БИНАРНАЯ СИСТЕМА ЧИСЕЛ И ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ ЛОКАЛЬНОГО АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
zaripov@mail.knc.ru

Рассматривается система бинарных чисел и их преобразования, которые допускают отображения на преобразования временного интервала и пространственного расстояния локального пространства-времени. Установлены четыре принципиально различных типа двумерных локальных анизотропных финслеровых геометрий и находятся новые преобразования. Исследуются групповые свойства закона композиции одинаково направленных анизотропных скоростей. Новым результатом является взаимосвязь элемента финслерова пространства с полунормой в вероятностном подходе к исследованию локальной геометрии.

Введение

Известно, что базисом современной физической теории (в случае специальной теории относительности) является локальное изотропное четырехмерное псевдоевклидово пространство-время Минковского. На одном из методов расширения псевдоевклидовой геометрии основывается финслерова геометрия, характерным свойством которой является наличие в локальном пространстве-времени анизотропии. Отметим лишь монографии [1–8], где приводятся подробные обзоры исследований в этом направлении. При этом считается, что в предельном случае $c \to \infty$ (c – "средняя" скорость света в вакууме вдоль замкнутого пути) релятивистские законы механики переходят в соответствующие законы классической механики. Однако такой переход носит формальный характер, что показано в данной работе при отображении преобразований Галилея на преобразования дуальных чисел. Целью настоящей работы является более глубокое изучение вопросов одновременности разноместных событий в локальном финслеровом пространстве-времени, что позволяет строго физически обосновать финслерову структуру геометрии и найти преобразования временных интервалов и пространственных расстояний между инерциальными системами отсчета. Здесь используется случай двумерного пространства-времени, что проясняет взаимосвязь с системой бинарных чисел. Дальнейшее развитие финслерового обобщения специальной теории относительности видится в использовании вероятностных подходов в исследованиях локальных геометрий.

1. Отношение одновременности разноместных событий и анизотропия скорости света.

Рассмотрим три события, взаимосвязанные световым сигналом и происходящие в пространственных точках A и B элемента твердого тела с физической длиной, равной пространственному расстоянию dL_{AB}. Показания часов в точках A и B есть физические времена T_A и T_B. Пусть из точки A через интервал времени dT_1^A отправляется сигнал, который через интервал времени dT_2^B прибудет в точку B. Далее сигнал, отраженный от точки B, через интервал времени dT_3^A прибудет в точку A.

События происходят в локальной системе отсчета пространственно-временного континуума. Согласно А. Пуанкаре [9] для стандартной синхронизации часов необходимо определить отношение метрической одновременности события в точке A с событием в точке B, происходящим в середине временного интервала $dT_3^A - dT_1^A$. Таким образом, имеем соотношение

$$dT_2^B - dT_1^A = dT_3^A - dT_2^B, \tag{1.1}$$

которое дает равенство физических скоростей света $c_{AB} = c_{BA} = c_0$ вдоль твердого тела. При этом выполняется постулат о равенстве масштабов расстояния, измеряющих длину твердого тела в прямом и обратном направлениях, и используется опытный факт постоянства "средней" скорости света вдоль замкнутого пути, то есть имеем соотношения

$$dL_{AB} = dL_{BA}, \qquad c_0 = \frac{dL_{AB} + dL_{BA}}{dT_3^A - dT_1^A} = \frac{2dL_{AB}}{dT_3^A - dT_1^A}. \tag{1.2}$$

Согласно Г. Рейхенбаху и А. Грюнбауму [10, 11] события, происходящие во временном интервале $dT_3^A - dT_1^A$, есть топологически одновременные события к событию в точке B. Отношение метрической одновременности определяется конвенционально выбором произвольного события из топологически одновременных событий.

Сигнальный метод синхронизации часов, предложенный впервые А. Пуанкаре, дает наблюдаемые интервалы времени в точке A

$$dT_1^A = dT_2^B - dL_{AB}/c_0, \quad dT_3^A = dT_2^B + dL_{AB}/c_0\,. \tag{1.3}$$

Различаем несколько случаев. В первом случае интервал собственного времени в точке B определяется выражением

$$dT_0^B = \frac{1}{2}\sqrt{\left(dT_1^A + dT_3^A\right)^2 - \left(dT_1^A - dT_3^A\right)^2} = \\ = \sqrt{dT_1^A dT_3^A} = \sqrt{\left(dT - dL/c_0\right)\left(dT + dL/c_0\right)}, \tag{1.4}$$

где опущены используемые индексы. Запишем квадратичную дифференциальную форму

$$ds^2 = c_0^2 dT_0^2 = c_0^2 dT^2 - dL^2, \tag{1.5}$$

которая представляет собой элемент длины в т. н. локальной майкельсоновой системе отсчета пространственно-временного континуума. Форма задана в координатной сетке (x_0, x_1, x_2, x_3) с $x_0 = c_0 t$. Для риманового многообразия с квадратичной формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{1.6}$$

и сигнатурой $(+ - --)$ имеем

$$dT = \sqrt{g_{00}}\left(dx^0 + \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}\right), \tag{1.7}$$

$$dL^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.8}$$

где $dL = |dL| = \sqrt{dL^2}$ и значения индексов $i = (0, 1, 2, 3)$, $\alpha = (1, 2, 3)$. В полугеодезических координатах имеем $g_{0\alpha} = 0, g_{00} = \pm 1$. Для определителя справедливо неравенство $|g_{ij}| < 0$.

Для пространства-времени Минковского в галилеевых координатах получим

$$dT = dt, \quad dL^2 = (d\vec{r})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.9}$$

Здесь интервал физического времени совпадает с интервалом координатного времени и физическая длина есть длина локального радиуса-вектора $(d\vec{r})^2$ с координатами (dx, dy, dz). Физические скорости произвольных сигналов равняются координатным. В случае (1.7) и (1.8) эти равенства не выполняются.

Во втором случае рассмотрим риманово многообразие с квадратичной формой (1.6), имеющей сигнатуру $(+ + ++)$. Тогда имеем соотношения

$$dT_0^B = \frac{1}{2}\sqrt{(dT_1^A + dT_3^A)^2 + (dT_1^A - dT_3^A)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(dT_1^A)^2 + (dT_3^A)^2\right]} = \sqrt{dT^2 + dL^2/c_0^2}, \tag{1.10}$$

$$ds^2 = c_0^2 dT_0^2 = c_0^2 dT^2 + dL^2, \tag{1.11}$$

$$dL^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha dx^\beta \tag{1.12}$$

и для определителя справедливо неравенство $|g_{ij}| > 0$.

В третьем вырожденном случае положим $dT_1^A = dT_3^A = dT_2^B$ и получим

$$dT_0^B = dT, \quad ds^2 = c_0^2 dT_0^2 = c_0^2 dT^2 = c_0^2 \left[g_{00}\left(dx^0 + \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}\right)\right]^2. \tag{1.13}$$

Риманово многообразие с определителем $|g_{ij}| = 0$ имеет сигнатуру с некоторыми нулевыми значениями.

Требует отдельного рассмотрения ещё один невырожденный случай риманова многообразия с сигнатурой $(+ + --)$.

Наиболее общая связь между временными интервалами запишется так

$$\varepsilon_{12} dT_3^A + \varepsilon_{23} dT_1^A + \varepsilon_{31} dT_2^B = 0, \tag{1.14}$$

где $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}$ и ε_{31} есть постоянные элементы антисимметричной временной матрицы перехода между событиями. При стремлении точки к точке интервалы времен dT_3^A и dT_2^B приближаются к dT_1^A, поэтому в пределе получим соотношение

$$\lim_{A \to B}\left(\varepsilon_{12} dT_3^A + \varepsilon_{23} dT_1^A + \varepsilon_{31} dT_2^B\right) = \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}\right) dT_1^A = 0. \tag{1.15}$$

Поскольку dT_1^A есть произвольная величина, то вытекает условие

$$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} = 0, \tag{1.16}$$

накладываемое на коэффициенты и, следовательно, имеем два независимых параметра.

Из соотношений (1.14) и (1.16) находим следующее равенство

$$\frac{dT_2^B - dT_1^A}{\varepsilon_{12}} = \frac{dT_3^A - dT_2^B}{\varepsilon_{23}} = \frac{dT_1^A - dT_3^A}{\varepsilon_{13}} = \frac{dL_{AB}}{c_0}, \tag{1.17}$$

из которого получим значения анизотропных физических и "средней" скорости света

$$c_{AB} = c_+ = \frac{c_0}{\varepsilon_{12}} c_{BA} = c_- = \frac{c_0}{\varepsilon_{23}} c = \gamma c_0 = \frac{2c_0}{\varepsilon_{13}} \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-} = \frac{2\varepsilon}{c}, \quad \frac{1}{c_+} + \frac{1}{c_-} = \frac{2}{c}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{12} - \varepsilon_{23}}{\varepsilon_{13}}, \tag{1.19}$$

где ε есть скалярный параметр временной анизотропии и γ – скалярный параметр, характеризующий "показатель преломления" для света. Для "средних" скоростей вдоль замкнутого пути должен выполняться следующий предел $\lim\limits_{c_0 \to \infty} c/c_0 = 1$. Случай с $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$ соответствует абсолютной одновременности классической физики, в которой сигнальный метод Пуанкаре отсутствует.

Наблюдаемые временные интервалы в точке равняются

$$dT_1^A = dT_2^B - dL_{AB}/c_+, \qquad dT_3^A = dT_2^B + dL_{AB}/c_- \tag{1.20}$$

Значение $c_{AB} = c_+$ определяет скорость света, отправленного из точки A в точку B, а $c_{AB} = c_+$ – скорость света, отправленного из точки B в точку A твердого тела. Это означает, что в точке A не определяется скорость света, отправленного из точки A в противоположное от точки B направление. Аналогично, в точке B не определяется скорость света, отправленного из точки A в противоположное от точки A направление. При $\varepsilon_{13} = 2$ и $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 1$ из рассматриваемой общей синхронизации часов получим стандартную синхронизацию по Пуанкаре. Преобразования координатной сетки не устраняют физическую анизотропию скорости света. Координатная анизотропия скорости dx^α/dx^0 в римановом многообразии с (1.6) для изотропных геодезических устраняется преобразованиями координатной сетки, если dT есть полный дифференциал. В отличие от работ [12, 13], где приводятся впервые соотношение вида (1.10) для моментов времени, здесь имеем соотношение (1.10) для временных интервалов.

2. Типы финслеровых геометрий

Рассмотрим преобразования временного интервала и пространственного расстояния при переходах между движущимися локальными системами (K) и (K'). В системе (K') имеем скорости светового сигнала

$$c'_+ = \frac{c_0}{\varepsilon'_{12}}, \quad c'_- = \frac{c_0}{\varepsilon'_{23}}, \quad c' = \gamma' c_0 = \frac{2c_0}{\varepsilon'_{13}}, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{c'_+} - \frac{1}{c'_-} = \frac{2\varepsilon'}{c'}, \quad \frac{1}{c'_+} + \frac{1}{c'_-} = \frac{2}{c'}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon'_{12} - \varepsilon'_{23}}{\varepsilon'_{13}}. \tag{2.2}$$

Для наглядности примем, что элемент твердого тела расположен вдоль положительного направления $dx^1\,(dx^2 = dx^3 = 0)$. Он начинает движение от начала координатной сетки системы (K). Физическая длина элемента твердого тела, расположенного вдоль положительного направления $dx^{1'}$, равняется $dX' = |dX'|$ и является, согласно (1.8), абсолютной величиной. Направление $dx^{1'}$ совпадает с направлением dx^1.

Рассмотрим первый случай. Воспользуемся методом коэффициента "k" для света, идущего от A к B и от B к A, и запишем соотношения

$$(c'/c_0)^{1/2}\left(dT' - dX'/c'_+\right) = k_+\,(c/c_0)^{1/2}\,(dT - dX/c_+)\,, \tag{2.3}$$

$$(c'/c_0)^{1/2}\,k'_-\left(dT' + dX'/c'_-\right) = (c/c_0)^{1/2}\,(dT + dX/c_-)\,. \tag{2.4}$$

В других случаях расположения элемента твердого тела в системах (K) и (K') имеют место соотношения, отличные от (2.3) и (2.4) с другими значениями скорости света.

Коэффициенты $k_+ (c/c')^{1/2}$ и $k'_- (c'/c)^{1/2}$ описывают эффект Допплера в прямом и обратном направлениях. Согласно (2.3) и (2.4) получим равенства

$$k'_- \frac{c'}{c_{0\,-}} \left[dT'^2 - \left(\frac{1}{c'_+} - \frac{1}{c'_-} \right) dT' dX' - \left(\frac{1}{c'_+ c'_-} \right) dX'^2 \right] =$$

$$= k_+ \frac{c}{c_0} \left[dT^2 - \left(\frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-} \right) dT dX - \left(\frac{1}{c_+ c_-} \right) dX^2 \right], \tag{2.5}$$

$$k_+ k'_- \frac{dT' + dX'/c'_-}{dT' - dX'/c'_+} = \frac{dT + dX/c_-}{dT - dX/c_+}. \tag{2.6}$$

При $dX' = 0$ и $dX = 0$ имеем, соответственно, $dX = v_+ dT$ и $dX' = -v'_- dT'$, где v_+ и v'_- есть относительные скорости систем. Из (2.6) вытекает выражение

$$k_+ k'_- = k^2 = \frac{1 + v_+/c_-}{1 - v_+/c_+} = \frac{1 + v'_-/c'_+}{1 - v'_-/c'_-}, \tag{2.7}$$

из которого находим взаимосвязь между скоростями

$$c \left[\frac{1}{v_+} - \frac{1}{c_+} \right] = c' \left[\frac{1}{v'_-} - \frac{1}{c'_-} \right]. \tag{2.8}$$

При $dX/dT = u_+$ и $dX'/dT' = u'_+$, а также с учетом (2.7), равенство (2.6) для одинаково направленных скоростей преобразуется следующим образом

$$\frac{1 - v_+/c_+}{1 + v_+/c_-} \frac{1 - u'_+/c'_+}{1 + u'_+/c'_-} = \frac{1 - u_+/c_+}{1 + u_+/c_-}. \tag{2.9}$$

Из него, в частности, при $\varepsilon = \varepsilon'$, вытекает закон композиции безразмерных одинаково направленных анизотропных скоростей

$$\left(\frac{u_+}{c} \right) = \left(\frac{u'_+}{c'} \right) \circ \left(\frac{v_+}{c} \right) = \frac{u'_+/c' + v_+/c - 2\varepsilon u'_+ v_+/c'c}{1 + (1 - \varepsilon^2)\, u'_+ v_+/c'c}, \tag{2.10}$$

множество которых образует абелевую группу.

Определители прямых и обратных преобразований, вытекаемых из соотношений (2.3) и (2.4), равняются $A = k_+/k'_-$ и $A' = k'_-/k$ $(AA' = 1)$. Учитывая (2.7), получим значения

$$k_+ = \sqrt{A} k, \quad k'_- = \sqrt{A'} k, \tag{2.11}$$

где $A = A(v_+)$, как и $A' = A\left(v'_-\right)$, обладает групповым свойством

$$A(u_+) = A\left(u'_+\right) A(v_+). \tag{2.12}$$

Используя закон композиции в виде (2.9) и равенство (2.12), получим уравнение

$$(1 - v_+/c_+)(1 + v_+/c_-) \frac{d \ln A}{dv_+} = -2r \tag{2.13}$$

имеющее одинаковый вид и для скоростей u_+, u'_+. Инвариантный параметр r может зависеть от инвариантных значений c_+ и c_-. Интегрируя (2.13) при условии $A(0) = 1$, получим выражение $A(v_+)$, преобразования и квадрат форм-инвариантной метрической функции в следующих типах локальных финслеровых геометрий.

Тип I ($\varepsilon_{12} \neq \varepsilon_{23}$).

$$A(v_+) = \left(\frac{1 + v_+/c_-}{1 - v_+/c_+}\right)^{-r} \tag{2.14}$$

$$\frac{dX'}{\sqrt{c'}} = \sqrt{\frac{A(v_+)}{c}}\frac{dX - v_+ dT}{\alpha_+}, \qquad \alpha_+ = \left[\left(1 - \frac{v_+}{c_+}\right)\left(1 + \frac{v_+}{c_-}\right)\right]^{1/2} \tag{2.15}$$

$$\sqrt{c'}dT' = \frac{\sqrt{A(v_+)\,c}}{\alpha_+}\left\{dT\left[1 - \frac{(\varepsilon + \varepsilon')\,v_+}{c}\right] - dX\left[\frac{v_+}{c_+ c_-} + \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{c}\right]\right\} \tag{2.16}$$

$$F^2 = cc_0\left(\frac{dT - dX/c_+}{dT + dX/c_-}\right)^r (dT - dX/c_+)(dT + dX/c_-) =$$

$$= cc_0\left(\frac{dT - (1+\varepsilon)\,dX/c}{dT + (1-\varepsilon)\,dX/c}\right)^r\left[dT^2 - \frac{2\varepsilon dT dX}{c} - \frac{(1-\varepsilon^2)\,dX^2}{c^2}\right]. \tag{2.17}$$

Тип II ($\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} = \varepsilon'_{12} + \varepsilon'_{23} = 0$).

$$A(v_+) = \exp\left(-\frac{2rv_+}{1 - v_+/c_+}\right) \tag{2.18}$$

$$dX' = \sqrt{A(v_+)}(dX - v_+ dT)/\alpha_+, \quad \alpha_+ = 1 - v_+/c_+ \tag{2.19}$$

$$dT' = \frac{\sqrt{A(v_+)}}{\alpha_+}\left\{dT\left[1 - v_+\left(\frac{1}{c_+} + \frac{1}{c'_+}\right)\right] - dX\left[-\frac{v_+}{c_+^2} + \left(\frac{1}{c_+} - \frac{1}{c'_+}\right)\right]\right\} \tag{2.20}$$

$$F^2 = c_0^2 \exp\left(\frac{2rdX}{dT - dX/c_+}\right)(dT - dX/c_+)^2. \tag{2.21}$$

Значение $A(v_+)$ и преобразования в типе II вытекают из формул (2.13), (2.15)–(2.17) в типе I формально при $c_+ = -c_-$.

Тип III ($\varepsilon_{12} \neq \varepsilon_{23}$).

$$A(v_+) = \exp\left(-2r \cdot arctg\frac{v_+/c}{1 - \varepsilon v_+/c}\right), \tag{2.22}$$

$$\frac{dX'}{\sqrt{c'}} = \sqrt{\frac{A(v_+)}{c}}\frac{dX - v_+ dT}{\alpha_+}, \quad \alpha_+ = \left[1 - \frac{2\varepsilon v_+}{c} + \frac{(1+\varepsilon^2)\,v_+^2}{c^2}\right]^{1/2} \tag{2.23}$$

$$\sqrt{c'}dT' = \frac{\sqrt{A(v_+)\,c}}{\alpha_+}\left\{dT\left[1 - \frac{(\varepsilon + \varepsilon')\,v_+}{c}\right] - dX\left[-\frac{v_+(1+\varepsilon^2)}{c^2} + \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{c}\right]\right\} \tag{2.24}$$

$$F^2 = \frac{1}{2}cc_0\left\{\exp\left[2rarctg\frac{(dT + dX/c_-) - (dT - dX/c_+)}{(dT + dX/c_-) + (dT - dX/c_+)}\right]\right\}\times$$

$$\times\left[(dT - dX/c_+)^2 + (dT + dX/c_-)^2\right] =$$

$$= cc_0\left[\exp\left(-2rarctg\frac{dX}{cdT - \varepsilon dX}\right)\right]\left[dT^2 - \frac{2\varepsilon dT dX}{c} + \frac{(1+\varepsilon^2)\,dX^2}{c^2}\right]. \tag{2.25}$$

Тип IV ($\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{23} = 0$).

$$A(v) = \exp(-2rv) \tag{2.26}$$

$$dX' = \sqrt{A(v)}\,(dX - vdT), \quad dT' = \sqrt{A(v)}dT \tag{2.27}$$

$$F^2 = c_0^2 \left[\exp\left(2rdX/dT\right)\right] dT^2. \tag{2.28}$$

Формулы для типа III получены на основании результатов работы [14]. Формулы для типа IV получены из соотношений (2.18)–(2.21) в типе II при $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$. При $\varepsilon' = \varepsilon$ и $c' = c$ первые три типа соответствуют для определенных значений r и c трём типам локальных финслеровых геометрий с индикатрисой постоянной кривизны, рассмотренных в работе [15].

Рассмотрим случай с $r = r\left(c_+, c_-\right)$ и запишем интервал собственного времени в типе I так

$$dT_0 = \left(dT - dX/c_+\right)^{\frac{1+r}{2}} \left(dT + dX/c_-\right)^{\frac{1-r}{2}}. \tag{2.29}$$

Равенство $dT_0 = dT$ соответствует геометрии Галилея и имеет место при $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$, если выполняются соотношения

$$\frac{1+r}{2} = \frac{c_+}{c_+ + c_-} = \frac{c}{2c_-}, \frac{1-r}{2} = \frac{c_-}{c_+ + c_-} = \frac{c}{2c_+}. \tag{2.30}$$

Из (2.30) получим инвариантное значение параметра

$$r = \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-} = -\varepsilon \tag{2.31}$$

и, следовательно, интервал собственного времени примет вид

$$dT_0 = \left(\frac{dT - dX/c_+}{dT + dX/c_-}\right)^{(c_+ - c_-)/2(c_+ + c_-)} \sqrt{\left(dT - dX/c_+\right)\left(dT + dX/c_-\right)} =$$

$$= \left(dT - dX/c_+\right)^{c_+/(c_+ + c_-)} \left(dT + dX/c_-\right)^{c_-/(c_+ + c_-)}. \tag{2.32}$$

Квадрат финслеровой метрической функции запишется так

$$F^2 = \frac{2c_0^2}{\varepsilon_{13}} \left(dT_1\right)^{2c_+/(c_+ + c_-)} \left(dT_3\right)^{2c_-/(c_+ + c_-)} = cc_0 dT_0^2 = \frac{2c_+ c_-}{c_+ + c_-} c_0 dT_0^2. \tag{2.33}$$

В работах [8], [15] и [16] рассматривается анизотропия физической скорости света ($c_+ \neq c_- \neq c_0,\ c_+ c_- = c_0^2,\ r = -\varepsilon$) для квадрата финслеровой метрической функции (2.33) без коэффициента $2/\varepsilon_{13}$. Там же приводятся соответствующие нелинейные и линейные преобразования для случая двумерного и четырехмерного финслерового пространства-времени с одним скалярным параметром.

Для случая $r = 0$ в типе I имеем

$$F^2 = \frac{2c_0^2}{\varepsilon_{13}} \left(dT_1\right)\left(dT_3\right) = cc_0 dT_0^2 = \frac{2c_+ c_-}{c_+ + c_-} c_0 \left(dT - dX/c_+\right)\left(dT + dX/c_-\right). \tag{2.34}$$

В случае $r \neq 0$ и $c_+ = c_- = c_0$ получим

$$F^2 = \left[\frac{\left(c_0 dT - dX\right)^2}{c_0^2 dT^2 - dX^2}\right]^r \left(c_0^2 dT^2 - dX^2\right). \tag{2.35}$$

Обобщением выражения (2.35) с учетом (1.6)–(1.8) для четырехмерного пространства-времени является

$$F^2 = \left[\frac{\left(c_0 dT - dL\right)^2}{c_0^2 dT^2 - dL^2}\right]^r \left(c_0^2 dT^2 - dL^2\right) = \left[\frac{\left(c_0 dT - dL\right)^2}{g_{ij} dx^i dx^j}\right]^r g_{ij} dx^i dx^j. \tag{2.36}$$

В отличие от работы [17] в (2.36) отсутствует четырехмерный вектор ν_i с $\nu_i \nu^i = 0$, указывающей локально выделенные направления. Обобщение результатов работы [17] на случай анизотропии координатной скорости света дается в [31]. Следует отметить, что добавление к рассмотренным преобразованиям ещё двух $y'/\sqrt{c'} = y\sqrt{A(v_+)/c}$ и $z'/\sqrt{c'} = z\sqrt{A(v_+)/c}$ не приводят к замене $dX \to dL$ в приведенных метрических функциях.

В галилеевых координатах имеем квадрат финслеровой метрической функции

$$F^2 = \left[\frac{\left(c_0 dt - \sqrt{d\vec{r}^2}\right)^2}{c_0^2 dt^2 - d\vec{r}^2}\right]^r \left(c_0^2 dt^2 - d\vec{r}^2\right), \tag{2.37}$$

требующей отдельного рассмотрения.

3. Закон композиции одинаково направленных анизотропных скоростей

Пусть в системах выполняется одинаковая анизотропия скоростей светового сигнала, т. е. имеем равенства $\varepsilon_{12} = \varepsilon'_{12}$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon'_{23}$ и $\varepsilon_{13} = \varepsilon'_{13}$. Тогда прямые и обратные преобразования в типе I запишутся так

$$dX' = \left(\frac{1 + v_+/c_-}{1 - v_+/c_+}\right)^{-r/2} \frac{dX - v_+ dT}{\alpha_+}, \quad \alpha_+ = \left[\left(1 - \frac{v_+}{c_+}\right)\left(1 + \frac{v_+}{c_-}\right)\right]^{-1/2}, \tag{3.1}$$

$$dT' = \left(\frac{1 + v_+/c_-}{1 - v_+/c_+}\right)^{-r/2} \frac{1}{\alpha_+}\left\{dT\left[1 - \frac{2\varepsilon v_+}{c}\right] - dX\frac{v_+}{c_+ c_-}\right\}, \tag{3.2}$$

$$dX = \left(\frac{1 - v'_-/c_-}{1 + v'_-/c_+}\right)^{-r/2} \frac{dX' + v'_- dT'}{\alpha'_-}, \quad \alpha'_- = \left[\left(1 + \frac{v'_-}{c_+}\right)\left(1 - \frac{v'_-}{c_-}\right)\right]^{1/2}, \tag{3.3}$$

$$dT = \left(\frac{1 - v'_-/c_-}{1 + v'_-/c_+}\right)^{-r/2} \frac{1}{\alpha'_-}\left\{dT'\left[1 + \frac{2\varepsilon v'_-}{c'}\right] + dX'\frac{v'_-}{c_+ c_-}\right\}, \tag{3.4}$$

где относительные скорости удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{v_+} - \frac{1}{v'_-} = \frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-}. \tag{3.5}$$

Закон композиции одинаково направленных абсолютных анизотропных скоростей имеет вид

$$u_+ = u'_+ \circ v_+ = \frac{u'_+ + v_+ - 2\varepsilon u'_+ v_+/c}{1 + (1 - \varepsilon^2)\, u'_+ v_+/c^2}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим третью систему (K''), которая движется вдоль положительного направления со скоростью w_+ и z'_+ относительно систем (K) и (K'), соответственно. Тогда, используя преобразования между (K'') и (K'), окончательно получим закон композиции относительных одинаково направленных анизотропных скоростей

$$w_+ = z'_+ \circ v_+ = \frac{z'_+ + v_+ + z'_+ v_+ (1/c_- - 1/c_+)}{1 + z'_+ v_+/c_+ c_-} = \frac{z'_+ + v_+ - 2\varepsilon z'_+ v_+/c}{1 + (1 - \varepsilon^2)\, z'_+ v_+/c^2}. \tag{3.7}$$

Множество абсолютных скоростей образует абелеву группу с коммутативным законом композиции элементов группы $z'_+ \circ v_+ = v_+ \circ z'_+$.

Для закона выполняется свойство ассоциативности

$$r''_+ \circ z'_+ \circ v_+ = \left(r''_+ \circ z'_+\right) \circ v_+ = r''_+ \circ \left(z'_+ \circ v_+\right) =$$
$$= \frac{r''_+ + z'_+ + v_+ - 2\varepsilon\left(r''_+ z'_+ + z'_+ v_+ + v_+ r''_+\right)/c + 4\varepsilon^2 r''_+ z' v_+/c^2}{1 - (1-\varepsilon^2)\left(r''_+ z'_+ + z'_+ v_+ + v_+ r''_+\right)/c^2 - 2\varepsilon\left(1-\varepsilon^2\right) r''_+ z' v_+/c^3}. \tag{3.8}$$

Единичный элемент группы находим из формулы

$$E \circ v_+ = \frac{E + v_+ + (1/c_- - 1/c_+)\, E v_+}{1 + E v_+/(c_+ c_-)} = v_+. \tag{3.9}$$

Таким образом, единичный элемент соответствует значению $v_+ = 0$.

Из закона композиции

$$v_+ \circ v_+^{-1} = \frac{v_+ + v_+^{-1} - 2\varepsilon v_+ v_+^{-1}/c}{1 + (1-\varepsilon^2)\, v_+ v_+^{-1}/c^2} = E, \quad \left(1 + \left(1-\varepsilon^2\right) v_+ v_+^{-1}/c^2 \neq 0\right) \tag{3.10}$$

следует выражение обратного элемента

$$v_+^{-1} = -\frac{v_+}{1 - 2\varepsilon v_+/c}. \tag{3.11}$$

Выпишем некоторые равенства

$$\frac{1}{(-v_+)} - \frac{1}{\left(v_+^{-1}\right)} = \frac{1}{c_-} - \frac{1}{c_+}, \left[1 - \frac{2\varepsilon v_+}{c}\right]\left[1 + \frac{2\varepsilon\left(v_+^{-1}\right)}{c}\right] = 1, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{1 + (1-\varepsilon^2)\, v_+ v_+^{-1}/c^2} = \frac{1 - 2\varepsilon v_+/c}{1 - 2\varepsilon v_+/c + (1-\varepsilon^2)\,(v_+)^2/c^2} =$$
$$= \frac{1 - 2\varepsilon\left(v_+^{-1}\right)/c}{1 - 2\varepsilon\left(v_+^{-1}\right)/c + (1-\varepsilon^2)\left(v_+^{-1}\right)^2/c^2}, \tag{3.13}$$

$$(-c_-) \circ v_+ = (-c_-), \quad c_+ \circ v_+ = c_+, \tag{3.14}$$

$$1 - 2\varepsilon w_+/c - \left(1-\varepsilon^2\right) w_+^2/c^2 =$$
$$= \frac{\left[1 - 2\varepsilon z'_+/c - (1-\varepsilon^2)\left(z'_+\right)^2/c^2\right]\left[1 - 2\varepsilon v_+/c - (1-\varepsilon^2)\,(v_+)^2/c^2\right]}{\left[1 + (1-\varepsilon^2)\, z'_+ v_+/c^2\right]^2}. \tag{3.15}$$

Параметр анизотропии ε отражает отличие обратного элемента v_+^{-1} от противоположного $(-v_+)$. Скорости света c_+ и c_- не имеют обратных элементов c_+^{-1} и c_-^{-1} в силу нарушения дополнительного условия в (3.10). Поэтому они не входят в множество скоростей, а (3.14) есть формальное равенство. Закон композиции имеет вид

$$u'_+ = u_+ \circ v_+^{-1} = \frac{u_+ - v_+}{1 - 2\varepsilon v_+/c - (1-\varepsilon^2)\, u_+ v_+/c^2} \tag{3.16}$$

и представляется в прямых преобразованиях через скорости u_+ и v_-. Причем в обратных преобразованиях, согласно (2.15), справедливо равенство $v_+^{-1} = -v'_-$. Из (3.16) получим $u_+ = u'_+ \circ v_+$, что в итоге приводит к соотношениям

$$\left(1 + \frac{u_+}{c_-}\right) = \frac{\left(1 + u'_+/c_-\right)(1 + v_+/c_-)}{1 + u'_+ v_+/(c_+ c_-)}, \quad \left(1 - \frac{u_+}{c_+}\right) = \frac{\left(1 - u'_+/c_+\right)(1 - v_+/c_+)}{1 + u'_+ v_+/(c_+ c_-)}. \tag{3.17}$$

Отметим некоторые работы [16, 18-20], в которых рассматривался закон композиции вида (3.7) с различных точек зрения.

Закон композиции анизотропных скоростей (3.7) для типа I вытекает из равенства (2.9). В случае типов II и III имеем, согласно преобразований, соответствующие равенства

$$\frac{u'_+}{1-u'_+/c_+}+\frac{v_+}{1-v_+/c_+}=\frac{u_+}{1-u_+/c_+}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\frac{u'_+}{1-\varepsilon u'_+/c}+\frac{v_+}{1-\varepsilon v_+/c}}{1-\frac{u'_+}{\left(1-\varepsilon u'_+/c\right)}\frac{v_+}{(1-\varepsilon v_+/c)}}=\frac{u_+}{1-\varepsilon u_+/c}, \tag{3.19}$$

из которых вытекают следующие законы композиций

$$u_+=u'_+\circ v_+=\frac{u'_++v_+-2u'_+v_+/c_+}{1-u'_+v_+/c_+^2}, \tag{3.20}$$

$$u_+=u'_+\circ v_+=\frac{u'_++v_+-2\varepsilon u'_+v_+/c}{1+\left(1-\varepsilon^2\right)u'_+v_+/c^2}. \tag{3.21}$$

Для типа IV имеем обычный закон сложения скоростей в классической физике

$$u=u'+v. \tag{3.22}$$

4. Отображение преобразований в системе бинарных чисел

Рассмотрим геометрию с $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=1$ и $\varepsilon_{13}=2$, и сопоставим событию с dT и dX дифференциал бинарного числа $d\xi=dT+edX/c_0$. Система бинарных чисел есть одна из трех

$$1)\ e^2=1,\quad 2)\ e^2=0,\quad 3)\ e^2=-1. \tag{4.1}$$

В них определено значение e^2. Свойства системы бинарных чисел известны [21]. Преобразования временного интервала и пространственного расстояния отображаются преобразованиями $d\xi$

$$d\xi'=Ad\xi,\quad d\xi'=dT'+edX'/c_0,\quad A=a+eb \tag{4.2}$$

и его сопряженной величиной

$$d\bar{\xi}'=\bar{A}d\bar{\xi},\quad d\bar{\xi}'=dT'-edX'/c_0,\quad \bar{A}=a-eb. \tag{4.3}$$

Рассмотрим преобразования дифференциала бинарного числа, которые оставляют инвариантным модуль

$$\sqrt{d\xi d\bar{\xi}}=\sqrt{d\xi' d\bar{\xi}'},\quad \left(dT^2-dX^2/c_0^2=dT'^2-dX'^2/c_0^2\right). \tag{4.4}$$

Тогда из (4.4) получим равенство

$$A\bar{A}=1,\quad \left(a^2-e^2b=1\right) \tag{4.5}$$

и обратные преобразования

$$d\xi=A^{-1}d\xi',\quad A^{-1}=\bar{A}=a-eb. \tag{4.6}$$

Для определения величин a и b рассмотрим отношение

$$\frac{d\xi'}{d\bar{\xi}'} = \frac{A}{\bar{A}}\frac{d\xi}{d\bar{\xi}}, \tag{4.7}$$

которые перепишем в виде

$$\frac{dT' + edX'}{dT' - edX'} = \frac{a+eb}{a-eb}\frac{dT+edX}{dT-edX}. \tag{4.8}$$

Используем равенство $dX = vdT$ при dX' (или $dX' = -vdT'$ при $dX = 0$). Тогда, согласно (4.5) и (4.8), получим значения $b/a = -v/c_0$ и $a = (1 - e^2v^2/c_0^2)^{-1/2}$. Число A имеет выражение

$$A\,(v) = \frac{1 - ev/c_0}{\sqrt{1 - e^2v^2/c_0^2}} \tag{4.9}$$

и групповое свойство

$$A\,(v'') = A\,(v')\,A\,(v)\,, \tag{4.10}$$

из которого следует закон композиции скоростей

$$v'' = v' \circ v = \frac{v' + v}{1 + e^2vv'/c_0^2}. \tag{4.11}$$

Подставляя (4.9) в (4.2), получим преобразования

$$dX' = \frac{dX - vdT}{\sqrt{1 - e^2v^2/c_0^2}}, \quad dT' = \frac{dT - e^2vdX/c_0^2}{\sqrt{1 - e^2v^2/c_0^2}}, \tag{4.12}$$

и форм-инвариантную квадратичную дифференциальную форму

$$ds^2 = c_0^2 d\xi d\bar{\xi} = c_0^2 dT^2 - e^2 dX^2. \tag{4.13}$$

При $e^2 = 1$ имеем преобразования Лоренца

$$dX' = \frac{dX - vdT}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \quad dT' = \frac{dT - vdX/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \tag{4.14}$$

в геометрии Минковского с индефинитной метрикой

$$ds^2 = c_0^2 dT^2 - dX^2, \quad v/c = \operatorname{th}\beta. \tag{4.15}$$

При $e^2 = 0$ имеем преобразования Галилея

$$dX' = dX - vdT, \quad dT' = dT, \tag{4.16}$$

в геометрии Галилея

$$ds^2 = c_0^2 dT^2, \quad v/c_0 = \beta. \tag{4.17}$$

При $e^2 = -1$ имеем преобразования Евклида

$$dX' = \frac{dX - vdT}{\sqrt{1 + v^2/c_0^2}}, \quad dT' = \frac{dT + vdX/c_0^2}{\sqrt{1 + v^2/c_0^2}}. \tag{4.18}$$

в геометрии Евклида с дефинитной метрикой

$$ds^2 = c_0^2 dT^2 + dX^2, \quad v/c_0 = \operatorname{tg}\beta, \tag{4.19}$$

В этих плоских геометриях аксиома параллельных сохраняется [22]. Угол β в локальном пространстве-времени обладает групповым законом композиции $\beta'' = \beta' \circ \beta = \beta' + \beta$. Обобщение полученных результатов на случай с $\varepsilon_{12} \neq \varepsilon_{23}$ требует отдельного рассмотрения.

5. Вероятностная трактовка

Запишем финслерову метрическую функцию (2.17) в виде

$$F = \gamma d\eta_1^{p_1} d\eta_2^{p_2} = \gamma \left[\exp\left(\sum_i^2 p_i \ln \dot{\eta}_i \right) \right] d\tau, \tag{5.1}$$

где $p_1 = (1+r)/2$, $p_2 = (1-r)/2$, $\dot{\eta}_i = d\eta_i/d\tau$, τ – скалярный параметр, а $d\eta_1 = c_0 dT_1$ и $d\eta_2 = c_0 dT_3$ есть характеристики светового сигнала. Тогда p_1 и p_2 можно интерпретировать как вероятности для величин $d\eta_1$ и $d\eta_2$. В случае n-мерного пространства выражение

$$N_0(\dot{\eta}) = \prod_i^n (\dot{\eta}_i)^{p_i} = \exp\left(\sum_i^n p_i \ln \dot{\eta}_i \right) \tag{5.2}$$

есть взвешенное среднее геометрическое величины $\dot{\eta} = (\dot{\eta}_1, ..., \dot{\eta}_n)$ с вероятностями $p = (p_1, ..., p_n)$. Формула (5.2) является частным случаем полунормы [23, 24]

$$N_q(\dot{\eta}) = \left[\sum_i^n (\dot{\eta}_i)^q p_i \right]^{1/q}, \quad \sum_i^n p_i = 1, \tag{5.3}$$

при $q = 0$. Вероятностная трактовка финслеровой геометрии дается метрической функцией

$$F = \gamma \left[d\eta_1^q p_1 + d\eta_2^q p_2 + ... + d\eta_n^q p_n \right]^{1/q} = \gamma N_q(\dot{\eta}) \, d\tau. \tag{5.4}$$

При равновероятном распределении $p_i = 1/n$ из (5.4) при $q = 0$ следует метрическая функция Бервальда-Моора [1]

$$F = \gamma \sqrt[n]{d\xi_1 d\xi_2 ... d\xi_n} = \gamma \sqrt[n]{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 ... \xi_n} d\tau, \tag{5.5}$$

которая является одной из перспективных в обобщениях псевдоевклидовой геометрии Минковского [25]. Финслеровы метрические функции вида (5.2) и (5.3) с переменным значением изучаются в [4].

6. Заключение

В работе рассматривается локально анизотропная финслерова геометрия с двумя скалярными параметрами $\varepsilon c_0/c = (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{23})/2$ и $c_0/c = (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23})/2$, зависящими от элементов матрицы перехода между событиями, а также от инварианта r. Найдены четыре принципиально различных типа двумерного финслерова пространства-времени. Исследуются свойства композиции одинаково направленных анизотропных скоростей произвольных сигналов. Анизотропия физических скоростей света не устраняется какими-либо преобразованиями координатной сетки, чем отличаются полученные преобразования временного интервала и пространственного расстояния от некоторых известных преобразований [20, 26–31]. Следует также отметить и попытку экспериментального обнаружения относительной анизотропии одно-направленных скоростей света и нейтронов [32]. В случае отсутствия анизотропии в двумерном пространстве-времени полученные преобразования допускают отображения на преобразования бинарных чисел. Вероятностная трактовка метрических функций финслеровых геометрий и, в частности, взаимосвязь их с гиперкомплексными системами чисел требует детального изложения. Здесь из-за ограниченности рамок работы приводится лишь идейная сторона вопроса.

Автор благодарит Г. С. Асанова об информации [8, 15, 16] по локальной анизотропии финслерового пространства-времени, без чего работа в данном виде не имела бы места, а также Д. Г. Павлова об информации [25] о квадрачислах, открывающей простор для новых подходов к физической сущности пространства-времени.

Список литературы

[1] Rund H. The Differential Geometric of Finsler Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1959. 396 p.

[2] Busemann H. Metric Methods in Finsler Spaces and in Foundations of Geometric. Princeton: Princeton University Press, 1942. 241 p.

[3] Pimenov R. I. Kinematics Spaces (Mathematical Theory of Space-time. New-York: Plenum Press, 1970. 93 p.

[4] Asanov G. S. Finsler Geometry, Relativity and Gange Theories. Dordrecht: D.Reidel Publ. Comp. 1985. 370 p.

[5] Matsumoto M. Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces. Otsu, Japan: Kai-seisha Press, 1986.

[6] Пименов Р. И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар: Изд-во Коми филиала АН СССР, 1987. 184 с.

[7] Богословский Г. Ю. Теория локального анизотропного пространства-времени. Москва: Изд-во МГУ, 1992. 271 с.

[8] Асанов Г. С. Финслероидная геометрия. Москва: Изд-во МГУ, 2004. 160 с.

[9] Poincare H. La mesure du temps // Rev. Metaphys. Mordle, 1898. V. 6. P. 1–13.

[10] Reichenbach H. Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre. Braunschweig: F. Vieweg & Sons, 1924. 302 s.

[11] Grunbaum A. Philosophical Problem of Space and Time. New York: Alfred A.Knopf, 1963.

[12] Зарипов Р. Г. К определению одновременности в специальной теории относительности //Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ, 1978. Вып. 14–15. с. 60–69.

[13] Зарипов Р. Г. О физическом понятии отношения одновременности //Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ, 1980. Вып. 17. с. 47–51.

[14] Zaripov R. G. Convention in the Definition of Geometry of Space-Time //Galilean Electrodynamics. 2000. V. 11. N 4. P. 63–68.

[15] Асанов Г. С. Класс сферически симметричных финслеровых метрических функций с индикатрисой постоянной кривизны // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. № 1. с. 19–20.

[16] Asanov G. S. Finslerian Extension of Lorentz Transformations //Rep. Math. Phys., 1998. V. 42. № 3. P. 273–296.

[17] Bogoslovsky G. Yu. A Special Relativistic Theory of the Locally Anisotropic Space-Time, I: The Metric and Group of Motion of the Anisotropic Space of Events // Nuovo Cimento, 1977. V. 40B. P. 99–115.

[18] Petryszyn H. On a certain group-kinematical method of generalization Lorentz transformations in two-dimensional space-time //Wroclaw: Instytut Mathematyki i Fizyki Theoretyczney Politechniki Wroclawskiey Kamunikaty, 1973. № 12. P. 1–26.

[19] Болтянский В. Г. Анизотропный релятивизм // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. С. 2101–2110.

[20] Стрельцов В. И. Об определении одновременности в специальной теории относительности // Препринт ОИЯИ. Р2-6928. 1973. 10 с.

[21] Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. Москва: Наука, 1973. 143 с.

[22] Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Москва-Ленинград: ОНТИ, 1936. 101 с.

[23] Хартли Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. Москва: Изд-во ИЛ, 1948. 456 с.

[24] Бурбаки Н. Интегрирование (меры, интегрирование мер). Москва: Наука, 1967. 396 с.

[25] Павлов Д. Г. Четырехмерное время // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1 (1). с. 33–42.

[26] Edwards W. F. Special relativity in anisotropic space // Am. J. Phys., 1963. V. 31. N 7. P. 482-489.

[27] Podlaha M. Lorentz Theory, Palacios Theory and Interferometrical Experiments // Nuovo Ci-mento. 1969. V. 64B. N 1. P. 181–187.

[28] Winnie J.A. Special relativity without one-way velocity assumptions // Phyl. Sci. 1970. V. 37. N1. P. 81–99; 1970. V. 37. N2. P. 223–238.

[29] Mansouri R., Sexl R.U. A test theory of special relativity // Gen. Rel. Grav. 1977. V. 8. N 7. P. 497–513, P. 515–524; V. 8. N 10. P. 809–814.

[30] Sjodin T. Synchronization in special relativity and related theories // Nuovo Cimento. 1979. V. 51. N 2. P. 229–246.

[31] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности и финслерова структура плоского анизотропного пространства-времени // Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ. 1992. Вып. 29. с. 64–71.

[32] Николенко В. Г., Попов А. Б., Самосват Г. С. Поиски относительной анизотропии скорости света и скорости нейтронов // ЖЭТФ. 1979. Т. 79. Вып. 2. с. 393–401.