НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНЫХ «КВАТЕРНИОНОВ»

А. В. Смирнов

DULY Research Inc., USA

Рассмотрена коммутативная алгебра бикомплексных чисел с метрикой $(+--+)$. Подобно обычным комплексным числам, эта алгебра 4-го ранга обладает свойствами деления, сопряжения, извлечения корня и факторизации наряду с прямым аналогом формулы Эйлера. Показано, что вращения представимы в этой алгебре без нарушения коммутативности. Наличие делителей нуля неразрывно связано с релятивистским интервалом.

I. Введение

Объекты типа кватернионов были предложены ещё в 18 веке Эйлером и Гауссом, а классическое оформление кватернионы получили в 1843 г. благодаря У. Р. Гамильтону как векторное расширение над полем комплексных чисел [1, 2, 3, 4]. Их векторная часть представляет из себя обобщённую мнимую часть и образует трёхмерное кватернион-векторное пространство. Д. К. Максвелл сформулировал электродинамику именно на языке кватернионов, но они так и не вошли в стандартный математический аппарат XX-го века. Лишь теперь они включены в основные математические пакеты MathCAD^{TM} и Mathematica^{TM}, обнаружив интересные применения в вычислительной математике (например, обработка изображений) и многих областях физики, включая механику и специальную теорию относительности [4], теории элементарных частиц и астрофизику, теорию поля и оптику. В физике пучков заряженных частиц кватернионы эффективны, например, в решении проблемы транспортировки спина [5, 6]. Очевидно, что несмотря на изящность дифференциальной геометрии кватернионов, отсутствие коммутативности не допускает обобщения их в область теории функций гиперкомплексных переменных. Для рассматриваемых здесь чисел попытка такого расширения впервые была сделана в Теории функций пространственного комплексного переменного (ТФПКП, см. [7, 22]).

В аналитических исследованиях и моделях мы сталкиваемся нередко с выражениями, содержащими как комплексные числа, так и 2×2 матрицы. Матричное представление, однако, может иметь и более удобные альтернативы. Квантовая механика, к примеру, может быть элегантно сформулирована с помощью геометрической алгебры. В других ситуациях нередко более удобно иметь дело с преобразованиями полностью скалярных выражений, чем с традиционными кватернионами – носителями векторных свойств. Особенно это актуально в сочетании с функциями комплексного переменного. Соответствующие практические случаи включают, например, анализ собственных мод некоторых граничных задач [8, 9], транспортировку пучка заряженных частиц и его динамику в ускорителях [10] и электронных приборах [11, 12]. Можно предположить, что пространство скалярных или псевдоскалярных чисел может неявно включать (инкапсулировать) и элементарные матричные преобразования через расширенные свойства "скалярных кватернионов". Это пространство суть объединение двух независимых полей обычных комплексных чисел (ассоциированных, как правило, с временной и пространственными координатами).

Л. Левин одним из первых [9] практически применил скалярные бикомплексные объекты для анализа электромагнитных волн, распространяющихся в различных волноводных структурах: с диэлектриком и намагниченным ферритом, поверхностной анизотропией и гофрами. Он ввёл феноменологически дополнительную мнимую единицу (см. (1.1)), чтобы различить комплексные числа, отвечающие за разные свойства временной переменной (и/либо продольной, фазовой координаты) – с одной стороны, и пространственных (либо поперечных/угловых) переменных – с другой стороны. Соответствующие мнимые единицы образуют коммутативную группу:

$$i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ \ ij = ji \neq -1 \text{ или } \sqrt{-1}. \tag{1.1}$$

Используя этот подход, Левин получил компактное скалярное дисперсионное уравнение для нормальных мод с четырёх-компонентными комплексными числами. Дальнейшее развитие этого метода [13, 14, 15] позволило строго охарактеризовать самосогласованную систему, в которой пучок взаимодействует с замедляющей структурой и соленоидальным полем. Было показано [13], что обычный матричный подход даёт эквивалентное решение системы дисперсионных уравнений и приводит в конечном итоге к точно тем же значениям инкремента и порогового тока регенеративной поперечной неустойчивости "обрыва пучка". Однако использование скалярных кватернионов значительно упрощает выкладки и даёт гораздо более прозрачное физическое решение. Например, коллективная частота $\widetilde{\nu}$, найденная алгебраически из единственного гиперкомплексного дисперсионного уравнения, имеет чёткий смысл своих компонентов: $Re_i Re_j \widetilde{\nu}$ – расстройка коллективной частоты по отношению собственной частоте; $Im_i Im_j \widetilde{\nu}$ – угловая скорость вращения вырожденной коллективной дипольной моды; а $Im_i Re_j \widetilde{\nu} \pm Im_j Re_i \widetilde{\nu}$ дают инкременты право- и левополяризованных коллективных мод гиромагнитной неустойчивости. Заметим, в работе [10] отсутствие дополнительной мнимой единицы привело к некорректному смешиванию между различными степенями свободы и ошибочному результату для порогового тока поперечной неустойчивости.

Коммутативная алгебра для соответствующих гиперкомплексных чисел была введена в [13] для частных приложений физики пучков в ускорителях и в [7, 22] для более широкого круга физических задач. Она была определена как замкнутое обобщение над различными i- и j- полями комплексных чисел, которые образуют коммутативную алгебру 4-го ранга с делением и основными атрибутами обычных комплексных чисел. В этой статье мы приводим основные свойства и простейшее аналитическое продолжение. В рамках данного изложения (и только) подразумеваем эквивалентными такие термины как: «четырёх-компонентное», «гиперкомплексное», «бикомплексное» число и «скалярный кватернион». В алгебре многообразий рассматриваемые числа можно отнести к бикомплексной разновидности поличисел.

II. Элементарные свойства коммутативной алгебры четырёх-компонентных чисел

Выпишем четырёх-компонентное комплексное число, которое выглядит как обычный кватернион (но не является им):

$$\widetilde{a} = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3, \tag{2.1}$$

где компоненты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вещественны; i, j – независимые мнимые единицы, и ij – гиперкомплексная (составная) единица из (1.1).

Мы рассматриваем в данной работе гиперкомплексные числа (2.1) как обладающие коммутативностью и ассоциативностью, дистрибутивностью и замкнутостью по отношению к умножению и делению.

В частности, произведение двух простых комплексных чисел из различных i- и j- пространств образует "скалярный кватернион", представляющий трёхмерное пространство как частный случай четырёхмерного гиперпространства (при $\left\| \begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{matrix} \right\| = 0$):

$$(a+ib)\cdot(c+jd) = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3, \quad \text{где } \alpha_0 = ac,\ \alpha_1 = bc,\ \alpha_2 = ad,\ \alpha_3 = bd. \qquad (2.2)$$

Можно рассматривать пространства обычных комплексных чисел как двухмерные проекции пространства гиперкомплексных чисел. Поэтому естественно переопределить операторы реальной и мнимой частей следующим образом:

$$Re_i\,\widetilde{a} = \alpha_0 + j\alpha_2, \quad Im_i\,\widetilde{a} = \alpha_1 + j\alpha_3, \qquad (2.3)$$

где индексы i и j обозначают соответствующее пространство-проекцию как область действия соответствующей операции.

Рассмотрим теперь матрицы Паули $\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ как операторы, действующие, например, только в j-пространстве. Тогда, полагая $\widetilde{a}$ есть матрица-столбец $\begin{pmatrix} Re_j\,\widetilde{a} \\ Im_j\,\widetilde{a} \end{pmatrix}$, мы можем перейти к алгебраической форме, используя следующие правила подстановки:

$$\hat{\sigma}_1\widetilde{a} \to j\widetilde{a}^{*j}, \quad \hat{\sigma}_2\widetilde{a} \to -\widetilde{a} \qquad \text{и} \quad \hat{\sigma}_3\widetilde{a} \to \widetilde{a}^{*j}, \qquad (2.4)$$

т. е. матричные операторы могут быть представлены формально как $\hat{\sigma}_1 \to j()^{*j}$, $\hat{\sigma}_2 \to -1$, и $\hat{\sigma}_3 \to ()^{*j}$.

Подобно алгебре спиновых матриц из (2.4) мы имеем аналогичное соотношение:

$$\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_3\widetilde{a} = \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\widetilde{a} = -j\hat{\sigma}_3\widetilde{a}; \quad \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3\widetilde{a} = -j\hat{\sigma}_1\widetilde{a}; \quad \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1\widetilde{a} = -j\hat{\sigma}_2\widetilde{a}.$$

Удобство заключается в том, что операторы в такой записи коммутативны. Таким образом, произвольный матричный 2×2 оператор $\hat{U}$ в комплексном (j-) пространстве может быть представлен, например, в таком виде:

$$\hat{U} \equiv \rho\hat{E} - j(\lambda\hat{\sigma}_1 + \mu\hat{\sigma}_2 + \nu\hat{\sigma}_3) \to \rho + j\mu + (\lambda - j\nu)()^{*j},$$

где $\hat{E}$ – единичная 2×2 матрица, $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \det\hat{U}$, и ρ, λ, μ, ν – вещественные числа, описывающие связанный с j-пространством оператор $\hat{U}$.

Остаётся обобщить действие матричного 2×2 оператора вместе с соответствующим представлением вращений на всё i j- гиперпространство. Мы можем заменить формально комплексную единицу j на i в $\hat{U}$ и $\hat{\sigma}_2$ (т. е. $\hat{\sigma}_2 \to ij$):

$$\hat{U} = \rho\hat{E} - i\,(\lambda\hat{\sigma}_1 + \mu\hat{\sigma}_2 + \nu\hat{\sigma}_3) \to \rho + j\mu - (ij\lambda + i\nu)\,()^{*J}. \qquad (2.5)$$

Если $\hat{U}$ – унимодулярная матрица и $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, то (2.5) представляет вращения в четырёхмерном i, j- пространстве.

Перед тем, как перейти к определению полной длины в этом гиперпространстве, определим частичный детерминант в каждом из пространств-проекций:

$$\det_i \tilde{a} = (\mathrm{Re}_i\tilde{a})^2 + (\mathrm{Im}_i\tilde{a})^2 = \tilde{a}\cdot\tilde{a}^{i*} \equiv |\tilde{a}|_i^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2j\,(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)\,. \qquad (2.6)$$

Из правила коммутативности (1.1) и определений (2.1, 2.3, 2.6) вытекают следующие очевидные тождества:

$$
\begin{aligned}
&\tilde a\cdot\tilde b=\tilde b\cdot\tilde a,\\
&\mathrm{Re}_i\mathrm{Re}_j\tilde a=\mathrm{Re}_j\mathrm{Re}_i\tilde a=\alpha_0\equiv\mathrm{Re}_{ij}\tilde a=\mathrm{Re}_{ji}\tilde a\equiv\mathrm{Re}\,\tilde a,\\
&\mathrm{Im}_i\mathrm{Re}_j\tilde a=\mathrm{Re}_j\mathrm{Im}_i\tilde a=\alpha_1,\\
&\mathrm{Im}_i\mathrm{Im}_j\tilde a=\mathrm{Im}_j\mathrm{Im}_i\tilde a=\alpha_3\equiv\mathrm{Im}_{ij}\tilde a=\mathrm{Im}_{ji}\tilde a\equiv\mathrm{Im}\,\tilde a,\\
&(\tilde a^{*i})^{*j}\equiv\tilde a^{*i*j}=\tilde a^{*j*i}\equiv(\tilde a^{*j})^{*i}=\alpha_0-i\alpha_1-j\alpha_2+ij\alpha_3,\\
&\tilde a+\tilde a^{*i}=2\mathrm{Re}_i\tilde a,\tilde a-\tilde a^{*i}=2i\mathrm{Im}_i\mathrm{Re}_j\tilde a+2j\mathrm{Re}_i\mathrm{Im}_j\mathrm{Re}_i\tilde a,\\
&(\tilde a+\tilde a^{*i*j})+C.C._{\cdot i}=(\tilde a+\tilde a^{*i*j})+C.C._{\cdot j}=4\mathrm{Re}_i\mathrm{Re}_j\tilde a\equiv4\mathrm{Re}\,\tilde a,\\
&\det{}_i\det{}_j\tilde a\equiv\left||\tilde a|_j^2\right|_i^2=\left||\tilde a|_i^2\right|_j^2\equiv\det{}_j\det{}_i\tilde a\equiv\|\tilde a\|^4.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Приведённые до сих пор правила и соотношения описывают простое скалярное объединение-суперпозицию двух полей комплексных чисел. Эти соотношения могут оказаться полезными в некоторых приложениях, где нужна удобная алгебраическая форма волноводов [9], кильватерных полей [8], поляриметрии и аналитическом представлении магнитостатических полей [16]). Однако, чтобы работать с такими формами, надо построить полную алгебру гиперкомплексного пространства, замкнутую по отношению к операциям умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня.

Для этого мы постулируем дополнительные к (1.1) правила, которые в совокупности дают следующую таблицу умножения базовых единиц:

1	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	k	-1	$-i$
k	$-j$	$-i$	1

Здесь $k\equiv ij$ есть гиперкомплексная единица, и, как легко видеть, метрика есть $(+--+)$.

Остальные свойства «скалярных кватернионов» и соответствующие функциональные аналитические продолжения могут быть выведены подобно теории комплексных чисел. Например, нетрудно видеть, что:

$$1/ij=ij;\quad\sqrt{1}=\pm1,\ \pm ij;\quad ij=\exp\bigl(\pm(i+j)\pi/2\bigr)\tag{2.9}$$

Т. о. в этой алгебре 4-го ранга квадратный корень имеет четыре значения. Другой пример – правило умножения гиперкомплексных чисел $\widetilde a=\alpha_0+i\alpha_1+j\alpha_2+ij\alpha_3$ и $\widetilde b=\beta_0+i\beta_1+j\beta_2+ij\beta_3$:

$$
\begin{aligned}
\widetilde a\cdot\widetilde b=\alpha_0\beta_0+\alpha_3\beta_3-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2+i(\alpha_1\beta_0+\alpha_0\beta_1-\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)\\
+j(\alpha_2\beta_0+\alpha_0\beta_2-\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)+ij(\alpha_3\beta_0+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_0\beta_3).
\end{aligned}
$$

III. Сопряжение и абсолютное значение, делители нуля и интервал

Полное сопряжение можно определить через частичные сопряжения:

$$\tilde{a}^* = \tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j} \tag{3.1}$$

Приведём несколько полезных свойств сопряжения, вытекающих из (2.8):

$$\begin{gathered} \tilde{a} + \tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j} + \tilde{a}^{*i*j} = 4\mathrm{Re}_i\mathrm{Re}_j\tilde{a} \\ \tilde{a}^{*i*j}\tilde{a} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2ij(\alpha_3\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) \end{gathered} \tag{3.2}$$

и, в общем случае,

$$\tilde{a} + \tilde{a}^{*i*j} \neq 2\mathrm{Re}\,\tilde{a}, \quad \tilde{a} + \tilde{a}^* \neq 2\mathrm{Re}\,\tilde{a}.$$

Естественный способ определить полный детерминант (определитель) через частичные детерминанты (2.6):

$$\begin{gathered} \det\tilde{a} = \det_i\det_j\tilde{a} \equiv \left||\tilde{a}|_j^2\right|_i^2 \equiv \tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j} = \\ = \tilde{a}\cdot\tilde{a}^* = \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2\right)^2 + 4\left(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3\right)^2. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Можно заметить, что определитель (3.3) может обращаться в ноль для некоторых ненулевых компонент α_n. Соответствующие числа являются делителями нуля. Мы имеем дело с такими числами, например, когда $|\alpha_0| = |\alpha_3| \neq 0$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, либо когда $|\alpha_1| = |\alpha_2| \neq 0$ при $\alpha_0 = \alpha_3 = 0$.

В отличие от частичных детерминантов, полные детерминанты вещественны и неотрицательны. Поэтому мы определяем абсолютную величину (или через арифметический корень 4-го порядка:

$$\|\tilde{a}\| \equiv N(\tilde{a}) = \sqrt[4]{\det\tilde{a}} \equiv \sqrt[4]{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}} = \sqrt[4]{\left||\tilde{a}|_j^2\right|_i^2}. \tag{3.4}$$

Заметим, числа $i \pm j,\ 1 \pm ij$ имеют нулевую норму (или гипердлину). Как мы увидим ниже, числа $2\pi(i \pm j)$ и $\pi(i \pm j)$ являются гиперпериодами для гиперболических функций $\cosh(\widetilde{x}), \sinh(\widetilde{x})$ и $\tanh(\widetilde{x})$, cotanh $(\widetilde{x})$, так же как $2\pi(1 \pm ij)$ и $\pi(1 \pm ij)$ являются гиперпериодами для тригонометрических функций $\cos(\widetilde{x}), \sin(\widetilde{x})$ и $\tan(\widetilde{x})$, $\mathrm{cotan}(\widetilde{x})$ соответственно.

Легко видеть, что (3.4, 3.3) совпадает с выражениями для нормы, полученными в [7, 22], как для полиномиального, так и для би-экспоненциального представления бикомплекса (в полярных системах координат для каждого из пространств-проекций). Интересно, что для «трёхмерного» бикомплекса (2.2) мы имеем длину: $\|\widetilde{a}\| = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, которая сводится к евклидовой форме благодаря соотношению $\alpha_0\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2$. Действительно, чтобы для обычного вектора $\{x,\ y,\ z\}$ получить $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, соответствующие компоненты бикомплекса можно найти, например, так:

$$\alpha_0 = x,\ \alpha_1 = y,\ \alpha_2 = xz/\sqrt{x^2 + y^2},\ \alpha_3 = yz/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Полный детерминант, введённый выше, можно использовать непосредственно для отыскания обратной величины бикомплексного числа с ненулевой нормой:

$$\tilde{a}^{-1} \equiv \frac{1}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}^*}{\det\tilde{a}}. \tag{3.5}$$

Можно получить (3.5) и через последовательные преобразования в пространствах-проекциях, применяя соответствующие правила, приведённые выше:

$$\frac{1}{\tilde{a}}=\frac{\tilde{a}^{*j}}{|\tilde{a}|_j^2}\equiv\frac{\tilde{a}^{*i}}{|\tilde{a}|_i^2}\equiv\frac{\tilde{a}^{*i}}{\tilde{a}\cdot\tilde{a}^{*i}}=\frac{\tilde{a}^{*i}\cdot\left(\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\right)^{*j}}{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\cdot\left(\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\right)^{*j}}=\frac{\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}}{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}}=\frac{\tilde{a}^{*}}{\|\tilde{a}\|^4}.$$

Обращённые делители нуля (гипернули) можно интерпретировать как гипербесконечности ij-алгебры.

Нетрудно проверить, что норма (определитель) произведения равна произведению норм (определителей):

$$\left\|\tilde{a}\cdot\tilde{b}\right\|=\|\tilde{a}\|\cdot\left\|\tilde{b}\right\|,\quad \det_{i,j}\tilde{a}\tilde{b}=\det_{i,j}\tilde{a}\det_{i,j}\tilde{b}.$$

В отличие от комплексных чисел и обычных модуль гиперкомплексного числа может быть, однако, и меньше одной из его компонент. Наряду с наличием делителей нуля это суть те особенности, которые делают неприменимой теорему Фробениуса [[17], [22]] для данной метрики.

Покажем, что интервал между двумя событиями подобен норме бикомплекса. Для биквадрата интервала имеем: $dS^4=c^4dt^4+dl^4-2c^2dt^2dl^2$. С другой стороны, детерминант (3.3) имеет вид:

$$\det\tilde{a}=\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2+\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2+4\left(\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\right)^2-2\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right).$$

Доопределим равенство $\det\widetilde{a}=dS^4$ с помощью дополнительного условия:

$$c^2dt^2dl^2=\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right). \tag{3.6}$$

Система этих двух уравнений сводится к обычному квадратному уравнению в области действительных чисел:

$$T^2-\left(\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2+\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2+4\left(\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\right)^2\right)T+\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2=0,$$

решения которого всегда существуют и равны $T_1=c^4dt^4$, $T_2=dl^4$, так как детерминант уравнения

$$D=\left(\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2-\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2\right)^2+4\left(\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\right)^2\left(\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2+\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2+4\left(\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\right)^2\right)$$

всегда положителен.

Таким образом, норму бикомплексного числа всегда можно представить в виде модуля релятивистского интервала. В важном частном случае, когда $\alpha_2=0=\alpha_1$, имеем

$$|cdt|=|\alpha_0|,\quad |dl|=|\alpha_3|\qquad \text{(см. ниже (4.3))}.$$

IV. Формула Эйлера, факторизация и извлечение корня

Перед тем, как определить извлечение корня для произвольного бикомплекса, рассмотрим два частных случая.

Первый случай относится к произведению двух комплексных чисел $a+ib$ и $c+jd$ (см. (2.2)). Этот простой случай соответствует матричному 2×2 оператору (либо вращению), применённому к «плоскому» вектору (т. е. обычному комплексному числу), принадлежащему к i-пространству ($Im_j=0$). Действительно, из (3.3) и (2.2) мы имеем $\|\widetilde{a}\| = \sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2}$, а из (2.5): $\hat{U} \to \rho - i\nu + j\mu - ij\lambda$, полагая «скалярный кватернион» $\{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ пропорциональным $\{\rho,\ -\nu,\ \mu,\ -\lambda\}$.

Очевидно, в этом случае корень n-го порядка извлекается тривиально:

$$\sqrt[n]{\tilde{a}} = \sqrt[n]{(a+ib)\cdot(c+jd)} = \sqrt[n]{\|\tilde{a}\|}\exp\left[(i\arctan b/a + j\arctan d/c + 2\pi(ki+lj))/n\right], \tag{4.1}$$

где $k, l = \{0, 1..., n-1\}$ – натуральные числа.

Таким образом, период экспоненциальной функции в нашем гиперпространстве есть $2\pi(ki+lj)$. В общем случае это даёт n^2 значений для $\sqrt[n]{\widetilde{a}}$.

Другой интересный случай есть гиперкомплексное число, представленное лишь двумя компонентами: $\widetilde{A} = a + ijd$. Из (2.8) и разложения Тейлора можно получить получить основную формулу такого числа:

$$\exp(ij\varphi) = \cosh\varphi + ij\sinh\varphi. \tag{4.2}$$

При $|d/a| \neq 1$ имеет место следующее представление:

$$\tilde{A} = a + ijd = \sqrt{|a^2 - d^2|}\exp\left(ij\operatorname{arctanh}\frac{d}{a}\right) \tag{4.3}$$

Заметим, $\operatorname{arctanh} d/a$ вещественно при $|d/a| < 1$, в противном случае оно комплексно либо в i-, либо в j- пространстве. Аналогично, при $|d/a| > 1$ существует и дополнительное, «симметричное» представление в i, j-пространстве

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= ij\,(d + ija) = ij\sqrt{|a^2 - d^2|}\exp\left(ij\operatorname{arctanh} a/d\right) = \\ &= \sqrt{|a^2 - d^2|}\exp\left((i+j)\,\pi/2 + ij\operatorname{arctanh} a/d\right)\end{aligned} \tag{4.4}$$

Из сравнения (4.4) и (4.3) получаем гиперрасширение известной формулы $\arctan x = (\pi/2)\, sgnx - \arctan(1/x)$:

$$\operatorname{arctanh} x = -\,(i+j)\,\frac{\pi}{2} sgn\,(|x| - 1) + \operatorname{arctanh}\frac{1}{x}. \tag{4.5}$$

Таким образом, область значений обратного гиперболического тангенса расширяется естественным образом в гиперпространство при расширении области определения на всю действительную ось.

Используя (4.3), мы можем извлечь корень из простого двух-компонентного числа $\tilde{B} = \tilde{A}^2 = b + ijc$:

$$\sqrt[n]{\tilde{B}} = \sqrt[n]{\left\|\tilde{B}\right\|}\exp\left(\frac{2\pi(ki+lj)}{n} + \frac{1}{n}ij\operatorname{arctanh}\left(\frac{c}{b}\right)\right) \tag{4.6}$$

где $|c/b| \neq 1$, и $k, l = \{0, 1..., n-1\}$.

Предположив, что $\widetilde{B} = \widetilde{A}^2$, можно провести проверочное сравнение для $\tilde{A} \equiv a + ijd$ и $\sqrt{\widetilde{B}}$. Подставляя в (4.6) $b = a^2 + d^2$ и $c = 2ad$ мы имеем:

$$\sqrt{\tilde{B}} = \pm\left|a^2 - d^2\right|\cdot\left(\cosh\frac{\varphi}{2} + ij\sinh\frac{\varphi}{2}\right), \qquad \text{где} \quad \varphi = \operatorname{arctanh}\left(\frac{2ad}{a^2 + d^2}\right). \tag{4.7}$$

Простые преобразования гиперболических функций в (4.7) дают:

$$\sqrt{(a+ijd)^2} = \begin{pmatrix} \pm a \pm ijd \\ \pm d \pm ija \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

где различные комбинации знаков дают восемь значений для радикала $\sqrt{\widetilde{B}}$. Однако, только четыре из них линейно независимы в смысле (2.9), в то время как остальные получены путём умножения на ij.

В общем случае, когда $\left\|\widetilde{A}\right\| \neq 0$, мы можем обобщить формулу Эйлера следующим образом:

$$\tilde{A} \equiv a + ib + jc + ijd = \exp\left(\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3\right) \equiv \exp(\tilde{a}) \tag{4.9}$$

где соотношение между $\widetilde{A}$ и $\widetilde{a}$ может быть найдено из системы:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = \ln\left\|\tilde{A}\right\|, \qquad \text{и} \\ &\begin{cases} b_N = \sin\alpha_1\cos\alpha_2\cosh\alpha_3 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2\sinh\alpha_3 \\ c_N = \cos\alpha_1\sin\alpha_2\cosh\alpha_3 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2\sinh\alpha_3 \\ d_N = \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cosh\alpha_3 \end{cases}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где $b_N = b/\left\|\widetilde{A}\right\|$, $c_N = c/\left\|\widetilde{A}\right\|$, и $d_N = d/\left\|\widetilde{A}\right\|$ являются нормализованными компонентами.

Подобно трёхмерному вращению, представленному обычным кватернионом [1], (4.9–4.10) представляют вращение $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ в рассматриваемом гиперпространстве. Вырожденный случай (2.2, 4.1) можно интерпретировать по аналогии с подвесом Кардана (когда $\alpha_3 = 0$ в (4.9)).

Заметим, в отличие от обычных комплексных чисел и случаев (2.2, 2.5, 4.1), нормализованные компоненты $b_N,\ c_N,\ d_N$ в общем случае могут изменяться по всей вещественной области от $-\infty$ до $+\infty$.

Можно привести (4.10) к алгебраической системе двух неизвестных $\tan\alpha_1$ и $\tan\alpha_2$:

$$\begin{cases} \tan^2\alpha_1 - \tan^2\alpha_2 = \left(b_N^2 - c_N^2\right)\left(1 + \tan^2\alpha_1\right)\left(1 + \tan^2\alpha_2\right) \\ \left(b_N\tan^2\alpha_1\tan\alpha_2 + c_N\tan\alpha_1\tan^2\alpha_2 = d_N\right)\left(\tan^2\alpha_1 - \tan^2\alpha_2\right) \end{cases} \tag{4.11}$$

и

$$\alpha_3 = \ln\left(\sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) / \left(c_N + b_N\right)\right). \tag{4.12}$$

Система (4.11) может быть решена в явном виде, однако полученные нами выражения символьными методами оказались чрезвычайно громоздкими, чтобы привести их здесь.

Чтобы обеспечить в (4.12) $\sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) / \left(c_N + b_N\right) > 0$, можно всегда выбрать подходящие решения (4.11) в виде $\alpha_{1,2} + \pi m$ благодаря периодичности тангенса. При $b = -c$ формально мы имеем особенность в (4.12). Однако эта особенность устранима путём комплексного сопряжения (4.9–4.12) (в i- или j- пространстве) и применяя сопряжение снова (в том же пространстве) к результату, полученному в правой части.

Для извлечения корня можно предложить и другой способ разложения «скалярного кватерниона» (2.2) на сомножители:

$$\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3 = (a + ib)\cdot(c + jd)\cdot(e + ijf), \tag{4.13}$$

где $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ вещественны. Положим в (4.13) для простоты, что $\alpha_0 = 1 = a = c = e$. Тогда (4.13) приводит к следующей алгебраической системе:

$$\begin{cases} \alpha_3 = bd(1-bdf)+f \\ \alpha_2 = d(1-bdf)-bf \\ \alpha_1 = b(1-bdf)-df \end{cases} \tag{4.14}$$

Решение $b,\ d,\ f$ системы (4.14) выражаются в явном виде гораздо более компактно, чем решение системы (4.11). Можно показать, что решения (4.14) существуют всегда и они вещественны. Для одного из решений существует особенность (напр., при $\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 = 0$), которая является устранимой. Таким образом, ненулевой $(\left\|\widetilde{A}\right\| \neq 0)$ «скалярный кватернион» представим элементарными (двумя комплексными и одним гиперкомплексным) сомножителями и из него можно извлечь корень в соответствии с (4.13), (4.9), либо (4.1), или (4.6).

V. Дифференцируемость

Возьмём гиперкомплексную функцию аргумента $\tilde{z} = x+iy+js+ijt$ в общем виде: $\tilde{f}(\tilde{z}) = u(x,y,s,t) + iv(x,y,s,t) + jw(x,y,s,t) + ijq(x,y,s,t)$. Условия Коши-Римана выражаются, как известно, $n(n-1)$ числом числом уравнений, где n – размерность пространства. Функция $\tilde{f}(\tilde{z})$ дифференцируема, если выполняются следующие двенадцать соотношений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial w}{\partial t},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.1}$$

В работе [18] сделана попытка нетривиального обобщения понятия аналитической функции, для которой число условий, аналогичных Коши-Римана, не превышало бы числа функций-компонент. В работе [22] дана изящная и компактная запись условий Коши-Римана в более знакомом виде, где в качестве переменных взяты обобщённые, т. е. не одномерные, а двумерные (обычные комплексные) аргументы из пространств-проекций. В случае, когда эти аргументы представимы в трёхмерном виде (2.2), условия Коши-Римана приобретают наглядный и простой вид, а в четырёхмерном гиперпространстве аргументов условия (5.1) можно свести к шести комплексным уравнениям, используя комплексные экспоненты и комплексные проекции бикомплексных функций [22].

VI. Обсуждение

Среди многообразия ассоциативных алгебр (см., например, [19, 20, 21]) данная ассоциативно-коммутативная алгебра обладает полным наследованием свойств комплексных чисел. Ключевой является возможность построения соответствующей теории функции гиперкомплексного переменного [22]. Делители нуля, обычно понимаемые как мировые линии [20], совпали в этой алгебре с обобщёнными функций, что указывает на фундаментальное значение этих объектов. Делители нуля неразрывно связаны и с релятивистским интервалом, который, в свою очередь, оказывается абсолютно подобен норме гиперкомплексного числа в полном согласии с классическим выводами СТО.

Таким образом, сделаны серьёзные шаги в разработке бикомплексных чисел, построены основы их дифференциального и интегрального исчисления, отображения по типу конформных, «гиперповерхности» и некоторые аналитические продолжения [22], обобщённо-аналитические функции гиперкомплексного переменного [18].

Применение этого гиперпространства показало эффективность в задачах с выделенным направлением пространственно-временного взаимодействия (особенно квазипериодического), распространения или энергообмена.

Можно ожидать дальнейшего развития и новых приложений этой ij-алгебры и соответствующей ТФПКП в фундаментальной, математической и прикладной физике, вычислительной математике, биофизике и молекулярной химии.

Благодарности

Автор выражает признательность проф. Г. В. Воскресенскому и Э. С. Масунову за критические обсуждения оригинальной работы [13]. Недавние дискуссии с В. И. Елисеевым и Д. Г. Павловым были чрезвычайно плодотворными и полезными.

Литература

[1] W. R. Hamilton. Lectures in quaternions, Dublin, Hodges & Smith (1853); Elements of quaternions, Chesley Publ. Co. N.Y. (1969).

[2] Г. Корн и Т. Корн, Справочник по математике. Пер. с англ. под общ. ред. И. Г. Арамановича, Изд-во "Наука", Москва (1974) 832 стр.; Е. А. Каратаев. Кватернионы и трёхмерные повороты, http://karataev.nm.ru/quat3rot.pdf

[3] Hamaker J. P., Understanding radio polarimetry. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 143, (2000) 515-534 ; http://aanda.u-strasbg.fr:2002/ articles/aas/ps/2000/09/h1201.ps.gz

[4] А. П. Ефремов. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 1, с. 119, http://hypercomplex.ru

[5] G. H. Hoffstaetter, Successive approximations for charged particle motion, in arXiv: physics/0006008 V 1, 5 Jun 2000

[6] K. Heinemann and G. H. Hoffstatter, in Phys. Rev. E, 54 (1996) 4240; Official DESY Report 96-078.

[7] В. И. Елисеев, А. С. Фохт. Методы теории функций пространственного комплексного переменного. Киев, 1984, 57 с. (Препринт/АН УССР, Ин-т математики: 84.61).

[8] A. V. Smirnov, in Nucl. Instrum. & Meth. in Phys. Res., NIM A, 469 (1) (2001) 21

[9] Л. Левин. Теория волноводов. Пер. с англ. под ред. Вольмана В.И., "Радио и связь", Москва (1981) 312 стр.

[10] Э. Л. Бурштейн, Г. В. Воскресенский. Ускорители электронов с интенсивными пучками, "Атомиздат", Москва, (1970) 192 стр

[11] Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев. Лекции по сверхвысокочастотной электронике, Изд-во "Советское радио", Москва, (1973) 400 стр.

[12] Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман, Разделение частот в теории колебаний и волн, Изд-во "Наука", Москва, (1983) 288 стр.

[13] А. В. Смирнов. "Исследование эффектов взаимодействия пучка с полями основной и несимметричных волн в неоднородных секциях ЛУЭ на бегущей волне", Диссертация, Московский инженерно-физический институт, МИФИ, Москва (1985) 171 стр.

[14] A. V. Smirnov et al, in Proc. of Particle Accelerator Conf. (PAC2001), IL., Chicago, 18-22 June(2001) 2293; http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/p01/PAPERS/WPAH087.PDF

[15] А. В. Смирнов. Коммутативная алгебра скалярных кватернионов. Владикавказский математический журнал, т. 6, Вып. 2 (2004), http://www.vmj.ru/articles/2004_2_6.pdf (attn.: опечатки!)

[16] A. V. Smirnov, in Proc. of Particle Accelerator Conference (PAC‘97), Vancouver, B.C., Canada, 12–16 May (1997) 894; Nucl. Instrum. and Meth. NIM A349 (1994) 295

[17] Л. С. Понтрягин. Обобщение чисел, М., Наука, 1986, 120 с

[18] Г. И. Гарасько. Обобщённо-аналитические функции поличисловой переменной. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 1, с. 83, http://hypercomplex.ru

[19] А. Н. Аверкин. Об аналитической электродинамике. http://ephir.narod.ru/11..htm

[20] Д. Г. Павлов. Всё о коммутативно-ассоциативных числах, http://hypercomplex.ru

[21] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. "Гиперкомплексные числа". М., 1973 г.

[22] В. И. Елисеев. Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. Издано Центром научно-технического творчества молодежи Алгоритм. - М.:, НИАТ. 1990, http://www.maths.ru/