,...,p_{n-1}, тогда $\gamma^-(t):=\gamma(1-t)$, где $t\in[0,1]$, охватывает $p_n=\infty$ с положительным направлением обхода петли γ^- относительно p_n. Поскольку $\int_\gamma f(z)dz+\int_{\gamma^-}f(z)dz=0$, то мы получим из теоремы 3.23, что $\sum_{p_j\in U} res(p_j,f)M=0$ для любого $M\in\mathcal{I}_r$, следовательно, $\sum_{p_j\in U} res(p_j,f)M=0$ – это нулевой $\mathbf{R}$-гомогенный $\mathcal{I}_r$-аддитивный $\mathcal{A}_r$-значный функционал на $\mathcal{I}_r$.

3.26. Определения. Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией, $2\le r\le\infty$, на окрестности V точки $z\in\mathcal{A}_r$. Тогда нижняя грань: $\eta(z;f):=\inf\{k:k\in\mathbf{N},f^{(k)}(z)\ne0\}$ называется кратностью нуля функции f в точке z. Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2\le r\le\infty$ или $r=\Lambda$ с $card(\Lambda)>\aleph_0$. Предположим, что $w\in\hat{\mathcal{A}}_r$, тогда валентность $\nu_f(w)$ функции f в точке w – это по определению $\nu_f(w):=\infty$, когда множество $\{z:f(z)=w\}$ бесконечно, а в противном случае $\nu_f(w):=\sum_{z,f(z)=w}\eta(z;f)$.

3.26.1. Теорема. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-мероморфной право суперлинейно супердифференцируемой функцией на области $U\subset\hat{\mathcal{A}}_r$. Если $b\in\hat{\mathcal{A}}_r$ и $\nu_f(b)<\infty$, тогда b не является предельным значением f и множество $\{z:\nu_f(z)=\nu_f(b)\}$ является окрестностью точки b. Если $U\ne\hat{\mathcal{A}}_r$ или f не постоянна, то выполняется противоположное утверждение. Тем не менее, оно ложно, когда $f=const$ на $\hat{\mathcal{A}}_r$.*

3.26.2. Теорема. *Пусть U – собственное открытое подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2\le r\le\infty$, предположим также, что f и g – две непрерывные функции из $\bar{U}:=cl(U)$ в $\hat{\mathcal{A}}_r$, так что на топологической границе $Fr(U)$ области U они удовлетворяют неравенству $|f(z)|<|g(z)|$ для любого $z\in Fr(U)$. Предположим, что f и g являются $\mathcal{A}_r$-мероморфными функциями в U, а h – это единственное непрерывное отображение из $\bar{U}$ в $\hat{\mathcal{A}}_r$, так что $h|_E=f|_E+g|_E$, где $E:=\{z:f(z)\ne\infty,g(z)\ne\infty\}$, $[\partial Ln(h(z))/\partial z]$ право суперлинеен в U_{z_0} для любого нуля z_0 функции f и в $U_{z_0}\setminus\{z_0\}$ для любого поюса z_0, где U_{z_0} – это окрестность z_0, $z\in U_{z_0}$ или $z\in U_{z_0}\setminus\{z_0\}$ соответственно. Тогда $\nu_{g|_U}(0)-\nu_{g|_U}(\infty)=\nu_{h|_U}(0)-\nu_{h|_U}(\infty)$.*

Доказательства этих двух теорем аналогичны доказательствам теорем VI.4.1, 4.2 [13]. Для доказательства теоремы 3.26.2 рассмотрим функцию $\zeta(z,t):=tf(z)+g(z)$ для любого $z\in\bar{U}$ и любого $t\in[0,1]\subset\mathbf{R}$. Если z_0 – это полюс функции $h(z)$, то z_0 – это нуль функции $1/h(z)$. Согласно предположению теоремы 3.26.1, предложению 2.3 и теореме 3.9 $res(z_0,Ln(h))$ является право суперлинейным оператором для любого нуля или полюса z_0. С другой стороны существует $\delta > 0$, так что $\Delta_\gamma Arg(1 + tg^{-1}f) = 0$ для любого $t \in [-1, 1]$, когда ни один полюс или нуль функции g или f не принадлежит спрямляемой петле γ в U с $dist(\gamma, Fr(U)) < \delta$, где $dist(A, B) := \sup_{z\in A}(\inf_{\xi\in B} |\xi - z|) + (\sup_{\xi\in B} \inf_{z\in A} |\xi - z|)$. Тогда $\int_{z\in\gamma} dLn\zeta(z, t)$ – непрерывная функция по $t \in [0, 1]$ принимающая значения $2\pi nM$, где $M \in \mathcal{I}_r$ характеризует спрямляемую петлю γ содержащуюся в U, $|M| = 1$, $n \in \mathbf{Z}$, M не зависит от t. Для любого $\delta > 0$ можно выбрать спрямляемую петлю γ в U, так что $dist(\gamma, Fr(U)) < \delta$. Тогда применим теорему 3.23 к подходящим кускам области U, чьи границы не содержат нулей и полюсов функций f и g.

Из доказательства теоремы 3.26.2 мы получим.

3.26.3. Следствие. *Пусть предположения теоремы 3.26 выполнены может быть кроме условия правой суперлинейности* $[\partial Ln(h(z))/\partial z]$, *тогда* $\Delta_{\partial U} Arg(f) = \Delta_{\partial U} Arg(g) = \int_\gamma dLn(f(z))$, *где* γ *та же, что и в §3.26.2.*

3.27. Теорема. *Пусть* U *– открытое подмножество в* $\mathcal{A}_r^n$, $2 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$ *с* $card(\Lambda) > \aleph_0$, *тогда существует представление* $\mathbf{R}$*-линейного пространства* $C^\omega_{z,\tilde z}(U, \mathcal{A}_r)$ *локально* $(z, \tilde z)$*-аналитических функций на* U, *так что оно изоморфно* $\mathbf{R}$*-линейному пространству* $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$ *всех* $\mathcal{A}_r$*-голоморфных функций на* U.

Доказательство. Очевидно, что доказательство можно свести к случаю $n = 1$, методом математической индукции рассматривая локальные разложения в $(z, \tilde z)$-ряды по $({}^n z, {}^n\tilde z)$ с коэффициентами являющимися сходящимися рядами $({}^1 z, {}^1\tilde z, ..., {}^{n-1}z, {}^{n-1}\tilde z)$. Мы имеем
$\tilde z = (2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat b_r} s(zs^*)\}$ для любого $2 \le r < \infty$,
$\tilde z = \lim_{r\to\infty}(2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat b_r} s(zs^*)\}$ in $\mathcal{A}_\infty$.
следовательно, каждый полином по переменным $(z, \tilde z)$ также является полиномом только по z, более того, каждая полиномиальная локально $(z, \tilde z)$ аналитическая функция на U также является полиномиальной локально z-аналитической функцией на U. Тогда, если ряд по $(z, \tilde z)$ сходится в шаре $B(z_0, \rho, \mathcal{A}_r^n)$, тогда его ряд в z-представлении сходится в шаре $B(z_0, \rho', \mathcal{A}_r^n)$, где $\rho' = 2^r(2^r - 2)^{-1}\rho$ для любого конечного $r \ge 2$. При $r = \infty$ предельный переход дает $\rho' = \rho$. В случае $r = \Lambda$ для любого полинома существует подалгебра в $\mathcal{A}_\Lambda$ изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая все коэффициенты этого полинома, то есть, он характеризуется полностью своим ограничением на эту подалгебру.

Рассматривая базисные полиномы любого выбранного полиномиального базиса в $C^\omega_{z,\tilde z}(U, \mathcal{A}_r)$ мы получим (благодаря бесконечномерности этого пространства) полиномиальный базис в $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$. Это устанавливает $\mathbf{R}$-линейный изоморфизм между двумя этими пространствами. Более того, в таком представлении пространства $C^\omega_{z,\tilde z}(U, \mathcal{A}_r)$ можно положить $D_{\tilde z} = 0$, что дает для дифференциальных форм $\partial_{\tilde z} = 0$. Это приводит к дифференциальному и интегральному исчислению только относительно D_z и dz.

3.28. Теорема (Принцип аргумента). *Пусть* f *– это* $\mathcal{A}_r$*-голоморфная функция на открытой области* U *удовлетворяющей условиям §3.9,* $2 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$ *с* $card(\Lambda) > \aleph_0$, *пусть также* γ *– спрямляемая петля содержащаяся в* U, *где* $[\partial Ln(f(z))/\partial z]$ *является право суперлинейным в некоторой окрестности* U_{z_0} *для любого нуля* z_0 *функции* $f(z)$. *Тогда* $\hat{I}n(0; f\circ\gamma) = \sum_{\partial_f(a)\ne 0} \hat{I}n(a; \gamma)\partial_f(a)$.

Доказательство. Выполняется равенство $\hat{I}n(0; f \circ \gamma) = \int_{\zeta\in\gamma} dLn(f(\zeta)) = \int_0^1 dLn(f \circ \gamma(s)) = \int_\gamma f^{-1}(\zeta)df(\zeta)$. Пусть $\partial_f(a) = n \in \mathbf{N}$, тогда

$$(i) \quad [Ln(f(z))]'.h = n(z - a)^{-1}h + \phi(z)h \quad \forall h \in \mathcal{A}_r \text{ и}$$

$$(ii) \quad f(z) = \sum_{l,k;\ n_1+...+n_k=\partial_f(a),\ 0\le n_j\ \in \mathbf{Z},\ j=1,...,k} \{(z-a)^{n_1} g_{l,k,1;n_1,...,n_k}(z)$$
$$(z-a)^{n_2} g_{l,k,2;n_1,...,n_k}(z)...(z-a)^{n_k} g_{l,k,k;n_1,...,n_k}(z)\}_{q(n_1+...+n_k+k)},$$

где ϕ – $\mathcal{A}_r$-голоморфна на U_a, также $g_{l,p,k;n_1,...,n_k}(z)$ – это $\mathcal{A}_r$-голоморфные функции переменной z на U, так что $g_{l,p,k;n_1,...,n_k}(a) \ne 0$, где $l = 1,...,m$, $1 \le m \le 2^{r\partial_f(a)}$ для конечного r и любого $m \in \mathbf{N}$ для $r = \infty$ (см. §§2.8, 3.7, 3.21, 3.27), так как каждый член $\xi(z)\prod_{s\in \mathbf{b}_r}(w_s - w_{s,0})^{n_s}$ с $\sum_{s\in\mathbf{b}_r} n_s \ge \partial_f(a)$, $n_j \ge 0$, имеет такое разложение, где $2 \le r < \infty$, $\xi(z)$ – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на окрестности точки a, так что $\xi(a) \ne 0$.

При $r = \infty$ можно воспользоваться пределом $z = \lim_{r\to\infty} z_r$. При $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$ для любого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая z. Для γ существует последовательность спрямляемых петель γ_n равномерно сходящаяся к γ, причём для каждой γ_n существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая γ_n.

Предположим, что ψ – это петля такая, что $\hat{I}n(p,\psi) = 2\pi n M$, $|M| = 1$, $M \in \mathcal{I}_r$, $0 \ne n \in \mathbf{Z}$. Тогда можно задать путь $\psi^{1/n} =: \omega$ как петлю, для которой $\hat{I}n(p,\omega) = 2\pi M$ и $\omega([0,1]) \subset \psi([0,1])$. Тогда мы назовем $\omega^n = \psi$. То есть, $\hat{I}n(p,\psi^{1/n}) = \hat{I}(p,\psi)/n$. Последняя формула дает интерпретацию, когда $\hat{I}n(p,\psi)/n$ равен $2\pi q M$, где $0 \ne q \in \mathbf{Q}$. То есть, путь $\psi^{1/n}$ можно определить для любого $0 \ne n \in \mathbf{Z}$. Это означает, что γ можно представить как объединение путей ω_j, для любого из которых существует $n_j \in \mathbf{N}$ такое, что $\omega_j^{n_j}$ – петля.

Используя теоремы 3.23 на U и 3.26.2 на U_a для любого $a \in U$ с $\partial_f(a) \ne 0$, также используя формулы (i, ii), мы получим утверждение этой теоремы.

3.29. Теорема. *Если f имеет существенную особенность в точке a, то $cl(f(V)) = \hat{\mathcal{A}}_r$ для любого $V \subset dom(f)$, $V = U \setminus \{a\}$, где U – это окрестность точки a.*

Доказательство. Предположим, что утверждение этой теоремы ложно, тогда существовали бы $\rho > 0$ и $m > 0$, а также элемент $A \in \mathcal{A}_r$, так что f была бы z-аналитической в $B(a,0,\rho,\mathcal{A}_r)\setminus\{a\}$ и $|f(z) - A| \ge m$ для любого z такого, что $0 < |z-a| < \rho$. Если $\infty \notin cl(f(V))$, тогда существует $R > 0$, так что $A \notin cl(f(V))$ для любого $|A| > R$. Поэтому, функция $[f(z)-A]^{-1}$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфной в $B(a,0,\rho,\mathcal{A}_r)\setminus\{a\}$. Следовательно, $[f(z)-A]^{-1} = \sum_k \{(p_k,(z-a)^k)\}_{q(\eta(k)+m(k))}$, где в этой сумме $k = (k_1,...,k_{m(k)})$ с $k_j \ge 0$ для любого $j = 1,...,m(k) \in \mathbf{N}$, p_k – это конечные последовательности коэффициентов для $[f(z)-A]^{-1}$ как и в §3.21.

Если $D_z^n([f(z)-A]^{-1})|_{z=a} = 0$ для любого $n \ge 0$, то $[f(z)-A]^{-1} = 0$ в окрестности точки a. Поэтому, $[f(z)-A]^{-1} = \sum_{n_1+...+n_l=n}\{g_1 z^{n_1}...g_l z^{n_l}\}_{q(\eta(n)+l)}$ для некоторого n, так что $0 \le n \in \mathbf{N}$, $n_j \ge 0$ для любого $j = 1,...,l \in \mathbf{N}$, каждая g_j – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция (по z). Следовательно, беря обратные от обеих частей $[f(z)-A]$ и $(\sum_{n_1+...+n_l=n}\{g_1 z^{n_1}...g_l z^{n_l}\}_{q(\eta(n)+l)})^{-1}$, а также сравнивая их разложения в ряды, мы видим, что конечные последовательности b_k коэффициентов разложений для f имеют свойство $b_k = 0$ для любого $\eta(k) < -n$. Это противоречит гипотезе и доказывает теорему.

3.30. Определение. Пусть a и b – это две точки в $\mathcal{A}_r$, а θ – это стереографическая проекция действительной сферы S^{2^r} единичного радиуса с центром в нуле для $2 \le r < \infty$ или S^Λ для $r = \Lambda$ на $\hat{\mathcal{A}}_r$. Тогда $\chi(a,b) := |\phi(a) - \phi(b)|_Y$ называется струнной метрикой, где $\phi := \theta^{-1} : \hat{\mathcal{A}}_r \to S^m$, S^m вложено в $Y := \mathbf{R^{m+1}}$ для $m := 2^r$ с $r < \infty$ или в $\mathbf{R} \oplus l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ для $m = \Lambda$ с $r = \Lambda$ при $card(\Lambda) \ge \aleph_0$, $|*|_Y$ – это евклидова и гильбертова норма в Y соответсвенно.

3.30.1. Теорема. *Пусть U – это открытая область в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность функций мероморфных на U сходящаяся равномерно на U к f относительно струнной метрики. Тогда или f является постоянной ∞ или f мероморфна на U.*

3.30.2. Теорема. *Пусть $\{f_k : k \in \mathbf{N}\}$ - это последовательность мероморфных функций на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$, которая равномерно сходится относительно струнной метрики в U к f, $f \neq const$. Если $f(a) = b$ и $\rho > 0$ таковы, так $B(a,\rho,\mathcal{A}_r) \subset U$ и $f(z) \neq b$ для любого $z \in B(a,\rho,\mathcal{A}_r) \setminus \{a\}$, тогда существует $m \in \mathbf{N}$, так что значение валентности $f_k|_{B(a,\rho,\mathcal{A}_r)}$ в точке b равно $\eta(b; f) = \eta(a; f)$ для любого $k \geq m$.*

3.30.3. Замечание. Доказательства этих двух теорем являются формально теми же, что и доказательства теорем VI.4.3 и 4.4 [13]. Теоремы 3.26.2 и 3.30.2 являются $\mathcal{A}_r$ аналогами теорем Руше и Гурвица соответственно. Имеются также следующие $\mathcal{A}_r$ аналоги терем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса. Их доказательства аналогичны доказательствам теорем VIII.1.1 и 1.2 [13] соответственно. Однако, вторая часть теоремы Вейерштрасса не верна из-за некоммутативности $\mathcal{A}_r$, то есть, функция $h \in \mathbf{M}(U)$ с $\partial_h = \partial$ не обязательно представима в виде $h = fg$, где g является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U, а f – другая отмеченная функция $f \in \mathbf{M}(U)$, так что $\partial_f = \partial$.

3.31. Теорема. *Пусть U – непустое собственное открытое подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, пусть подмножество $A \subset U$ не содержит никакой предельной точки в U. Предположим, что существует функция $g_b \in \mathbf{M}(\hat{\mathcal{A}}_r)$ для любого $b \in A$ имеющая полюс в точке b и никакого другого. Тогда существует функция $f \in \mathbf{M}(U)$ $\mathcal{A}_r$-голоморфная на $U \setminus B$ и имеющая ту же главную часть в точке b, что и g_b. Если f такая функция, тогда каждая другая такая функция имеет вид $f + g$, где g – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на U.*

3.32. Теорема. *Пусть U – это собственное непустое открытое подмножество $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$. Предположим также, что $\partial : U \to \mathbf{Z}$ – это функция такая, что $\{\partial(z) \neq 0\}$ не имеет предельной точки в U. Тогда существует $f \in \mathbf{M}(U)$ такая, что $\partial_f = \partial$.*

Доказательство. Если a_j – это нуль, то есть, $\partial(a_j) \neq 0$, Тогда возьмём окружность радиуса $\delta_j > 0$ с центром в точке a_j. Возможны два случая: $|a_j|\delta_j \geq 1$ и $|a_j|\delta_j < 1$. В точке a_j первого типа построим в U мероморфную функцию $g(z)$ с главной частью $g_j(z) = n_j(z-a_j)^{-1}$, $n_j = \partial(a_j)$, $g(z) := \sum_{j=1}^{\infty}(g_j(z) - h_j(z))$, где $h_j(z) := -n_j \sum_{p=1}^{k_j}(a_j^{-1}z)^{p-1}a_j^{-1}$. Выберем k_j, так что в каждом ограниченном каноническом замкнутом подмножестве V в $\mathcal{A}_r$, $V \subset U$, ряд для g равномерно сходится. В точке a_j второго типа построим
$g_j(z) := n_j \sum_{p=0}^{\infty}(z-b_j)^{-1}[(a_j-b_j)(z-b_j)^{-1}]^p$ и
$h_j(z) := n_j \sum_{p=0}^{k_j}(z-b_j)^{-1}[(a_j-b_j)(z-b_j)^{-1}]^p$,
где $|a_j - b_j| < |z - b_j|$, a_j, b_j, z удовлетворяют условию $\Upsilon_{a_j-b_j,z-b_j} \hookrightarrow \mathbf{K}$, которое в итоге не является ограничительным в силу теоремы 2.15. Выберем k_j, так что для любого z с $|z-b_j| \geq R > \delta_j$ мы имеем $|g_j(z) - h_j(z)| = |n_j \sum_{p=k_j+1}^{\infty}(z-b_j)^{-1}[(a_j-b_j)(z-b_j)^{-1}]^p| \leq n_j \sum_{p=k_j+1}^{\infty}|(a_j-b_j)^p R_j^{-p-1}| < \epsilon_j$, где $\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_j < \infty$ сходится, $R_j > 0$ – это постоянная для любого j. Эти ряды по $(a_j^{-1}z)^p a_j^{-1}$ или по $(z-b_j)^{-1}[(a_j-b_j)(z-b_j)^{-1}]^p$, $p = 0, 1, 2, ...$, имеют действительные коэффициенты независимые от типа вложения $\mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$, где $z \in \Upsilon_{a_j,b_j,z_1} \hookrightarrow \mathbf{K} \hookrightarrow \mathcal{A}_r$ для любой данной точки $z_1 \in \mathcal{A}_r$ с переменной z в пределах данной копии октонионной подалгебры $\mathbf{K}$, следовательно, они могут

быть продолжены на соответствующие шары в $\mathcal{A}_r$. Теперь проинтегрируем $g(\zeta)$ вдоль спрямляемого пути γ в U, который не содержит ни одной точки a_j, $\gamma(0)=z_0$, $\gamma(1)=z$. Тогда $\int_{z_0}^z g(\zeta)d\zeta=\sum_{j=1}^\infty [w_j(z)-w_j(z_0)]$, так что $f_1(z):=\exp(\int_{z_0}^z g(\zeta)d\zeta)$ не зависит от пути (см. теоремы 2.15 и 3.8.3, а также следствия 3.4, 3.4$'$ и §3.6.5 выше), где
$\exp(w_j(z))=((1-a_j^{-1}z)\exp(\sum_{p=1}^\infty (a_j^{-1}z)^p/p]))^{n_j}$ в первом случае,
$\exp(w_j(z))=([(z-a_j)(z-b_j)^{-1}]\exp(\sum_{p=1}^\infty [(a_j-b_j)(z-b_j)^{-1}]^p/p))^{n_j}$ во втором случае, но w_j и w_l в общем не коммутируют для $j\ne l$. Сходимость ряда аналогична сходимости ряда в теореме 25 [2] в комплексном случае. Две функции удовлетворяющие теореме 3.32 не обязаны отличаться на $\mathcal{A}_r$-голоморфный множитель в отличии от комплексного случая, так как, например, $\zeta_j:=\{f_1...f_jgf_{j+1}...f_n\}_{q(n)}$ с различными $j=a$ и $j=b$ в $\{1,...,n\}\subset \mathbf{N}$ не коррелируют: $\zeta_a\ne\{h\zeta_bk\}_{q(3)}$ в общем для любых $\mathcal{A}_r$-голоморфных функций h и k на U, где каждая f_l имеет нуль порядка $n_l>0$ в точке a_l, $n\ge 2$. Более того, для $r\ge 3$ имеется также зависимость от порядка умножения $\{*\}_{q(n)}$.

3.33. Теорема. *Пусть U – открытая область в $\mathcal{A}_r$, $2\le r\le\infty$ или $r=\Lambda$ с $card(\Lambda)>\aleph_0$, а f – это функция $\mathcal{A}_r$-голоморфная на U с право суперлинейным супердифференциалом на U. Предположим, что f не постоянна на $B(a,\rho,\mathcal{A}_r)\subset U$, где $0<\rho<\infty$. Тогда $f(B(a,\rho,\mathcal{A}_r))$ – окрестность точки $f(a)$ в $\mathcal{A}_r$.*

3.34. Замечания. Для нескольких $\mathcal{A}_r$ переменных кратный $\mathcal{A}_r$ интеграл $\mathbf{I}:=\{\int_{\gamma_n}...\int_{\gamma_1} f({}^1z,...,{}^nzd\,{}^1z...d\,{}^nz\}_{q(n)}$ можно естественным образом рассмотреть для спрямляемых путей γ_1,...,γ_n в $\mathcal{A}_r$, $3\le r\le\infty$, где $2\le r<\aleph_0$ или $r=\Lambda$ с $card(\Lambda)\ge\aleph_0$, $\{*\}_{q(n)}$ обозначает порядок скобок в последовательных интегрированиях (см. также §2.1). В общем, порядок интегрирования важен, так как существование частной производной $\partial^n g({}^1z,...,{}^nz)/\partial\,{}^1z...\partial\,{}^nz$ не влечёт за собой существования непрерывной $g^{(n)}$ и как показывает предложение 3.8.5 порядок дифференцирования в общем случае влияет на результат, например, даже в случае g соответствующей $f:=\{f_1\circ...\circ f_n\}_{q(n)}$ с $f_n({}^1z,...,{}^nz)$ со значениями в $\mathcal{A}_r^{n-1}$, $f_{n-1}({}^1z,...,{}^{n-1}z)$ со значениями в $\mathcal{A}_r^{n-2}$, ...,$f_2({}^1z,{}^2z)$ и $f_1({}^1z)$ со значениями в $\mathcal{A}_r$, $\{\partial^n g({}^1z,...,{}^nz)/\partial\,{}^1z...\partial\,{}^nz\}_{q(n)}.1^{\otimes n}=f({}^1z,...,{}^nz)$ (см. также §2.7). Поэтому, существует естественное обобщение теоремы 3.9 для нескольких $\mathcal{A}_r$ переменных:

$$(i)\quad (2\pi)^n f(z_0)\{M_1...M_n\}_{q(n)}=$$

$$\{\int_{\psi_n}...\int_{\psi_1} f({}^1\zeta,...,{}^n\zeta)({}^1\zeta-{}^1z_0)^{-1}d\,{}^1\zeta)...({}^n\zeta-{}^nz_0)^{-1}d\,{}^n\zeta)\}_{q(n)}$$

для соответствующего открытого подмножества $U={}^1U\times...\times{}^nU$, где ψ_j и ${}^jU$ удовлетворяет условиям теоремы 3.9 для любого j, а f – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на U.

Благодарности

Автор искренне благодарен Научному Фламандскому Обществу за поддержку проекта "Некоммутативная геометрия: от алгебры к физике" и профессору Ф. ван Ойстаену за его интерес и плодотворные обсуждения работы.

Литература

[1] J. C. Baez. "The octonions". Bull. Amer. Mathem. Soc. **39: 2** (2002), 145-205.

[2] H. Behnke, F. Sommer. "Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen" (Springer-Verlag: Berlin, 1972).

[3] Ya. I. Belopolskaya, Yu. L. Dalecky. "Stochastic equations and differential geometry" (Kluwer Acad. Publ.: Dordrecht, 1990).

[4] F. A. Berezin. "Introduction to superanalysis" (D. Reidel Publish. Comp., Kluwer group: Dordrecht, 1987).

[5] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen. "Clifford analysis" (London: Pitman, 1982).

[6] A. Connes. "Noncommutative geometry" (Academic Press: San Diego, 1994).

[7] B. DeWitt. "Supermanifolds" 2d ed. (Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1992).

[8] G. Emch. "Mèchanique quantique quaternionienne et Relativitè restreinte". Helv. Phys. Acta **36**, 739-788 (1963).

[9] Р. Энгелькинг. "Общая топология" (Мир: Москва, 1986).

[10] G. Grubb. "Functional calculus of pseudodifferential boundary problems" (Birkhäuser: Boston, 1996).

[11] F. Gürsey, C.-H. Tze. "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics" (World Scientific Publ. Co.: Singapore, 1996).

[12] У. Р. Гамильтон. "Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы" (Наука: Москва, 1994).

[13] M. Heins. "Complex function theory" (Acad. Press: New York, 1968).

[14] L. Hörmander. "The analysis of linear partial differential operators" (V. **3**; Springer-Verlag: Berlin, 1985).

[15] L. Hörmander. "An introduction to complex analysis in several variables" (3rd ed.; Nort-Holland: Amsterdam, 1990).

[16] J. R. Isbell. "Uniform neighborhood retracts". Pacif. J. Mathem. **11** (1961), 609-648.

[17] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. "Hypercomplex numbers" (Berlin: Springer, 1989).

[18] A. Khrennikov. "Superanalysis", (Series "Mathem. and its Applic."; V. **470**; Kluwer: Dordrecht, 1999).

[19] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. "Элементы теории функций и функционального анализа" (Наука: Москва, 1989).

[20] Encyclop. of Math. Sci. **V. 11** "Algebra". A. I. Kostrikin, J. R. Shafarevich (Eds.) (Springer-Verlag: Berlin, 1990).

[21] А. Г. Курош. "Лекции по общей алгебре" (Москва: Наука, 1973).

[22] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. "Spin geometry" (Princeton: Princ. Univ. Press, 1989).

[23] S. V. Lüdkovsky. "Generalized Loop Groups of complex manifolds, Gaussian Quasi-Invariant Measures on them and their Representations". J. of Math. Sciences **122: 1**, 2984-3011, 2004 (см. также более раннюю версию: Los Alamos National Laboratory, USA. Preprint **math.RT/9910086**, 18 October 1999).

[24] С. В. Людковский. "Гауссовы меры на пространствах свободных петель". Усп. Матем. Наук. **56 : 5**, 183-184, 2001.

[25] С. В. Людковский. "Стохастические процессы на группах диффеоморфизмов и петель действительных, комплексных и неархимедовых многообразий". Фундам. и Прикл. Матем. **7: 4**, 1091-1105 (2001) (см. также Los Alamos National Laboratory, USA. Preprint **math.GR/0102222**, 35 pages, 28 February 2001).

[26] S. V. Lüdkovsky. "Poisson measures for topological groups and their representations". Southeast Asian Bull. Math. **25: 4**, 653-680 (2002).

[27] S. V. Lüdkovsky, F. van Oystaeyen. "Differentiable functions of quaternion variables". Bull. Sci. Math. (Paris). Ser. 2. **127** (2003), 755-796.

[28] L. Narici, E. Beckenstein. "Topological vector spaces" (Marcel-Dekker: New York, 1985).

[29] F. van Oystaeyen. "Algebraic geometry for associative алгебрас" (Series "Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem."; V. **232**; Marcel Dekker: New York, 2000).

[30] H. Rothe. "Systeme Geometrischer Analyse" in: "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie", 1277-1423 (Leipzig: Teubner, 1914-1931).

[31] E. H. Spanier. "Algebraic topology" (Acad. Press: New York, 1966).

[32] E. M. Stein. "Singular integrals and differentiability properties of functions" (Princ. Univ. Press: New Jersey, 1970).

[33] H. Triebel. "Interpolation theory. Function spaces. Differential operators" (Deutsche Verlag: Berlin, 1978).

[34] B. L. van der Waerden. "A history of algebra" (Springer-Verlag: Berlin, 1985).

[35] J. P. Ward. "Quaternions and Cayley numbers". Ser. Math. and its Applic. **403** (Dordrecht: Kluwer, 1997).

[36] S. H. Weintraub. "Differential forms" (Academic Press: San Diego, 1997).