О НЕКОТОРЫХ ГИПЕРАЛГЕБРАХ, НЕПОСРЕДСТВЕННО СВЯЗАННЫХ С АССОЦИАТИВНЫМИ ТЕЛАМИ, ЕВКЛИДОВЫМИ ВЕКТОРНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ, АЛГЕБРАМИ И ГИПЕРАЛГЕБРАМИ

Соловей Л. Г.

В статье [1] рассматривались гипертела, гиперполя, гиперкольца, гипералгебры – множества, представляющие собой несколько аддитивных групп, объединенных в один мультипликативный группоид, причем соблюдаются дистрибутивные законы. В [1], по определению, все аддитивные группы пересекаются только в одной (нулевой) точке. Однако такое ограничение является слишком жестким. В настоящей заметке это требование снимается: предполагается возможность нескольких нулей (но пересечение аддитивных групп в ненулевых точках по-прежнему запрещено). Это позволяет установить связи между алгебрами, телами, векторными евклидовыми пространствами, и соответствующими гипералгебрами, что и сделано в настоящей статье. Далее, дается определение фактор-гиперкольца, фактор-гипертела и фактор-гиперполя. Приведены два примера, показывающие, что в отличие от небольшого числа ассоциативных алгебр конечного ранга с делением над полем действительных чисел, количество ассоциативных гипералгебр конечного ранга с делением над полем действительных чисел бесконечно. Вводится понятие вырожденных гиперколец. Установлено однозначное соответствие между невырожденными гиперкольцами и обобщенными (в частности, стандартными) градуированными кольцами. Рассмотрен класс гиперколец, ближайших к кольцам (кольцеобразных гиперколец).

Введение

В статье [1] были даны определения гипертела, гиперполя, гиперкольца и гипералгебры. В настоящей заметке будет установлена связь евклидовых векторных пространств над полем действительных чисел, алгебр над полем P, ассоциативных тел, гипералгебр, с соответствующими гипералгебрами. Следует, однако, отметить, что данные в [1] определения слишком жестки. Поэтому мы вернемся к основным определениям с целью их расширения, во многом повторяя изложение в [1].

Гипертелом (гиперкольцом) k-го порядка по аддитивным группам назовем множество M, обладающее следующими свойствами:

1) Оно представляет собой k аддитивных групп, единственными точками пересечения которых являются, возможно, нули аддитивных групп (в [1] рассматривались только ненулевые аддитивные группы; при этом требовалось, чтобы все аддитивные группы имели один общий нуль); иными словами, аддитивные группы без нулей, принадлежащих более чем одной аддитивной группе, а также эти нули, определяют собой непересекающиеся классы некоторого разбиения π множества M [2].

2) Оно составляет, в случае гипертела, кроме нулей, входящих в ненулевые аддитивные группы, мультипликативную группу или лупу [2], а в общем случае гиперкольца группоид, включая нули.

3) Требование, содержащееся в [1], чтобы среди произведений элементов A_i, A_k из фиксированных аддитивных групп $\widetilde{A}_i$ и $\widetilde{A}_k$ обязательно были отличные от нуля,

принадлежащего более чем одной аддитивной группе для любых i и k, снимается (в общем случае); при выполнении этого требования назовем гиперкольцо невырожденным, а при невыполнении – вырожденным. Легко видеть, что гипертело является частным случаем невырожденного гиперкольца.

4) Выполняются левый и правый дистрибутивные законы по сложению в аддитивных группах и умножению.

5) Из предыдущего пункта следует (см. приложение), что два элемента из каких-либо двух (возможно, и совпадающих) аддитивных групп, будучи умножены друг на друга, дают или некоторый фиксированный нуль, принадлежащий более чем одной аддитивной группе, или элемент из фиксированной аддитивной группы, в обоих случаях определяемые только аддитивными группами, к которым принадлежат сомножители, и, возможно, порядком расположения сомножителей.

Следовательно, аддитивные группы $\widetilde{A}_i$ и $\widetilde{A}_k$ суть элементы группоида, причем для невырожденных гиперколец

$$\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{A}_k = \widetilde{A}_l \qquad (a)$$

((а) выполняется всегда для гипертел); назовем этот группоид фактор-группоидом множества M по аддитивным группам.

Из сказанного следует, что если элементы множества M, не являющиеся общими нулями аддитивных групп, не являются делителями этих нулей, то разбиение π множества M как мультипликативного группоида представляет собой конгруэнцию в M по умножению [2], причем аддитивные группы (без таких нулей), а также эти нули, представляют собой элементы мультипликативного группоида, называемого фактор-группоидом; при этом аддитивные группы без указанных нулей составляют его подгруппоид, а если множество отличных от нулей элементов M представляет собой мультипликативную группу, то аддитивные группы (без нулей), как непересекающиеся классы разбиения π', являются элементами мультипликативной группы, называемой фактор-группой [2]; при этом фактор-группоид или фактор-группа, элементами которых являются аддитивные группы без указанных нулей, изоморфны фактор-группоиду (фактор-группе) по целым аддитивным группам.

Отметим также, что если аддитивные группы гиперкольца или гипертела не имеют общих нулей, то они составляют конгруэнцию по разбиению π гиперкольца (гипертела) на эти аддитивные группы как по умножению, так и по сложению.

Гипертело с коммутативным и ассоциативным умножением назовем гиперполем k-го порядка по аддитивным группам. Гиперкольца, аддитивные группы которых являются векторными пространствами над полем P размерностей $n_1, n_2, \dots n_k$, назовем гипералгебрами k-го порядка ранга $(n_1, n_2, \dots n_k)$ (при выполнении дополнительных условий [3]

$$(\alpha \cdot A_i) \cdot B_k = \alpha \cdot (A_i \cdot B_k) = A_i \cdot (\alpha \cdot B_k), \qquad (1)$$

где α – элемент поля P, A_i, B_k – элементы множества M). В [1] рассматривались только векторные пространства одинаковой размерности n. Назовем их, согласно [1], гипералгебрами ранга n; это – гипералгебры ранга $(n, n, \dots)$.

Гипералгебры, элементы которых, кроме нулей, входящих в ненулевые аддитивные группы, составляют мультипликативную группу (или лупу), назовем гипералгебрами k-го порядка ранга $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ с однозначным делением и единицей. Рассматриваемые в [1] гипертела, гиперполя, гиперкольца, гипералгебры с одним нулем являются часто встречающимися гипертелами, гиперполями, гиперкольцами и гипералгебрами (гипералгебры с одним нулем состоят из векторных пространств одинаковой размерности). Обычные тела (поля, кольца, алгебры) являются гипертелами, гиперполями, гиперкольцами, гипералгебрами первого порядка по всему множеству M, являющемуся в данном случае единственной аддитивной группой.

Понятия гипертела, гиперполя, гиперкольца, гипералгебры являются непосредственным обобщением понятий тела, поля, кольца, алгебры, где определены две бинарные операции – сложение и умножение, связанные левым и правым дистрибутивными законами.

Расширение определений, данных в [1], позволяет привести дополнительный пример гипералгебры. Рассмотрим совокупность тензоров любого ранга в n-мерном пространстве. Определим произведение двух тензоров как совокупность произведений их составляющих в каком-либо установленном порядке (прямое произведение). В результате получается тензор, ранг которого равен сумме рангов сомножителей. Аддитивными группами являются совокупности тензоров заданного ранга. Поскольку складываются только тензоры заданного ранга, указанное множество не является кольцом. Оно представляет собой, однако, гиперкольцо – гипералгебру бесконечного порядка ранга $(1, n, n^2, \ldots)$ (1 – размерность скалярного поля).

§1. Некоторые свойства гипертел и гиперколец

В [1] были рассмотрены свойства невырожденных гипертел и гиперколец с одним нулем. В настоящем параграфе полученные в [1] результаты будут повторены, однако при необходимости будут сделаны оговорки, связанные с расширением основных определений.

1. Среди аддитивных групп гипертела может быть не более одного тела (поля), та как единица, согласно пункту 1 определений, может принадлежать не более чем одной аддитивной группе.

2. Если рассматриваемое множество является гипертелом или гиперполем, то аддитивная ненулевая группа с единицей сама является телом или полем. Действительно, произведение единицы e на элемент этой аддитивной группы представляет собой тот же элемент и принадлежит, следовательно, той же аддитивной группе. Это же верно для элементов A, B из этой аддитивной группы. Пусть теперь

$$A \cdot X = B, \tag{1'}$$

где A и B – элементы, принадлежащие рассматриваемой аддитивной группе. Но тогда X принадлежит той же аддитивной группе. В самом деле, если X принадлежал бы другой аддитивной группе, то eX принадлежал бы этой другой аддитивной группе, а, следовательно, и $B = AX$ принадлежал бы этой же аддитивной группе. Таким образом, X действительно принадлежит аддитивной группе, содержащей единицу, и является единственным решением уравнения $(1')$. Точно так же доказывается, что уравнение

$$Y \cdot A = B, \tag{1''}$$

где A и B принадлежат аддитивной группе с единицей, имеет единственное решение Y, принадлежащее аддитивной группе с единицей. Утверждение доказано.

Таким образом, если аддитивная группа гипертела или гиперполя, содержащая единицу, сама не является нулевой, то она является его единственной аддитивной группой, представляющей собой тело или поле. Легко также видеть, что для гиперкольца с единицей аддитивная группа, содержащая единицу, является кольцом, телом или полем.

3. В случае ассоциативного гипертела, как показано в [1], аддитивная группа, содержащая единицу, является (без нуля) нормальным делителем мультипликативной группы гипертела.

4. Без изменения остается утверждение, что любая аддитивная группа ассоциативного гипертела (гиперполя), кроме нулей, не входящих в мультипликативную группу гипертела или гиперполя, является смежным классом по нормальному делителю.

Отметим еще некоторые свойства гиперколец, гипертел и гиперполей.

5. Покажем, что для невырожденного гиперкольца

$$0_i \cdot B_k = O_l, \tag{2}$$

$$A_i \cdot O_k = O_l, \tag{3}$$

где $0_i, 0_k, 0_l$ – нули i-ой, k-ой и l-ой аддитивных групп, A_i и B_k – элементы i-ой и k-ой аддитивных групп, причем

$$A_i \cdot B_k = C_l, \tag{3$'$}$$

где C_l – элемент l-ой аддитивной группы. Действительно,

$$0_i \cdot B_k = (A_i - A_i) \cdot B_k = C_l - C_l = 0_l,$$

$$A_i \cdot 0_k = A_i \cdot (B_k - B_k) = C_l - C_l = 0_l.$$

В случае вырожденных гиперколец наряду с соотношениями (2) и (3) для некоторых аддитивных групп $\widetilde{A_{i'}}, \widetilde{B_{k'}}, \ldots$ выполняются соотношения

$$0_{i'} \cdot B_{k'} = 0_{l',\, m',\, \ldots}, \tag{2$''$}$$

$$A_{i'} \cdot 0_{k'} = 0_{l',\, m',\, \ldots}, \tag{3$''$}$$

где $0_{l',\, m',\, \ldots}$ – общий нуль аддитивных групп $\widetilde{A_{l'}}, \widetilde{A_{m'}}, \ldots$ (когда $A_{i'} \cdot B_{k'} = 0_{l',\, m',\, \ldots}$).

6. Для невырожденных гиперколец, как уже отмечалось, аддитивные группы гиперкольца составляют мультипликативный группоид – его фактор-группоид по этим аддитивным группам. Легко также видеть, что аддитивные группы $\widetilde{A_i}$ сами являются единственными элементами аддитивных групп с законом сложения

$$\widetilde{A_i} + \widetilde{A_i} = \widetilde{A_i}, \tag{4}$$

причем $\widetilde{A_i}$ является как нулем $\widetilde{0_i}$ этой i-ой аддитивной группы, так и, следовательно, ее противоположным элементом. Поскольку в настоящей заметке расширено понятие гиперкольца, можно теперь утверждать (в [1] такое утверждение было невозможно), что множество аддитивных групп невырожденного гиперкольца само является гиперкольцом, которое назовем *фактор-гиперкольцом* гиперкольца по его аддитивным группам. Легко показать, что такое фактор-гиперкольцо гипертела (гиперполя) само является гипертелом (гиперполем), единицей которого является аддитивная группа, содержащая единицу. Назовем его фактор-гипертелом (фактор-гиперполем) по аддитивным группам гипертела (гиперполя). Единица фактор-гипертела (фактор-гиперполя), являющаяся нулевым кольцом, как таковое не считатется телом или полем[1]. Формула (4) подсказывает, что любой группоид может быть мультипликативным группоидом гиперкольца, для элементов A_i которого определяется сложение

[1] Если и для фактор-гипертела (фактор-гиперполя) принять, что тело (поле) является гипертелом (гиперполем) первого порядка, то единицу фактор-гипертела или фактор-гиперполя (нулевое подкольцо) следует считать полем. При таком подходе любое гипертело (гиперполе) обладало бы единственной аддитивной группой, являющейся телом или полем.

согласно этой формуле. Точно так же любая группа k-го порядка $(k > 1)$ становится мультипликативной группой гипертела, если для ее элементов определить сложение согласно формуле (4).

Отметим еще одно обстоятельство. Пусть какая-нибудь аддитивная группа гипертела является нулевой – $\widetilde{0_l}$. Если при этом имеется хотя бы одна ненулевая аддитивная группа $\widetilde{A_i}$, то при $\widetilde{A_i} \cdot \widetilde{A_k} = 0_l$ произведение всех ее элементов на элемент A_k равно этому (одному и тому же) нулевому элементу 0_l – деление неоднозначно. Поэтому такое гипертело невозможно. Следовательно, аддитивные группы гипертела либо все ненулевые, либо все нулевые. Фактор-гипертело как раз и является гипертелом с нулевыми аддитивными группами.

§2. Гипералгебры, непосредственно связанные с евклидовым векторным пространством

I. Рассмотрим векторное n-мерное пространство L над полем P действительных чисел, в котором определено скалярное произведение [4] (евклидово пространство). Как известно, такое векторное пространство не является алгеброй над полем P, так как скалярное произведение $\beta = (A, B)$ двух векторов является скаляром из поля P и, следовательно, не принадлежит векторному пространству. Скалярное поле P совместно с векторным пространством является, однако, гипералгеброй над полем P второго порядка ранга $(1, n)$, если определить умножение $\circ$ в этом множестве следующим образом:

$$1) \qquad \alpha \circ A = A \circ \alpha = \alpha \cdot A; \tag{5}$$

(если P – поле комплексных чисел, положим

$$\alpha \circ A = A \circ \alpha^* = \alpha \cdot A), \tag{5$'$}$$

где α – скаляр, A – вектор, $\alpha \cdot A$ – произведение скаляра α на вектор A согласно определению векторного пространства;

$$2) \qquad \alpha \circ \beta = \alpha \cdot \beta, \tag{6}$$

где α и β – скаляры (действительные числа), $\alpha \cdot \beta$ – произведение действительных чисел α и β;

$$3) \qquad A \circ B = (A, B), \tag{7}$$

где A и B – векторы, (A, B) – их скалярное произведение.

Утверждение, что рассматриваемое множество является гипералгеброй над полем P, непосредственно следует из формул (5)–(7) и из выполнения условий (1), если P – поле действительных чисел. Полученная гипералгебра неассоциативна[2], поскольку $(A, B) \cdot C \neq A \cdot (B, C)$.

Она, однако, обладает единицей, которой является единица поля действительных чисел, поскольку в определение векторного пространства входит условие $1 \cdot A = A$. Пусть теперь рассматриваемое векторное пространство является алгеброй над полем P действительных чисел с единицей e. Тогда поле $\widetilde{P}$, полученное из поля P отображением

$$\alpha \to \alpha \cdot e, \tag{8}$$

[2] Она йорданова вследствие коммутативности и выполнения для любых ее элементов X, Y соотношений $((XX)Y)X = (XX)(YX)$.

$$\alpha e = \widetilde{\alpha}, \tag{8a}$$

где α – произвольный элемент поля P, изоморфно полю P, но является подалгеброй рассматриваемой алгебры [3]. Пусть также

$$(e, e) = 1. \tag{8$'$}$$

Определим произведение

$$\widetilde{(A, B)} = (A, B) \cdot e, \tag{9}$$

и назовем его внутренним скалярным произведением векторов A и B. Оно является элементом поля $\widetilde{P}$. В частности,

$$\widetilde{(e, e)} = e. \tag{9$'$}$$

Легко видеть, что указанная алгебра с единицей e над полем P действительных чисел является также множеством с алгеброй над полем P, умножение в которой определяется внутренним скалярным произведением (9). Поле $\widetilde{P}$ является ее идеалом. С учетом (8а), (8$'$) имеем для действительных чисел $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$:

$$\widetilde{(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})} = \widetilde{\alpha}\widetilde{\beta} \qquad (9'') \qquad \text{(имеем также} \quad (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \alpha\beta). \qquad (9''')$$

Аналогично, если наше векторное пространство над полем P действительных чисел является подмножеством некоторого мультипликативного группоида с единицей e, и если e принадлежит векторному пространству L, то поле $\widetilde{P} = \alpha \cdot e$ (α – любой элемент поля P) также принадлежит векторному пространству L, и внутреннее скалярное произведение (9) генерирует мультипликативный группоид алгебры с аддитивной группой L. Потребуем, как и в предыдущем случае, также выполнения условия (8$'$) и вытекающего из него условия (9$'$).

Векторное пространство над полем P комплексных чисел с определенным в этом пространстве скалярным произведением вместе с полем P также является гиперкольцом относительно умножения, определенного формулами (5$'$) – (7), но не является гиперaлгеброй, поскольку не выполняются все условия (1). В рассмотренной в настоящем параграфе гиперaлгебре над полем P действительных чисел это поле принадлежит гиперaлгебре. Такие совокупности назовем гиперaлгебрами второго рода.

II. Матрицы A и векторы X в n-мерном комплексном евклидовом пространстве как гиперкольцо.

Это – гиперкольцо второго порядка по аддитивным группам матриц A и векторов X.

Законы умножения:

$$Y = AX \quad \text{– вектор,} \tag{10}$$

$$Z = XA \quad \text{– вектор,} \tag{11}$$

$$B = A_1 \cdot A_2 \quad \text{– матрица,} \tag{12}$$

$$a = (X_1, X_2) \quad \text{– скаляр,}$$

т. е. диагональная матрица

$$A_d = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{13}$$

§3. Гиперактебры, непосредственно связанные с алгебрами над полем P

а). Определим умножение $\circ$ в множестве M, содержащем поле P и алгебру N ранга n над этим полем:

$$1) \qquad \alpha \circ \beta = \alpha \cdot \beta, \tag{6}$$

α, β – элементы поля P, где точка $\cdot$ – знак умножения элементов в поле P;

$$2) \qquad \alpha \circ A = \alpha \cdot A, \qquad A \circ \alpha = \alpha \cdot A, \qquad\qquad (5) \text{ и } (5'')$$

α – элемент поля P, A – элемент векторного пространства; $\cdot$ – знак умножения элемента поля P на элемент векторного пространства, согласно определению векторного пространства над полем P;

$$3) \qquad A \circ B = A \cdot B, \tag{14}$$

A, B – элементы алгебры N, точка $\cdot$ – знак умножения алгебры N.

Легко видеть, что относительно законов умножения $(5), (5''), (6), (14)$ вследствие соблюдения условий (1) множество $P \cup N$ является гиперактеброй над полем P второго рода по аддитивным группоидам P и N второго порядка ранга $(1, n)$. Рассматриваемая гиперактебра ассоциативна при ассоциативности алгебры N, что следует из ассоциативности поля P и условий (1). Легко видеть, что алгебра N является идеалом рассматриваемой гиперактебры, при определении идеала гиперкольца обычным образом как аддитивной группы, умножение на элементы которой не выводит за пределы этой группы; отметим также, что единица поля P является единицей рассматриваемой гиперактебры[3]. Как уже говорилось, если алгебра N – совокупность элементов, обладающих единицей e, то, как известно,

$$\widetilde{\alpha} = \alpha \circ e = \alpha \cdot e,$$

где α – любой элемент поля P, образует поле $\widetilde{P}$, изоморфное полю P, являющееся подалгеброй алгебры N [3].

Отметим также, что если $\widetilde{N}$ – гиперактебра над полем P, то поле P и гиперактебра $\widetilde{N}$ составляют гиперактебру над полем P второго рода, аддитивными группами которой являются аддитивные группы гиперактебры $\widetilde{N}$ и поля P, а умножение определяется формулами $(5), (5''), (6), (14)$.

б). Пусть дана алгебра N без делителей нуля над полем P. Рассмотрим в ней совокупность прямых, проходящих через нуль. Пусть A_0 и B_0 – два ненулевых элемента алгебры без делителей нуля, и пусть

$$C_0 = A_0 \cdot B_0, \tag{15}$$

где C_0 – элемент алгебры, а $\cdot$ – знак умножения в ней. Векторы A_0, B_0, C_0 лежат на прямых $\alpha \cdot A_0,\ \beta \cdot B_0,\ \gamma \cdot C_0$, проходящих через нуль, где α, β, γ – произвольные элементы поля P. Согласно условию (1) имеем:

$$(\alpha \cdot A_0) \cdot (\beta \cdot B_0) = \alpha\beta \cdot (A_0 \cdot B_0), \qquad \text{или}$$

$$(\alpha \cdot A_0) \cdot (\beta \cdot B_0) = \gamma \cdot C_0, \qquad \gamma = \alpha\beta. \tag{16}$$

[3] Рассмотренные объединения поля P и векторного пространства L в настоящем и предыдущем параграфе не являются гиперкольцами, если не вводить умножения $A \circ \alpha$.

Из формулы (16) следует, что произведение элементов прямых $\alpha \cdot A_0$ и $\beta \cdot B_0$ есть элемент, лежащий на прямой $\gamma \cdot C_0$. Отсюда следует, что совокупность прямых, проходящих через нуль алгебры N без делителей нуля, образует невырожденную гипералгебру над полем P по этим прямым бесконечного порядка ранга $(1, 1, \ldots)$, или, согласно [1], первого ранга. (Дистрибутивные законы легко доказываются.) Если N – ассоциативная алгебра с делением, то рассматриваемая совокупность прямых – ассоциативная гипералгебра с делением бесконечного порядка первого ранга над полем P по этим прямым. Поле $\widetilde{P}$, элементы которого равны элементам поля P, умноженным на единицу алгебры N, является (без нуля) нормальным делителем мультипликативной группы этой гипералгебры, а все прямые, проходящие через нуль (кроме нуля) – смежными классами.

При наличии делителей нуля могут быть C_0, равные нулю. В этих случаях произведение элементов прямых $\alpha A_0, \beta B_0$ тождественно равно нулю – вырожденная гипералгебра. Все выводы пункта б) остаются в силе, если N – гипералгебра с общим нулем без делителей нуля. Примером вырожденной гипералгебры является совокупность прямых, проходящих через нуль, в гипералгебре, аддитивными группами которой являются трехмерные векторные пространства полярных и аксиальных векторов, а умножение определяется векторным умножением векторов [1]. Вырожденный характер гипералгебры следует из факта равенства нулю векторного произведения всех векторов, лежащих на одной прямой.

в). Пусть множество M состоит из точек прямых над полем P, пересекающихся только в нулевой точке, и является мультипликативным группоидом. Следовательно, задан закон умножения элементов поля P на элементы множества M:

$$B = \alpha \cdot A, \tag{17}$$

где α – элемент поля P, A – элемент множества M.

Пусть при этом выполняются условия

$$E = (\beta \cdot C) \cdot D = C \cdot (\beta \cdot D) = \beta \cdot (C \cdot D), \tag{18}$$

где β – элемент поля P; C, D, E – элементы множества M.

В частности, множество M может быть алгеброй ненулевого ранга или гипералгеброй с одним нулем. Пусть элементы A, B лежат на прямых

$$A = \alpha \cdot A_0, \tag{19}$$
$$B = \beta \cdot B_0, \tag{20}$$

где A_0, B_0 – ненулевые элементы M, α, β – произвольные элементы P. Имеем:

$$\widetilde{C} = A \cdot B = (\alpha \cdot A_0) \cdot (\beta \cdot B_0) = \alpha\beta \cdot \widetilde{C_0} = \gamma \cdot \widetilde{C_0}, \tag{21}$$

где

$$\widetilde{C_0} = A_0 \cdot B_0, \qquad (\gamma = \alpha\beta). \tag{22}$$

При $\widetilde{C_0} = A_0 \cdot B_0 \neq 0$ имеем прямую; при $\widetilde{C_0} = 0$ мы также имеем $AB = 0$. Далее, если A и B лежат на одной прямой, и $C = \gamma' \cdot C_0$ – элемент другой прямой, то

$$\begin{aligned}
&(A+B)\cdot C = (\alpha\cdot A_0 + \beta\cdot A_0)\cdot\gamma'\cdot C_0 = (\alpha+\beta)\cdot A_0\cdot(\gamma'\cdot C_0) = \\
&= (\alpha+\beta)\cdot\gamma'\cdot(A_0\cdot C_0) = (\alpha+\beta)\cdot\gamma'\cdot D_0; \qquad (D_0 = A_0\cdot C_0); \\
&A\cdot C + B\cdot C = \alpha\gamma'\cdot D_0 + \beta\gamma'\cdot D_0 = (\alpha+\beta)\gamma'\cdot D_0 \\
&C\cdot(A+B) = \gamma'\cdot C_0(\alpha\cdot A_0+\beta\cdot A_0) = \\
&= \gamma'(\alpha+\beta)\cdot(C_0\cdot A_0) = \gamma'(\alpha+\beta)\cdot D_0' \qquad (D_0' = C_0\cdot A_0); \\
&C\cdot A + C\cdot B = (\gamma'\cdot C_0)\cdot\alpha\cdot A_0 + (\gamma'\cdot C_0)\cdot\beta\cdot A_0 = \\
&= \gamma'\alpha\cdot(C_0\cdot A_0) + \gamma'\beta\cdot(C_0\cdot A_0) = \gamma'\alpha\cdot D_0' + \gamma'\beta\cdot D_0' = \gamma'(\alpha+\beta)\cdot D_0'.
\end{aligned}$$

Итак, соблюдаются левый и правый дистрибутивные законы. Следовательно, множество M является гипералгеброй первого ранга. Если указанный группоид, за исключением нуля, является группой, то мы имеем ассоциативную гипералгебру с делением по входящим в нее прямым первого ранга.

Рассмотрим два примера.

1). Пусть элементы множества M – квазиунитарные матрицы n-го порядка над полем комплексных чисел, т. е. матрицы A, для которых $A\cdot A^+ = A^+\cdot A = a$, причем $a \geq 0$ [1]. Они, за исключением нуля, составляют мультипликативную группу, которую мы обозначим как $QU(n)$ [1]. Пусть A_0 – элемент M, $\alpha\cdot A_0$ – прямая, проходящая через нуль, если α – произвольное комплексное число. Согласно сказанному выше,$QU(n)$ и нуль – ассоциативная гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением по прямым, проходящим через нуль. Прямые здесь – одномерные векторные пространства над полем комплексных чисел.

2). Квазиортогональные матрицы n-го порядка с вещественными матричными элементами, т. е. вещественные матрицы A, для которых $A\cdot\widetilde{A} = \widetilde{A}\cdot A = a$, $a \geq 0$, ($\widetilde{A}$ – транспонированная матрица). Множество M состоит их точек вещественных прямых, проходящих через общий нуль. Они образуют (кроме нуля) группу, которую мы обозначим как $QO(n)$ [1]. Как и в примере 1, убеждаемся, что $QO(n)$ и нуль – ассоциативная гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением по вещественным прямым, проходящим через нуль.

Уже из этих примеров видно, что в отличие от небольшого числа (трех) ассоциативных алгебр конечного ранга с делением над полем действительных чисел, число ассоциативных гипералгебр с делением конечного ранга над полем действительных, а также комплексных, чисел бесконечно. В данном примере, однако, порядок гипералгебры бесконечен. Ниже мы увидим, что этот вывод верен и для ассоциативных гипералгебр с делением над полем действительных чисел конечных порядка и ранга.

§4. Гипертела, связанные с ассоциативным телом или непростым полем

Рассмотрим ассоциативное тело или поле, обладающие подтелом или подполем $\widetilde{P}$, мультипликативная группа которых является нормальным делителем мультипликативной группы тела или поля. Это, например, центр тела [2] или любое подполе непростого поля. Пусть A_i и B_i – элементы какого-нибудь класса смежности $\widetilde{A_i}$, а P', P'', P''' – такие элементы нормального делителя – ненулевые элементы рассматриваемого подтела, что

$$A_i = A_i'\cdot P', \quad B_i = A_i'\cdot P'', \tag{23}$$

где A_i' – некоторый элемент класса $\widetilde{A_i}$,

$$A_i + B_i = A_i'(P' + P'') = A_i'P''', \tag{24}$$

$$-A_i = A_i'(-P') = -A_i'P', \tag{24'}$$

$$P''' = P' + P''.$$

Мы видим, что $A_i + B_i$ – элемент класса $\widetilde{A_i}$. Следовательно, каждый смежный класс вместе с нулем является аддитивной группой. Но поскольку произведение элементов двух классов смежности по нормальному делителю – снова элемент какого-нибудь определенного класса смежности, мы видим, что наше тело или поле является гипертелом или гиперполем по классам смежности (вместе с нулем) по нормальному делителю – мультипликативной группе рассматриваемого подтела или подполя $\widetilde{P}$. Это гипертело или гиперполе является, если $\widetilde{P}$ – центр тела или подполе центра, даже гиперaлгеброй второго рода с делением первого ранга над $\widetilde{P}$. Поле $\widetilde{P}$ (без нуля) является нормальным делителем мультипликативной группы гиперaлгебры и (вместе с нулем) одной из прямых, проходящих через нуль, а остальные классы смежности вместе с нулем – также прямыми над $\widetilde{P}$, проходящими через нуль. В качестве примера рассмотрим совокупность прямых комплексной плоскости, проходящих через нуль. Действительная ось – подполе поля комплексных чисел и (без нуля) нормальный делитель мультипликативной группы. Рассматриваемые прямые (без нуля) – смежные классы мультипликативной группы по нормальному делителю. Рассматриваемому полю, согласно сказанному выше, соответствует гиперaлгебра бесконечного порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел по прямым, проходящим через нуль. Ее подгиперaлгебрами, не будучи полями, являются совокупности n прямых (включая действительную ось), проходящих через нуль и делящих комплексную плоскость на $2n$ равных углов. Это – гиперaлгебры с делением по этим прямым первого ранга n-го порядка. Из этого примера снова видно, что число ассоциативных гиперaлгебр с делением конечного ранга над полем действительных чисел бесконечно, причем в данном случае не только ранг, но и порядок гиперaлгебр конечен.

Еще одним примером является поле действительных чисел, рассматриваемое как гиперполе, аддитивными группами которого являются аддитивная группа поля рациональных чисел и остальные классы смежности по мультипликативной группе поля рациональных чисел (вместе с нулем). Это – гиперaлгебра бесконечного порядка первого ранга с делением над полем рациональных чисел.

Отметим еще, что гипертелом является подмножество N некоторого кольца, включающее нуль, являющееся, кроме нуля, группой по умножению и имеющее подмножество, являющееся телом, мультипликативная группа которого – нормальный делитель мультипликативной группы множества N. Аддитивными группами этого гипертела являются все классы смежности по нормальному делителю вместе с нулем. Доказательство совершенно аналогично приведенному для ассоциативного тела. Примерами таких множеств являются рассмотренные выше совокупности прямых комплексной плоскости, проходящих через нуль и делящих комплексную плоскость на $2n$ равных углов; совокупность квазиунитарных матриц второго порядка, рассмотренная в [1], с подтелом кватернионов, а также квазиунитарные матрицы n-го порядка как гиперaлгебры с делением над полем комплексных чисел по прямым, проходящим через нуль.

В дополнение к вышесказанному отметим, что аддитивные группы ассоциативного гипертела, содержащего тело – аддитивную группу с единицей, представляют собой одномерные векторные пространства (прямые) над этим телом.

§5. Гиперкольца и градуированные кольца

I. Каждому невырожденному гиперкольцу соответствует некоторое кольцо, которое мы назовем *обобщенным градуированным кольцом.* Построим его так: возьмем прямую сумму аддитивных групп $\widetilde{A_i}$ гиперкольца [2], [5].

$$\widetilde{A} = \coprod_i \widetilde{A_i}, \tag{25}$$

а умножение в этой прямой сумме проводится почленно и покомпонентно с учетом дистрибутивных законов, правил умножения в гиперкольце и формулы

$$\widetilde{A_i}\widetilde{A_k} = \widetilde{A_l}. \tag{a}$$

Рассмотрим специальный случай, когда: 1) умножение по формуле (a) ассоциативно и коммутативно, но умножение элементов $A_iA_k = A_l$ не обязательно ассоциативно и коммутативно; 2) множество $\{\widetilde{A_i}\}$, как мультипликативный группоид, и множество индексов $\mathcal{J}(i,k,l,\ldots)$ – изоморфные полугруппы, но композиция в $\mathcal{J}$ аддитивна, а в $\{\widetilde{A_i}\}$ мультипликативна. Тогда при

$$l = i + k, \qquad \text{имеем} \tag{26}$$

$$\widetilde{A_i}\widetilde{A_k} = \widetilde{A_{i+k}} \tag{27}$$

и мы получаем стандартное градуированное кольцо [5]. (Гиперкольца, для которых выполняется соотношение (27), назовем *стандартными градуированными.*) В тех случаях, когда все $\widetilde{A_i}$ – аддитивные подгруппы группы $\widetilde{A}$, причем верна однозначная запись

$$A = A_1 + \ldots + A_n, \tag{28}$$

прямая сумма изоморфна обычной [5].

II. Обратно, градуированному кольцу соответствует гиперкольцо, поскольку в нем для слагаемых $\widetilde{A_i}$ выполняются условия (a), а для рассмотренного специального случая – условия (26), (27).

Поскольку в градуированном кольце аддитивные подгруппы $\widetilde{A_{iGR}}$ обладают общим нулем [5], совокупность всех входящих в них элементов составляет гиперкольцо с одним общим нулем, тогда как гиперкольцо, составленное из элементов групп $\widetilde{A_i}$, может содержать нули 0_i этих групп, вообще говоря несовпадающие. В этом случае гиперкольца, составленные из элементов групп $\widetilde{A_i}$ и элементов соответствующих групп $\widetilde{A_{iGR}}$, не изоморфны, а лишь гомоморфны.

Рассмотрим примеры. Легко показать. что:

1a) Кольцо действительных матриц второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является градуированным кольцом, соответствующим гиперкольцу (гиперполю) всех квазиортогональных матриц второго порядка [1]

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} z & t \\ t & -z \end{pmatrix}, \tag{29$'$}$$

поскольку

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a+d}{2} & \dfrac{b-c}{2} \\ -\dfrac{b-c}{2} & \dfrac{a+d}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{a-d}{2} & \dfrac{b+c}{2} \\ \dfrac{b+c}{2} & -\dfrac{a-d}{2} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Отметим, что это гиперкольцо представляет собой одномерное евклидово пространство векторов $A = \begin{pmatrix} z & t \\ t & -z \end{pmatrix}$ над полем P комплексных чисел $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ совместно с этим полем, причем $B \cdot A = A \cdot B^{+}$ – произведение элемента B поля P на вектор A, а $A_1 \cdot A_2 = (A_1, A_2)$ – скалярное произведение векторов A_1 и A_2.

1b). Действительные антикватернионы (действительные матрицы второго порядка) [6] как градуированная алгебра, и соответствующая ей гипералгебра.

Антикватернион (действительные матрицы второго порядка) имеет вид [6]:

$$C = x1 + yi + zj + tk, \tag{30}$$

I – единица, x, y, z, t – действительные числа; i, j, k – мнимые единицы, причем

$$i^2 = -1, \quad j^2 = k^2 = I, ji = -ij = k, \quad ik = -ki = j, \quad kj = -jk = -i. \tag{31}$$

Антикватернионы, как легко видеть, представляют собой градуированную алгебру, которой соответствует гипералгебра над действительным полем с делением по действительной и трем мнимым осям как аддитивным группам. Действительная и мнимые единицы могут быть получены из формул (29′) для квазиунитарных матриц B и A:

$$\begin{gathered} I = B|_{x=1,y=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = B|_{x=0,y=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ j = A|_{z=1,t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad k = A|_{z=0,t=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{32}$$

Матрицы B и A теперь принимают вид:

$$B = x + yi, \quad A = zj + tk. \tag{33}$$

Прямая сумма аддитивных групп $\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}$ с элементами B и A приводит к формуле (30).

2a) Кольцо комплексных матриц второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является градуированным кольцом, соответствующим гиперкольцу (гиперполю) квазиунитарных матриц второго порядка вида

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} z & t \\ t^* & -z^* \end{pmatrix}, \tag{34}$$

поскольку

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a+d^*}{2} & \dfrac{b-c^*}{2} \\ -\dfrac{(b-c^*)^*}{2} & \dfrac{(a+d^*)^*}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{a-d^*}{2} & \dfrac{b+c^*}{2} \\ \dfrac{(b+c^*)^*}{2} & -\dfrac{(a-d^*)^*}{2} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

2b). Комплексные матрицы второго порядка как комплексные антикватернионы и как градуированное кольцо, и соответствующее ему гипертело.

Нетрудно показать, что комплексные матрицы $\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}$ (см. (34)) имеют вид:

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix} = \widetilde{x}I + \widetilde{y}i = I\widetilde{x} + i\widetilde{y}^+, \tag{36}$$

$$\widetilde{A} = \widetilde{z}j + \widetilde{t}k = j\widetilde{z} + k\widetilde{t}^+, \tag{37}$$

где

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^* \end{pmatrix}, \ \widetilde{y} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^* \end{pmatrix}, \ \widetilde{z} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^* \end{pmatrix}, \ \widetilde{t} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^* \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, \widetilde{t}$ – комплексные матрицы типа $\widetilde{w}$:

$$\widetilde{w} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^* \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Прямая сумма аддитивных групп $\widehat{B}$ и $\widehat{A}$ с элементами $\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}$ приводит к кольцу комплексных матриц второго порядка $\widetilde{C}$ с элементами:

$$\widetilde{C} = \widetilde{x}I + \widetilde{y}i + \widetilde{z}j + \widetilde{t}k = I\widetilde{x} + i\widetilde{y}^+ + j\widetilde{z} + k\widetilde{t}^+. \tag{40}$$

Матрицы C, записанные в виде (40), могут рассматриваться как антикватернионы над матрицами $\widetilde{w}$, которые, как легко показать, в совокупности изоморфны комплексным числам w. Нетрудно показать, что аддитивные группы элементов $\widetilde{x}I, \widetilde{y}i, \widetilde{z}j, \widetilde{t}k$ составляют гипертело четвертого порядка.

3) Кольцо (поле) комплексных чисел является градуированным кольцом, соответствующим гиперкольцу (гиперполю) действительной и мнимой осей.

Следует отметить, что не для всех гиперколец переход от них к соответствующим градуированным кольцам, сводящийся к составлению прямых сумм входящих в гиперкольцо аддитивных групп, целесообразен. Так, вряд ли имеет смысл составлять прямые суммы пространств полярных и аксиальных векторов, или прямые суммы физических величин, имеющих разные размерности.

§6. Кольцеобразные гиперкольца

Среди гиперколец следует выделить такие, которые в определенном смысле ближе других к кольцам. Пусть:

1) Имеется одноозначное соответствие между элементами различных аддитивных групп, предполагаемых равномощными

$$a_i \leftrightarrows a_k \leftrightarrows a_l \leftrightarrows \ldots, \quad b_i \leftrightarrows b_k \leftrightarrows b_l \leftrightarrows \ldots, \quad c_i \leftrightarrows c_k \leftrightarrows c_l \leftrightarrows \ldots, \tag{41}$$

причем для каждой r-й аддитивной группы

$$a_r + b_r = d_r, \qquad d_i \leftrightarrows d_k \leftrightarrows d_l \leftrightarrows \ldots. \tag{42}$$

Далее,

$$a_i \cdot b_k = e_l, \qquad e_i \leftrightarrows e_k \leftrightarrows e_l \leftrightarrows \ldots. \tag{43}$$

2) Имеется единственная аддитивная группа A_0, являющаяся кольцом, так что, согласно пункту 1,

$$a_0 \leftrightarrows a_1 \leftrightarrows a_2 \leftrightarrows \ldots, \quad b_0 \leftrightarrows b_1 \leftrightarrows b_2 \leftrightarrows \ldots, \quad e_0 \leftrightarrows e_1 \leftrightarrows e_2 \leftrightarrows \ldots, \tag{44}$$

$$a_0 b_0 = e_0, \tag{45}$$

где a_0, b_0, e_0 – элементы кольца A_0.

3) Гиперкольцо имеет единственный нуль.

Такое гиперкольцо назовем кольцеобразным.

Можно, вместо формул (41)–(45), записать такое гиперкольцо в виде (вообще говоря, прямоугольной) матрицы с элементами $A_{\alpha i}$, причем столбцы этой матрицы (i фиксирован) образуют аддитивную группу, а ее строки – рассмотренные выше находящиеся в одноoднозначном соответствии элементы. Индексы α, i могут быть непрерывными (часто; в примерах, приводимых ниже, индекс α непрерывен).

Согласно изложенному выше:

1) имеется единственное кольцо $A_0, A_{\alpha 0}$ – элементы кольца;

2) гиперкольцо имеет единственный нуль, причем пусть

$$A_{00} = 0; \tag{46}$$

3) справедливо

$$A_{\alpha i} + A_{\beta i} = A_{\gamma(\alpha,\beta) i} \tag{47}$$

(γ не зависит от i); в частности,

$$A_{\alpha 0} + A_{\beta 0} = A_{\gamma 0}; \tag{48}$$

4)

$$A_{\alpha i} \cdot A_{\beta k} = A_{\delta(\alpha,\beta) l(i,k)}, \tag{49}$$

δ не зависит от i, k; l не зависит от α, β.

Можно говорить об умножении и сложении строк, которые образуют кольцо, изоморфное кольцу A_0.

Из формул (46), (47) следует

$$A_{00} + A_{\beta 0} = A_{\beta 0}, \qquad A_{0i} + A_{\beta i} = A_{\gamma(0,\beta) i}. \tag{50}$$

Но поскольку γ не зависит от i, то

$$A_{0i} + A_{\beta i} = A_{\beta i}, \tag{51}$$

откуда

$$A_{0i} = 0i.$$

Но вследствие единственности нуля

$$A_{0i} = 0. \tag{52}$$

Приведем три примера кольцеобразных гиперколец.

1). Размерные действительные числа $A_{\beta i}$, причем индекс i характеризует размерность, $A_{\beta 0}$ – элементы кольца безразмерных чисел, строки $A_{\beta i}$ (β фиксирован) численно равны.

2). Гиперкольцо аксиальных и полярных векторов по векторному умножению $\overrightarrow{A}_{\beta i} (i = 0, 1)$, причем $\overrightarrow{A}_{\beta 0}$ – элементы кольца аксиальных векторов, $\overrightarrow{A}_{\beta 1}$ – элементы аддитивной группы полярных векторов, причем имеется два варианта: или $\overrightarrow{A}_{\beta 1}$ и $\overrightarrow{A}_{\beta 0}$ численно равны, или $\overrightarrow{A}_{\beta 1}$ и $-\overrightarrow{A}_{\beta 0}$ численно равны.

3). Действительная и мнимая оси двойных чисел, т. е. чисел $a+ib$, причем $i^2 = 1$.

а) Действительная ось

$$A_{a0} = a. \tag{53}$$

б) Мнимая ось. Имеется два варианта:

$$\text{или} \quad A_{a1} = ai, \qquad \text{или} \quad A_{a1} = -ai. \tag{54}$$

Приложение
Пятое свойство, входящее в определение гиперкольца, как следствие дистрибутивности по сложению в гиперкольце и умножению

Рассмотрим $\widetilde{A_i}$-ю и $\widetilde{A_k}$-ю аддитивные группы гиперкольца. Тогда: либо

$$\widetilde{A_i} \cdot \widetilde{A_k} = 0_{l',m',\dots}\,, \tag{$D1$}$$

либо

$$\widetilde{A_i} \cdot \widetilde{A_k} \neq 0_{l',m',\dots}\,, \tag{$D2$}$$

где $0_{l',m',\dots}$ – некоторый нуль, принадлежащий аддитивным группам $l', m', \dots$, т. е. более чем одной аддитивной группе. В первом случае

$$A_i \cdot A_k = 0_{l',m',\dots} \qquad \text{для всех} \quad A_i \text{и} A_k \tag{$D3$}$$

(A_i, A_k – элементы аддитивных групп $\widetilde{A_i}$ и $\widetilde{A_k}$).

Перейдем ко второму случаю. Пусть, например, $A_i \cdot A_k \neq 0_{l',m',\dots}$ и A_i, B_i; A_k, B_k – элементы аддитивных групп $\widetilde{A_i}$ и $\widetilde{A_k}$ соответственно. Рассмотрим произведение $(A_i + B_i) \cdot (A_k + B_k)$. Используя дистрибутивные законы, получим:

$$(A_i + B_i) \cdot (A_k + B_k) = A_i \cdot A_k + B_i \cdot A_k + A_i \cdot B_k + B_i \cdot B_k. \tag{$D4$}$$

Поскольку все произведения в правой части (D4) соединены знаком "+", они принадлежат одной и той же, скажем, l-й аддитивной группе.

Таким образом, любые $B_i \cdot B_k$ принадлежат одной и той же аддитивной группе (той же, что $A_i \cdot A_k$). Следовательно, дистрибутивные законы (по сложению в гиперкольце и умножению) приводят к результатам:
либо верно (D3), либо все $A_i \cdot A_k$ принадлежат одной и той же, скажем l-й, аддитивной группе.

Литература

[1] Соловей Л. Г. "О некоторых дистрибутивных универсальных алгебрах". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2**, 2004

[2] Курош А. Г. "Лекции по общей алгебре", ГИФМЛ, М., 1962.

[3] Курош А. Г. "Курс высшей алгебры", 2-е изд., ГИТТЛ, М.-Л., 1949.

[4] Гельфанд И. М. "Лекции по линейной алгебре". 4-е изд. "Наука", ГРФМЛ, М., 1971.

[5] Ленг С. "Алгебра". Пер. с англ. под ред. А. И. Кострикина. "Мир", М., 1968.

[6] Розенфельд Б. А. "Многомерные пространства", "Наука", М., 1966.