КВАТЕРНИОНЫ И НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА

В. Н. Кутрунов, З. С. Кутрунова

Тюменский государственный университет
vkutrunov@utmn.ru

Для кватернионных аналитических функций построены специальные интегральные тождества, позволившие изучить спектральные свойства ряда интегральных операторов теории потенциала и теории упругости, сконструировать новые интегральные уравнения для классической задачи восстановления векторного поля, разработать технику регуляризации некоторых сингулярных интегральных уравнений.

Известно, какую роль сыграли числа в современной цивилизации. На них базируется все современное логическое мышление, современная техника. Числа проникли во все сферы человеческой деятельности, привели к компактным формам рассуждений и к многим открытиям как в гуманитарной, так и в естественной сферах человеческой жизни. Развитие чисел насчитывает много тысяч лет и понятно, что человечество стало интересоваться, нельзя ли придумать объекты более сложной, чем числа, природы, но сохраняющие в основном их свойства. Цель в том, чтобы научиться мыслить с помощью более крупных структур, опуская мелкие детали. Удалось получить множество видов обобщений чисел, которые действительно оказались плодотворными. Среди них комплексные числа, на основе которых была построена теория функций комплексного переменного и, в частности, теория аналитических функций. На аналитические функции можно было смотреть, как на функции одного комплексного переменного, что позволяло сначала эвристически переносить, а затем и доказывать многие свойства, характерные для функций одной действительной переменной. Теория функций комплексного переменного была разработана для функций, заданных на плоскости и оказалась очень плодотворной. Было желательно построить аналогичные подходы к трехмерному пространству. Процесс был начат У. Р. Гамильтоном, который ввел понятие кватернионов. Из этой теории позже было выделено понятие скалярного и векторного произведений, которые сами по себе оказались интересными, и кватернионы на некоторое время были забыты.

Однако, при изучении свойств трехмерного физического пространства исследователи замечали, что его свойства делятся на скалярные и векторные. Оказалось, что эти свойства не целесообразно и даже затруднительно изучать отдельно. Вновь возникла необходимость в объектах более сложной природы, чем комплексные числа, произошел возврат к кватернионам и к другим, еще более сложным структурам. Кватернионы и кватернионные функции развивались по схеме теории функций комплексного переменного с естественными поправками на трехмерность пространства. К настоящему времени по соответствующей тематике опубликовано большое количество работ физиков, математиков, механиков, философов. Кватернионы и кватернионные функции используются для описания электромагнитных полей, для решения задач ориентации космических аппаратов, в задачах геофизики и сейсморазведки, в механике деформируемого тела, в теории фракталов и многих других науках. Нет никакого сомнения в том, что использование кватернионных функций в теоретических и практических исследованиях является сегодня актуальной задачей. В данной заметке вводятся кватернионные аналитические функции и предлагаются некоторые их применения для исследования свойств интегральных операторов.

Будем считать, что известны как свойства, так и операции над кватернионами. Определим кватернионные аналитические функции (К-аналитические функции). Пусть $\{x_1, x_2, x_3\}$ – радиус-вектор некоторой точки в евклидовом пространстве E_3. Поставим ему в соответствие мнимый кватернион $x = x_i e_i$. Здесь по индексу i осуществляется суммирование до трёх и e_i – мнимые единицы кватерниона. По аналогии с вектор-функциями введем кватернион-функции: $q(x) = p_0\,(x_1, x_2, x_3) + p_i\,(x_1, x_2, x_3)\,e_i = p_0 + p$ и символический мнимый кватернион, оператор дифференцирования Гамильтона: $\nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Правило действия оператора ∇ на функцию q в соответствии с распределительным законом будет следующим $\nabla q = \nabla p_0 + \nabla p$. Здесь

$$\nabla p_0 = e_i \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \tag{1}$$

и произведение ∇p двух мнимых кватернионов может быть представлено через скалярное и векторное произведение

$$\nabla p = -\nabla \bullet p + \nabla \times p, \tag{2}$$

где $\nabla \bullet p$ – скалярная функция-дивергенция вектора p, а $\nabla \times p$ – векторная функция-ротор вектора p. Справа операции выполняются в соответствии с векторным исчислением, а результат интерпретируется как кватернионная функция. То есть, величины e_i интерпретируются как орты ортогональной декартовой системы координат везде, где присутствуют операции векторного исчисления и как мнимые единицы кватерниона в других случаях. Выражения (1) и (2) позволяют записать произведение ∇q в форме

$$\nabla q = -\nabla \bullet p + \nabla p_0 + \nabla \times p. \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что результатом произведения ∇q является кватернион, действительная часть которого равна $-\nabla \bullet p + \nabla p_0$, а мнимая $\nabla \times p$. Рассмотрим множество кватернион-функций q, удовлетворяющих условию

$$\nabla q = 0 \tag{4}$$

В этом равенстве должна равняться нулю отдельно действительная и мнимая части кватерниона ∇q, то есть

$$\begin{cases} \nabla \bullet p = 0 \\ \nabla p_0 + \nabla \times p = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Более детальная запись равенств (5) с учетом скалярного и векторного произведений дает:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = 0 \tag{6}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial p_3}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + \frac{\partial p_1}{\partial x_3} - \frac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial P_0}{\partial x_3} + \frac{\partial p_2}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Пусть, в частности, $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = p_3(x, y)$, $p_0 = p_0(x, y)$. В этом случае кватернион имеет вид комплексной функции

$$q(x, y) = p_0(x, y) + e_3 p_3(x, y) \tag{8}$$

с мнимой единицей e_3. Соотношение (6) удовлетворяется тождественно, а из (7) получается

$$\begin{cases} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial p_3}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p_0}{\partial x_2} - \frac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Уравнения (9) являются известными условиями Коши-Римана для комплексной функции q. Следовательно, в данном случае она является аналитической функцией. Рассмотренный частный случай показывает, что множество кватернион-функций q, удовлетворяющих условию (4), включает в себя множество аналитических функций.

Определение 1. *Множество кватернион-функций, удовлетворяющих условию* (4)*, называется кватернион-аналитическими (К-аналитическими) функциями.*

Для К-аналитических функций справедлива следующая почти очевидная теорема:

Теорема 1. *Пусть кватернион-функция q является К-аналитической в области $D^+(D^-)$, тогда каждая компонента этой функции является гармонической функцией.*

Из теоремы следует, что К-аналитические функции включают в себя гармонические функции. К-аналитические функции обладают многими свойствами, похожими на свойства аналитических функций в теории функций комплексного переменного. В частности, для них может быть построен аналог интеграла Коши и типа Коши. Аналог интеграла Коши имеет вид:

$$\int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|} nq\left(x\right) d_x S = \begin{cases} 0, \quad y \in D^- \\ 2\pi q\left(y\right), \quad y \in S \\ 4\pi q\left(y\right), y \quad \in D^+ \end{cases} \tag{10}$$

Напомним, что все операции в этой формуле выполняются по правилам операций кватернионов. Под n здесь понимается мнимый кватернион, компонентами которого являются направляющие косинусы нормали в точке $x \in S$. Для $y \in S$ интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, причём в этом случае предполагается, что поверхность S является ляпуновской, а кватернионная плотность q удовлетворяет условию Гёльдера. Аналог интеграла типа Коши в поле произвольных (уже не К-аналитических) кватернионных функций q имеет вид:

$$Q\left(y\right) = \int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|} nq\left(x\right) d_x S, \quad y \in D^{\pm}. \tag{11}$$

Функция Q является К-аналитической. Поэтому её предельные граничные значения $Q^{\pm}$ должны удовлетворять соотношениям Коши:

$$\int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|} nQ^+\left(x\right) d_x S = 2\pi Q^+(y), \quad y \in S, \tag{12}$$

$$\int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|} nQ^-\left(x\right) d_x S = 2\pi Q^-(y), \quad y \in S \tag{13}$$

Вводя оператор

$$Aq = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|} nq\,(x)\, d_x S, \tag{14}$$

формулы (12) и (13) запишем в виде

$$AQ^+ = Q^+, \quad AQ^- = -Q^-. \tag{15}$$

С помощью предельного перехода и оператора A граничные значения $Q^{\pm}$ можно записать в виде

$$Q^{\pm} = \pm 2\pi q + 2\pi Aq.$$

Подставляя эти значения в граничный интеграл Коши (12) или (13) и проводя необходимые сокращения, получим одинаковый результат:

$$A^2 q = q. \tag{16}$$

Равенство (16) – фундаментальное тождество кватернионной теории аналитических функций. Заметим, что на основе кватернионных подходов оно практически в одно и то же время и независимо было получено [4], [8]. Однако позже было установлено, что в матричной форме оно было получено и исследовалось Бицадзе А. В. [11]. Обозначим $Aq = p$, тогда из (16) следует $Ap = q$. В интегральной форме эта пара кватернионных преобразований имеет вид:

$$\begin{aligned} q\,(y) &= \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_S \nabla \tfrac{1}{|r|} np\,(x)\, d_x S, \\ p\,(y) &= \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_S \nabla \tfrac{1}{|r|} nq\,(x)\ d_x S. \end{aligned} \tag{17}$$

Пользуясь векторной интерпретацией, эти кватернионные равенства можно представить в действительном виде. Приравнивая действительные и мнимые части левых и правых частей первого равенства, найдем

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2\pi} \int\limits_S \left[-\nabla \tfrac{1}{|r|} \bullet np_0 - \left(\nabla \tfrac{1}{|r|} \times n \right) \bullet p \right] d_x S = q_0 \\ &\tfrac{1}{2\pi} \int\limits_S \left[\nabla \tfrac{1}{|r|} \times np_0 - \left(\nabla \tfrac{1}{|r|} \bullet n \right) p + \left(\nabla \tfrac{1}{|r|} \times n \right) \times p \right] d_x S = q \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь под p, q понимаются мнимые части кватернионов $p(x)$, $q(x)$, которые теперь интерпретируются как вектора (т. е. мнимые части кватернионов обозначены теми же буквами, что и сами кватернионы). Аналогичные соотношения для второго уравнения (17) получается из (18) переменой местами букв $p \leftrightarrow q, p_0 \leftrightarrow q_0$.

Введем интегральные операторы B, C, F, D, среди которых только первый будет несобственным, если интеграл рассматривается на ляпуновской поверхности, а прочие будут сингулярными:

$$\begin{aligned} Bp_0 &= \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_S \nabla \tfrac{1}{|r|} \bullet np_0 d_x S \\ Cp_0 &= \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_S \nabla \tfrac{1}{|r|} \times np_0 d_x S \\ Fp &= \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_S \left(\nabla \tfrac{1}{|r|} \times n \right) \bullet p d_x S \\ Dp &= \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_S \left[-\nabla \tfrac{1}{|r|} \bullet np + \left(\nabla \tfrac{1}{|r|} \times n \right) \times p \right] d_x S \end{aligned} \tag{19}$$

тогда равенства (18) примут вид

$$\begin{aligned} -\ Bp_0 - Fp &= q_0 \\ Cp_0 + Dp &= q \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично, вторая группа равенств получается из (20) заменой букв:

$$\begin{aligned} -\ Bq_0 - Fq &= p_0 \\ Cq_0 + Dq &= p \end{aligned} \tag{21}$$

Подставим q и q_0 из (20) в (21)

$$\begin{aligned} -\ B\left[-Bp_0 - Fp\right] - F\left(Cp_0 + Dp\right) &= p_0 \\ C\left[-Bp_0 - Fp\right] + D\left(Cp_0 + Dp\right) &= p \end{aligned} \tag{22}$$

Пусть $p(x)$ – произвольный кватернион. Тогда произвольны его скалярная и векторная части. Полагая равными нулю последовательно действительную и мнимую части кватерниона p, получим

$$\begin{aligned} B^2p_0 - FCp_0 &= p_0 \\ -\ CBp_0 + DCp_0 &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} BFp - FDp &= 0 \\ -\ CFp + D^2p &= p \end{aligned} \tag{24}$$

Получены интегральные тождества для скалярной функции (23) и векторной функции (24). Эти тождества, полученные в работе [8], являются векторным представлением кватернионного тождества (16). Ниже будут продемонстрированы некоторые приложения этих тождеств, которые, следовательно, являются приложениями кватернионного тождества (16). Покажем сейчас некоторые приложения аналога интеграла Коши из теории кватернионных функций. Одно приложение фундаментального кватернионного тождества кватернионных аналитических функций, полученное в работах [16], [17], связано с доказательством операции коммутирования интегральных операторов потенциалов простого и двойного слоёв. Для этого введём кватернионный потенциал простого слоя:

$$\psi(y) = Bb = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r} n_x b(x) dS_x, \quad r = |x-y|, \quad y \in R^3. \tag{25}$$

Этот потенциал отличается от классического наличием нормали под интегралом и тем, что n, b – кватернионные функции. При определённых требованиях к гладкости границы S и к функции $b(x)$ этот потенциал является непрерывным в R^3 и гармоничным в каждой из областей $D^{\pm}$. Из непрерывности следует, что предельные граничные значения функции изнутри и извне области D^+ равны прямому значению этого потенциала при $y \in S$. Для этого оператора и оператора A доказана теорема

Теорема 2. *Для ляпуновской поверхности S и произвольной кватернионной функции $b(x)$, удовлетворяющей условию Гёльдера на границе, кватернионные интегральные операторы A, B простого и двойного слоёв (анти)коммутируют между собой по правилу $ABb = -BAb$.*

Укажем на один факт, характерный для получения различных формул в кватернионном представлении. Внешне записи выглядят обычным (знакомым) образом, например, мы видим, что в последнем тождестве при перестановке операторов меняется знак. Однако, если теперь перейти к действительным записям, то получится четыре равенства, в которых исчезнет всякое внешнее сходство с операцией коммутирования. В каждом из равенств будут фигурировать различные операторы и трудно придумать метод для доказательства каждого из них. В этом одно из достоинств применения техники кватернионов в изучении свойств трёхмерного пространства. Эти свойства исследуются некоторым коллективным образом и не надо изобретать доказательств для отдельных свойств. Такие доказательства могут оказаться очень неуклюжими или очень сложными.

Доказательство теоремы связано с решением уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, преобразованного в факторизованное кватернионное дифференциальное уравнение $\nabla\nabla u = 0$. Факторизация происходит с помощью кватернионного оператора Гамильтона и легко проверяется вычислением символического кватерниона $\nabla\nabla$. Действительно, $\triangledown\triangledown = -\triangledown \bullet \triangledown + \triangledown \times \triangledown$. Теперь уравнение можно дважды последовательно проинтегрировать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Для этого используется аналог интеграла Коши в кватернионных функциях. Последовательное интегрирование этого уравнения по кватернионной схеме приводит к следующему решению (кватернионный аналог интеграла Коши, в кватернионной теории гармонических функций):

$$\nabla u\,(y) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \nabla\frac{1}{|r|} n_x \nabla u\,(x)^+\, dS_x, \quad y \in D^+$$

$$u(y) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|y-x|} n_x \nabla u\,(x)^+\, dS_x =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \nabla_z \frac{1}{|z-y|} n_z [u(z) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|x-z|} n_x \nabla_x u\,(x)^+\, dS_x]\, dS_z; \quad y \in D^+$$

Если бы были известны граничные значения $u(z), \nabla u(z)^+$, то по этим формулам вычислялись бы эти же значения в области D^+. Но эта информация для решения уравнения Лапласа является переопределённой, и при произвольном ее задании уравнение не будет иметь решения. Поэтому, последние равенства могут рассматриваться на границе области S как уравнения для определения части этих данных по другой известной части. Известная часть граничных данных кватернионов $u(z), \nabla u(z)^+$ (или их комбинация) не должна быть переопределённой, достаточной для существования, по крайней мере, одного решения. Граничные равенства, соответствующие общему решению кватернионного уравнения Лапласа, получаются из последних равенств предельным переходом на границу области и выписываются из теории кватернионных аналитических функций:

$$\nabla u\,(y)^+ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\frac{1}{|r|} n_x \nabla u\,(x)^+\, dS_x, \quad y \in S$$

$$u(y) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|y-x|} n_x \nabla u\,(x)^+\, dS_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla_z \frac{1}{|z-y|} n_z [u(z) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|x-z|} n_x \nabla_x u\,(x)^+\, dS_x] dS_z; \quad y \in S$$

Используя предыдущую теорему, полученные граничные интегральные равенства кватернионной теории гармонических функций могут быть преобразованы. Результат формулируется в виде теоремы:

Теорема 3. *Граничные значения кватернионной гармонической функции u и её кватернионного градиента ∇u^+ удовлетворяют тождествам*

$$A\nabla u^+ = \nabla u^+, \qquad B\nabla u^+ = \frac{1}{2}(Au - u).$$

Если имеются условия, связывающие на границе некоторые компоненты функции u и её кватернионного градиента, обеспечивающие существование решения, то тождества, рассматриваемые теперь как интегральные уравнения, позволяют доопределить оставшиеся компоненты этих величин и, следовательно, найти решение задачи. Если дополнительные граничные связи избыточны, то последние уравнения не будут иметь решения, следовательно, и краевая задача не имеет решений. Однако все же можно находить решение таких задач, пользуясь подходами теории некорректных задач, а именно, переопределенные граничные условия могли быть известны из опыта и по этой причине не точны. Поэтому, вместо строгих равенств в таких задачах можно потребовать близости левых и правых частей уравнений в некотором определённом смысле. В случае недостаточности граничных условий, краевая задача для кватернионного уравнения Лапласа будет иметь неединственное решение.

Для иллюстрации сказанного, кватернионные равенства применяются для исследования некоторых классических задач математической физики. В частности, повторён известный результат, что задача Дирихле для кватернионного уравнения Лапласа имеет единственное решение. В качестве второго примера рассматривается решение кватернионного уравнения Лапласа $\triangle u = 0$ в области D^+ при условии, что на границе задан кватернионный градиент, то есть $\bigtriangledown u = f$. В этом случае граничные интегральные равенства имеют следующий вид: $Af = f, \quad Bf = \frac{1}{2}(Au - u)$. Отсюда следует, что задание на границе кватернионного градиента избыточно. Действительно, если заданная функция f такова, что не выполняется первое равенство, то поставленная задача не имеет решения. Если первое равенство выполняется, тогда доказывается, что второе уравнение служит для определения граничного значения функции u с точностью до граничного значения произвольной кватернионной аналитической функции. Решение в области также находится с точностью до произвольной кватернионной аналитической функции.

Предыдущий подход, связанный с факторизацией дифференциального оператора Лапласа и последующим применением кватернионного аналога интеграла Коши, может быть применён в других задачах. Например, могут быть построены интегральные уравнения теории упругости. Для такого построения, прежде всего, понадобилась запись дифференциальных уравнений теории упругости (уравнений Ламе) в кватернионной форме:

$$\nabla((\lambda - \mu)\nabla u + (\lambda + \mu)u\nabla) = 0.$$

Здесь вектор перемещения u понимается как мнимая кватернионная функция, а λ, μ – физические константы Ламе. Выражение в скобках, являющееся кватернионной аналитической функцией, может быть представлено через ротор и дивергенцию вектора перемещений:

$$\nabla\left[\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}(\nabla \bullet u) - \frac{1}{2}(\nabla \times u)\right] = 0.$$

Использование векторных операций символическое, временно, на момент выполнения векторных операций, мнимые единицы кватерниона рассматриваются как орты декартова базиса, а после их выполнения эти орты вновь рассматриваются как мнимые единицы. Пользуясь представлением кватернионных аналитических функций, это кватернионное уравнение можно один раз проинтегрировать, в полученном решении перейти к пределу на границу области. Разделяя скалярную и векторную части, это предельное равенство может быть представлено в виде:

$$\nabla \bullet u = -\frac{1}{2\pi C}\int\limits_S \left[C(\nabla \bullet u)n - n \times \frac{1}{2}(\nabla \times u)\right] \bullet \nabla \frac{1}{|r|}\, d_x S;$$

$$\frac{1}{2}(\nabla \times u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \left[C(\nabla \bullet u)n - n \times \frac{1}{2}(\nabla \times u)\right] \times \nabla \frac{1}{|r|}\, d_x S -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|}\left(n \bullet \frac{1}{2}(\nabla \times u)\right) d_x S, \qquad \text{где} \quad C = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu}.$$

Данные равенства удовлетворяются для ротора и дивергенции вектора перемещений u, являющегося решением уравнений Ламе. Если известны лишь некоторые компоненты ротора и дивергенция, или их комбинации, то на данные уравнения можно смотреть как на граничные интегральные уравнения для доопределения недостающих компонент. Заданных величин для этого может не хватать, быть достаточно, либо быть с избытком. Соответственно будет возникать неединственннсть решения задачи, решение будет единственным, либо задача будет некорректной. Различных вариантов таких уравнений может быть много. Например, на эти уравнения можно смотреть как на задачу восстановления вектора перемещения по его нормальной составляющей, заданной на поверхности. Особый интерес могут представлять именно некорректные постановки, что сейчас и наблюдается, например, при решении задач геофизики [18].

Заметим, также, что факторизации уравнений Ламе с помощью оператора Гамильтона недостаточно, чтобы эти уравнения проинтегрировать дважды, как это было сделано выше для уравнения Лапласа. Уравнения Ламе удалось проинтегрировать только один раз. Для устранения этого здесь может быть эффективным подход, опирающийся не на кватернионные аналитические функции, а на некоторое их обобщение, позволяющее получить другой класс аналогов интеграла Коши в кватернионных функциях [5]. Результаты интегрирования уравнений Лапласа и теории упругости с помощью аналогов интеграла Коши из теории кватернионных функций сами могут рассматриваться как аналоги интегралов Коши для соответствующих функций. Действительно, интеграл Коши в теории аналитических функций и теории кватернионных аналитических функций выражает аналитическую функцию через её граничное значение. Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка. Дифференциальные уравнения Лапласа и теории упругости Ламе являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Соответственно, интегральные представления их решений оказываются выраженными не только через граничные значения этих решений, но и через граничные значения некоторых комбинаций первых производных. Для техники построения тождеств это оказывается не принципиальным. Поэтому на их основе, как и в теории кватернионных функций, строятся аналоги интегралов типа Коши и далее, также по аналогии, некоторые кватернионные (и не только) интегральные тождества для достаточно произвольных функций. Полученные группы тождеств применены для исследования спектральных свойств некоторых операторов кватернионной теории аналитических функций, классической теории потенциала, интегральных операторов теории упругости [3], [16]. Для примера, приведём результаты, непосредственно следующие из действительной формы записи фундаментального кватернионного тождества (23), (24):

Теорема 4. *За исключением точек $\lambda = \pm 1$ собственные числа операторов потенциала двойного слоя B и оператора D совпадают вместе с их кратностью, а соответствующие собственные функции φ и ψ взаимно-однозначно пересчитываются с помощью операторов C и F по следующей последовательности: $B\varphi = \lambda\varphi$, $C\varphi = \psi$, $D\psi = \lambda\psi$, $F\psi = (\lambda^2 - 1)\,\varphi$.*

Цепочка пересчёта позволяет сделать некоторые выводы о спектре операторов, получающихся суперпозицией. Действительно, из второго и четвёртого равенств цепочки следует: $FC\varphi = (\lambda^2 - 1)\varphi, \quad CF\psi = (\lambda^2 - 1)\psi$. То есть собственные числа операторов FC, CF совпадают, а собственные функции φ, ψ являются собственными функциями соответственно операторов B, D. Отметим также, что спектры этих операторов расположены на интервале $(-1, 0)$.

Теорема 5. *Точки $\lambda = \pm 1$ являются точками непрерывного спектра оператора D бесконечной кратности. Точка $\lambda = 0$ может быть точкой сгущения спектра. Других точек непрерывного спектра у оператора D нет.*

По аналогии с предыдущим строится теория кватернионных функций двух переменных. Наличие трёх мнимых единиц отличает её от теории функций комплексного переменного. В ней получается как бы дополнительная степень свободы, возможность выхода в третье измерение. В результате, даже простое повторение исследований по аналогии с предыдущим приводит к некоторым неожиданным результатам. Например, спектр оператора потенциала двойного слоя в плоском случае оказывается симметричным [10]. Заметим, что проверить этот результат численно не удаётся, так как приближённая замена оператора нарушает это свойство. В частном случае кривой интегрирования, совпадающей с окружностью, указанный факт проверяется аналитически.

Вторая группа приложений получается применением полученных выше результатов и кватернионной техники исследования к изучению различных интегральных операторов или уравнений. Здесь нет кватернионных функций непосредственно, есть отдалённые следствия их исследований. Мы излагаем эти приложения, так как, если бы результаты, полученные с использованием кватернионов, не применялись в других исследованиях, то эти результаты были бы просто не нужны. Одним из первых приложений такого рода может служить непосредственное повторение схемы получения тождеств к функциям, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям, отличным от (4) и не являющимся кватернионными. Эти уравнения должны иметь аналоги интегралов Коши и типа Коши. Здесь кватернионы послужили толчком к размышлениям по аналогии. Например, по той же схеме на основе интегральных представлений функций класса C^2 демонстрируется аналогичный предыдущему подход к построению тождеств для некоторых уравнений эллиптического типа. В представление входят значения функций и их различные производные на границе области. Классическим примером является представление функций класса C^2, записанное на основе формул Грина. На его основе строится аналог формулы Коши в теории гармонических функций, являющийся интегральным представлением гармонической функции через её граничное значение и граничное значение нормальной производной [2]. Полученные интегральные представления можно продифференцировать и, используя предельный переход на границу области, получить столько граничных производных, сколько их содержалось в исходном интегральном представлении. Использование граничных интегральных равенств по схеме, изложенной выше, приводит к группам интегральных тождеств, включающих в себя значительный произвол. По аналогии вводятся граничные интегральные операторы

$$V\psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{1}{|r|}\psi\, d_xS, \quad |r| = |x - z|\,,\ z \in S; \quad B\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \varphi\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|}\, d_xS;$$

$$G\psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \psi\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|r|}\, d_xS; \quad M\psi = \lim_{y\in D^+,\ y\to z\in S}\frac{\partial}{\partial n_y}\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \varphi\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|}\, d_xS\Big)$$

Два из этих операторов хорошо известны в классической теории потенциала, это операторы V потенциала простого слоя и B – потенциала двойного слоя. В результате получим тождества, верные для достаточно произвольных функций φ и ψ. От функций φ и ψ, а также от поверхности S требуется степень гладкости, достаточная для существования предыдущих сингулярных и несобственных интегралов. Интегральные тождества для этих функций имеют вид [3]:

$$VG\psi = BV\psi; \quad \psi = G^2\psi - MV\psi;$$
$$\varphi = B^2\varphi - VM\varphi; \quad MB\varphi = GM\varphi.$$

По аналогии с исследованием тождеств для кватернионных функций и здесь устанавливаются некоторые факты для спектра и собственных функций интегральных операторов. Легко устанавливается известный факт о том, что спектры операторов потенциала двойного слоя B и нормальной производной потенциала простого слоя G совпадают. Кроме того, из записанных тождеств вытекает также, что собственные функции этих операторов взаимно пересчитываются с помощью операторов классической теории потенциала V и M. То есть одним из операторов пересчета собственных функций является оператор потенциала простого слоя. Цепочка, устанавливающая связь между собственными функциями и собственными числами операторов B, G, а также формулы взаимного пересчёта похожи на соответствующие формулы пересчета в кватернионной теории потенциала и имеют следующий вид: $B\varphi = \lambda\varphi, \quad M\varphi = \psi, \quad G\psi = \lambda\psi, \quad V\psi = (\lambda^2 - 1)\varphi$.

Устанавливаются также спектральные свойства суперпозиций некоторых операторов. Именно, спектры операторов VM и MV дискретны, совпадают между собой и выражаются через спектр оператора потенциала двойного слоя, а собственные функции взаимно пересчитываются и связаны с собственными функциями оператора потенциала двойного слоя. Подход можно применить и к другим дифференциальным уравнениям эллиптического типа. Например, на основе интегрального представления решений уравнений Ламе теории упругости (аналог интеграла Коши в теории упругости [14])

$$\delta\,(y)\,u\,(y) = \int\limits_S f\,(x)\bullet U\,(x,y)\,d_xS - \int\limits_S u\,(x)\bullet\Phi\,(x,y)\,d_xS,$$

построены интегральные тождества [3] для уравнений теории упругости. Здесь $f(x)$ – граничное значение вектора напряжения, $u(x)$ – граничное значение вектора перемещения точек упругого тела, занимающего трёхмерную область D^+ с границей S,

$U(x, y)$ – тензор второго ранга Кельвина-Сомильяна, а $\Phi(x, y)$ – силовой тензор влияния второго ранга. Кроме того, $\delta(y)$ – характеристическая функция области, равна 1, если $y \in D^+$ и 0, если $y \in D^-$. Отметим, что если S – ляпуновская поверхность и функция $u(y)$ на границе области удовлетворяет условию Гёльдера с некоторым показателем β, то предыдущее представление верно и для $y \in S$ и в этом случае $\delta(y) = 0,5$. Граничный вектор напряжения вычисляется по вектору перемещения с помощью оператора дифференцирования

$$T_n u\left(x\right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n \left(\nabla \bullet u\right) + \mu \left(n \times \left(\nabla \times u\right)\right) = f\left(x\right)$$

и последующего предельного перехода на границу области. Здесь λ, μ – физические константы, n – нормаль в точке к площадке, на которой вычисляется вектор напряжения. Применение оператора дифференцирования к интегральному представлению и последующий предельный переход на границу области приводит к результату:

$$u^+\left(z\right) = 2\int\limits_S f\left(x\right) \bullet U\left(x, z\right) d_x S - \lim_{y \in D^+,\ y \to z \in S} \Big(2\int\limits_S u\left(x\right) \bullet \Phi\left(x, y\right) d_x S\Big)$$

$$\left[T_{n_z} u\left(z\right)\right]^+ = 2\int\limits_S \Phi\left(z, x\right) \bullet f\left(x\right) d_x S - \lim_{y \in D^+,\ y \to z \in S} T_{n_z} \Big(2\int\limits_S u\left(x\right) \bullet \Phi\left(x, y\right) d_x S\Big)$$

В этом случае $u^+(z) = u(z)$, $[T_{n_x} u(z)]^+ = f(z)$, $\quad z \in S$. Используем их для получения других тождеств, содержащих произвол. Аналоги интегралов типа Коши могут быть построены из аналога интеграла Коши в теории упругости. Опуская выкладки и предельные переходы, введём операторы

$$H\varphi = 2\int\limits_S \varphi\left(x\right) \bullet U\left(x, z\right) d_x S; \quad K^*\varphi = 2\int\limits_S \varphi\left(x\right) \bullet \Phi\left(x, z\right) d_x S;$$

$$K\varphi = 2\int\limits_S \Phi\left(z, x\right) \bullet \varphi\left(x\right) d_x S; \quad L\varphi = \lim_{y \in D^+,\ y \to z \in S} T_{n_y} \Big(2\int\limits_S \varphi\left(x\right) \bullet \Phi\left(x, y\right) d_x S\Big).$$

Первый из этих операторов известен в теории упругости как прямое значение обобщенного потенциала простого слоя, второй – прямое значение обобщенного потенциала двойного слоя. С помощью техники, аналогичной технике, продемонстрированной выше, получим четыре тождества, содержащие две произвольные вектор-функции φ и ψ :

$$HK\varphi = K^* H\varphi; \quad LH\varphi = K^2\varphi - \varphi;$$

$$HL\psi = -\psi + \left(K^*\right)^2 \psi; \quad KL\psi = LK^*\psi.$$

На основе этих тождеств также по аналогии с предыдущим доказан классический результат: совпадение спектров сопряжённых операторов K и K^*. Цепочка последовательных вычислений и пересчётов собственных функций имеет вид:

$$K\varphi = \lambda\varphi, \quad H\varphi = \psi, \quad K^*\psi = \lambda\psi, \quad L\psi = (\lambda^2 - 1)\varphi.$$

В классических исследованиях интегральных уравнений теории упругости не упоминается, что оператор обобщённого потенциала простого слоя оказывается оператором пересчёта собственных функций оператора K^* в собственные функции сопряжённого ему оператора K. Другое применение полученных интегральных тождеств в теории упругости было указано в [12]. Именно, можно искать решение первой задачи теории упругости с помощью обобщенного потенциала простого слоя $u = H\varphi$, где u – искомый вектор перемещения, поиск которого сведён к поиску плотности потенциала φ. Как и в классической теории потенциала, если решение задачи Дирихле искать в виде потенциала простого слоя, получится интегральное уравнение, относящееся к классу интегральных уравнений первого рода, являющихся некорректными. Тождества для обобщенных потенциалов теории упругости позволяют достаточно просто преобразовать задачу к корректным граничным интегральным уравнениям второго рода, что обеспечивает возможность устойчивого численного счёта и использования теорем существования и единственности.

Полученные тождества относятся к теории упругости только по той причине, что в них содержится произвольная константа, коэффициент Пуассона ν. Из последних тождеств можно получить множество других, которые уже будут иметь общий характер, не относящийся к теории упругости, если этому коэффициенту придавать различные числовые значения. Конкретное задание этого числового параметра приводит к конкретному виду ядер интегральных операторов, входящих в тождества. Конечно, представляют интерес не все, получающиеся таким образом варианты тождеств. Как именно меняются ядра, можно видеть на примере распадения интеграла, имеющего смысл интеграла Гаусса в теории упругости. Этот интеграл называется обобщённым интегралом Гаусса и в случае ляпуновской поверхности имеет вид:

$$\int_S \Phi\left(x,y\right)\ dS_x = \begin{cases} -I, & y \in D^+, \\ -\frac{1}{2}I, & y \in S, \\ 0, & y \in D^-. \end{cases}$$

Входящее сюда ядро является одним из двух ядер интегралов записанных тождеств и в диадном представлении эти ядра имеют вид

$$U\left(x,y\right) = \frac{1}{16\pi\mu\left(1-\nu\right)|r|}\left[\left(3-4\nu\right)I + \frac{rr}{|r|^2}\right];$$

$$\Phi\left(x,y\right) = \frac{1}{8\pi\left(1-\nu\right)|r|^3}\left[\left(1-2\nu\right)\left(nr - rn - n\bullet rI\right) - 3\frac{n\bullet r}{|r|^2}rr\right],$$

Здесь $r = x - y$ – вектор, rr – диадное произведение векторов, I – единичный тензор. Так как равенство верно для произвольного коэффициента Пуассона ν, то, полагая $\nu = 0,5$, получим следующий вид тензора:

$$\Phi\left(x,y\right) = \frac{-3}{4\pi}\frac{n\bullet r}{|r|^5}rr,$$

и интеграл Гаусса примет вид, не зависящий от теории упругости:

$$\int\limits_S \frac{-3}{4\pi}\frac{n\bullet r}{|r|^5}rr\,d_xS = \begin{cases} -I, & y \in D^+, \\ -\frac{1}{2}I, & y \in S, \\ 0, & y \in D^-. \end{cases}$$

С учётом этого равенства, переходя к пределу $\nu \to \infty$, получим другое независимое от теории упругости равенство

$$\int\limits_S \frac{1}{4\pi\,|r|^3}(nr - rn - n \bullet rI)\,d_xS = \begin{cases} -I, & y \in D^+, \\ -\frac{1}{2}I, & y \in S, \\ 0, & y \in D^-. \end{cases}$$

С учетом классического интеграла Гаусса из теории потенциала, можно записать:

$$\int\limits_S \frac{n \bullet r}{4\pi\,|r|^3} I\,d_xS = \begin{cases} -I, & y \in D^+, \\ -\frac{1}{2}I, & y \in S, \\ 0, & y \in D^-. \end{cases}$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, запишем ещё один не зависящий от теории упругости интеграл:

$$\int\limits_S \frac{1}{4\pi\,|r|^3}(nr - rn)\,d_xS = \begin{cases} 0, y \in D^+ \\ 0, y \in S \\ 0, y \in D^- \end{cases}$$

Последний интеграл является сингулярным и непрерывным при переходе переменной y через границу области интегрирования S. Записанные интегралы могут иметь самостоятельный интерес, например, последний применён нами для регуляризации сингулярных интегральных уравнений теории упругости.

Тождества кватернионной теории аналитических функций представляют два варианта явной регуляризации сингулярных интегральных уравнений теории упругости. Оба варианта опираются на то, что интегральные операторы теории упругости K, K^* представляются в виде суммы $K = \beta D + T_1, K^* = \beta D + T_2$, где β – константа, выражающаяся через коэффициент Пуассона, $D-$ сингулярный интегральный оператор из теории кватернионных аналитических функций (19), который является замкнутым линейным ограниченным интегральным оператором, а операторы T_1, T_2 для ляпуновских поверхностей вполне непрерывными интегральными операторами со слабой особенностью. Один вариант регуляризации связан со спектральными свойствами оператора D и обобщением теоремы Вейля о вполне непрерывных возмущениях, сформулированном, например, в [15]: Прибавление к замкнутому линейному оператору произвольного вполне непрерывного оператора не изменяет непрерывной части спектра. Следовательно,

Теорема 6. *Спектры интегральных операторов теории упругости имеют три точки непрерывного спектра:* $0, \pm\beta$, *других точек непрерывного спектра нет.*

Учитывая доказанный грузинской школой математиков во главе с В. Д. Купрадзе факт о том, что для интегральных уравнений теории упругости верны теоремы Фредгольма, [11], остаётся заключить, что эти точки могут быть только точками сгущения спектра. Они не могут быть точками спектра бесконечной кратности, так как как их конечная кратность вытекает из теорем Фредгольма.

Если мы хотим теперь трансформировать интегральные уравнения теории упругости к уравнениям с вполне непрерывным оператором (а в этом и заключается смысл регуляризации), то должны заметить, что у вполне непрерывного оператора спектр дискретный, может иметь только нуль в качестве точки сгущения и собственные числа имеют конечную кратность. Отсюда, на основании теоремы о отображении спектров, возникает идея регуляризации: Надо умножить интегральное уравнение на операторный полином некоторой степени n от интегрального оператора, входящего в интегральное уравнение. При этом в уравнении степень полинома повысится на единицу. Исходную степень и коэффициенты полинома надо подобрать так, чтобы трансформированное уравнение было во-первых, интегральным уравнением второго рода и, во-вторых, интегральный оператор (полином степени $n+1$), входящий в уравнение, имел в качестве точки сгущения спектра только нулевую точку. Наконец, эта трансформация должна быть эквивалентной, то есть, не увеличивающей и не уменьшающей число решений исходного уравнения. Так как надо отобразить три точки спектра в одну точку, то в трансформированном уравнении полином должен быть минимально операторным полиномом третьей степени, следовательно, регуляризирующим оператором будет операторный полином второй степени. Эта идея реализована в [8]. Косвенно правильность подхода (а значит и кватернионных исследований, а также теоремы 6.) подтверждается совпадением результата с результатом [13] полученным, применением к построению регуляризатора теории символа С. Г. Михлина.

Однако спектральный подход позволяет построить целый класс регуляризаторов, а также становится прозрачной причина, почему надо регуляризовать сингулярные интегральные уравнения, прежде чем применять к ним некоторый численный метод решения. Любой численный метод редуцирует интегральный оператор к конечномерному оператору, спектр которого, как известно, состоит из конечного числа собственных чисел конечной кратности. Следовательно, наибольший ущерб наносится именно в спектральных свойствах. Оказывается, только в одном случае этот ущерб можно сделать сколь угодно малым: если спектр дискретен и может иметь единственную точку сгущения, равную нулю. Прозрачно понять это можно, если представить решение разложенным по собственным функциям оператора и посмотреть, что произойдёт, если в решении оставить конечное число слагаемых, а затем отбрасывать слагаемые с собственными функциями, соответствующими собственным числам, входящим в круг некоторого радиуса, с центром в нуле. То-есть, отбрасываются все собственные функции, соответствующие мало отличающимся от нуля собственным числам. Последующее уменьшение этого радиуса приведёт к улучшению аппроксимации интегрального оператора и к увеличению точности приближённого решения. Однако можно воспользоваться и известным из функционального анализа утверждением: вполне непрерывный оператор всегда можно заменить конечномерным с любой наперёд заданной точностью.

Другой вариант регуляризации заключается в таком умножении исходного интегрального уравнения на некоторый операторный полином, чтобы в результате умножения из сингулярного оператора D образовалась вполне непрерывная комбинация, полученная при исследовании фундаментального кватернионного тождества (16). Подчеркнём ещё раз, что изложенные идеи регуляризации оказались следствием исследования в кватернионных аналитических функциях, поэтому уместны в данной публикации.

Следующие приложения кватернионных аналитических функций связаны с конструированием различных интегральных уравнений. В частности, по новому сконструированы интегральные уравнения восстановления векторного поля по известным ротору и дивергенции. Сначала уравнения для ротора и дивергенции заменяются одним кватернионным дифференциальным уравнением, затем это уравнение решается с помощью техники кватернионного интегрального представления функций через граничные значения этих функций и через кватернионные характеристики поля в объеме. Так как интегральное представление кватернионной функции эквивалентно четырем скалярным уравнениям, то возникла необходимость уменьшения их количества. Используя кватернионные интегральные тождества (16), с помощью серии теорем, доказывающих эквивалентность преобразований при переходе к меньшему числу уравнений, удалось показать, что для решения задачи потребуется решить два граничных интегральных уравнения относительно двух компонент векторного поля. Третья недостающая компонента определяется методами аналитической геометрии и далее по граничному значению вектора векторного поля оно восстанавливается в области. Прямое вычисление компонент векторного поля избавляет от необходимости численного дифференцирования так называемого потенциала векторного поля, к поиску которого обычно сводится эта классическая задача. Детально это приложение кватернионов дано в работе [6].

Для построения интегральных тождеств теории упругости на основе техники кватернионов понадобилась прежде всего, запись дифференциальных уравнений теории упругости (уравнений Ламе) в кватернионной форме:

$$\nabla((\lambda-\mu)\nabla u+(\lambda+\mu)u\nabla)=0$$

Здесь λ, μ являются физическими постоянными Ламе. Выражение в скобках, являющееся кватернионной аналитической функцией. Оно может быть вычислено с помощью аналога интеграла Коши (10) из теории кватернионных аналитических функций, в котором следует положить :

$$q=(\lambda-\mu)\nabla u+(\lambda+\mu)u\nabla.$$

Действительная запись кватернионного равенства приводит к выражению ротора и дивергенции вектора перемещения через их граничные значения, а предельный переход на границу к кватернионным интегральным тождествам относительно граничных значений этих величин:

$$\nabla\bullet u=-\frac{1}{2\pi\,C}\int\limits_S\left[C(\nabla\bullet u)n-n\times\frac{1}{2}(\nabla\times u)\right]\bullet\nabla\frac{1}{|r|}d_xS;$$

$$\frac{1}{2}(\nabla\times u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\left[C(\nabla\bullet u)n-n\times\frac{1}{2}(\nabla\times u)\right]\times\nabla\frac{1}{|r|}d_xS$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\nabla\frac{1}{|r|}\left(n\bullet\frac{1}{2}(\nabla\times u)\right)d_xS,\qquad \text{где}\quad C=\frac{2\mu+\lambda}{2\mu}.$$

Данные равенства удовлетворяются для граничных значений ротора и дивергенции вектора u, являющегося решением уравнений Ламе. Если известны лишь некоторые компоненты ротора и дивергенция или их комбинации, то на данные уравнения можно смотреть как на граничные интегральные уравнения для доопределения недостающих компонент ротора и дивергенции. Известных величин может быть достаточно, либо не хватать, либо быть с избытком для определения решения. Соответственно будет возникать возможность единственного или неединственного решения задачи, либо задача будет некорректной. Различных вариантов таких уравнений может быть много. Например, на эти уравнения можно смотреть как на задачу восстановления векторного поля. С механической точки зрения в этой задаче речь будет идти о восстановлении вектора перемещения по его нормальной составляющей, заданной на поверхности. Эта задача имеет не единственное решение. Следует обратить внимание на простоту, с которой благодаря кватернионам были получены данные равенства. Известны попытки их получения с помощью тензорного аппарата на двумерном многообразии. Техника была довольно сложной, вследствие чего возникали ошибки выкладок.

Итак, в кватернионной теории аналитических функций построены интегральные тождества. Они оказались полезными в нескольких отношениях: непосредственно с их использованием удалось исследовать спектры некоторых интегральных операторов и построить вполне непрерывные комбинации одного сингулярного интегрального оператора. С использованием этих свойств в приложениях удалось исследовать спектры интегральных операторов теории упругости и предложить два способа регуляризации соответствующих сингулярных интегральных уравнений. Исследовался спектр потенциала двойного слоя в плоском случае. Кватернионные тождества привели к аналогии, по которой были построены интегральные тождества для решений некоторых других дифференциальных уравнений. Эти тождества оказались полезными для анализа спектров соответствующих операторов.

Литература

[1] Кантор И. Л. Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.

[2] Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.

[3] Кутрунов В. Н. Курята З. С. Некоторые интегральные тождества математической физики //Вестник ТюмГУ, 1998. № 2. с. 34–41.

[4] Василевский Н. Л., Жданов М. С., Шапиро М. В. Пространственные аналоги интеграла типа Коши и теория кватернионов//Препр. АН УССР, Ин-т земного магнетизма, ионосферы и распростанения радио волн; 1987. №8 (737). 23 с.

[5] M. Shapiro, N. L. Vasilevski, Quaternionic ψ-hyperholomorphic function, singular integral operators and boundary value problems. 1. ψ-hyperholomorphic function theory. Complex variables, Theory and applications, 1995, v. 27, 17–46

[6] Кутрунов В. Н. Курята З. С. Интегральные уравнения векторного поля// Известия вузов, сер. математика, 1999. № 6. с. 33–36.

[7] Кутрунов В. Н., Курята З. С. Кватернионы и интегральные уравнения теории упругости// Сборник докладов межд. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 90-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 22–23 января 2001года)/ под. ред. проф. И. А. Кийко, проф. М. Ш. Исраилова, проф. Г. Л. Бровко. М.: Изд-во Моск.ун-та, 2001, с. 303–305.

[8] Кутрунов В. Н. Спектральная регуляризация интегральных уравнений теории упругости// ПММ. 1991. т. 2. с. 348–350.

[9] Кутрунов В. Н. Кватернионный метод регуляризации интегральных уравнений теории упругости.// ПММ, 1992. т. 56. Вып. 5. с. 864–868.

[10] Кутрунов В. Н. Симметрия спектра оператора потенциала двойного слоя // Труды средневолжского математического общества, 1999. т 2. № 1, с. 57–65.

[11] Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В., Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976.

[12] Натрошвили Д. Г. Об одном интегральном уравнении первого рода// Сообщения академии наук Грузинской ССР. 1981. 102, № 3. с. 501–504. 5.

[13] Мазья В. Г. Сапожникова В. Д. Замечание о регуляризации сингулярной системы изотропной теории упругости // Вест. ЛГУ, сер. математика, механика, астрономия, 1964. № 7. с. 165–167.

[14] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

[15] Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. 339 с.

[16] Кутрунов В. Н., Кутрунова З. С. Интегрирование кватернионного уравнения Лапласа// Математическое и информационное моделирование: сборник научных трудов. Вып. 6. Тюмень: Издательство "Вектор Бук", 2004. с. 97–111.

[17] Kutrunov V. N., Kutrunova Z. S. Quaternionian integral identities and Laplace equation integration// Number, Time, Relativity: Proceedings of International Meeting. Moscow, 10–13 August 2004. Moscov, 2004. p. 27–31.

[18] Шваб А. А. Существенно переопределенная задача теории упругости// Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. т. 4. №1. с. 204–207.

[19] Кутрунова З. С. Кватернионная факторизация некоторых дифференциальных уравнений и интегральные тождества// Труды 36-ой Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург: УрО РАН, 2005. с. 169–173.

[20] Кутрунова З. С. Кватернионы и факторизация некоторых дифференциальных операторов// Сборник докладов межрегиональной конференции, посвященной 30-летию факультета математики и компьютерных наук ТюмГУ. Тюмень. 2005. с. 33–34.