СКАЛЯРНЫЕ ПОЛИПРОИЗВЕДЕНИЯ. РАЗРЕШИМОСТЬ

С. А. Шишкин, И. С. Шишкин

Рассматривается скалярная форма, являющаяся функцией n векторов. Предлагается следуя Д. Г. Павлову использовать такие формы для построения полискалярных произведений. Строится ассоциированный к обычному вектору объект сложной структуры. Для ассоциированных объектов строится метрический тензор.

Приводятся нетривиальные решения матричного уравнения $X^{p/q} = I$. Решаются уравнения стационарного движения Лагранжевой системы.

§1.

Рассмотрим скалярную форму, определенную на n-индексированных объектах. Так, например, введено скалярное полипроизведение индексированного объекта по Д. Г. Павлову [1]. Другими словами, рассматривается скалярная форма от n векторов вида

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n). \tag{1}$$

Это выражение, записанное с использованием структурных констант $C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n}$ формы f, может быть записано в виде

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n} \cdot (a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdot a_3^{i_3} \cdot \dots \cdot a_{n-1}^{i_{n-1}} \cdot a_n^{i_n}). \tag{2}$$

Структурные константы должны быть доопределены некоторыми дополнительными условиями, быть может, аксиоматического вида.

Аналогично [1] выполним замену для элементов $a_p^{i_p}$

$$a_p^{i_p} \Rightarrow a_p^{i_p} + b_p^{i_p},$$

тогда получаем выражение вида

$$f(a+b) = C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n} \cdot ((a+b)^{i_1} \cdot (a+b)^{i_2} \cdot (a+b)^{i_3} \cdot \dots \cdot (a+b)^{i_{n-1}} \cdot (a+b)^{i_n}). \tag{3}$$

Далее

$$f(a+b) = C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n} \cdot (a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot a^{i_3} \cdot \dots \cdot a^{i_{n-1}} \cdot a^{i_n}) + \\ + C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n} \cdot (b^{i_1} \cdot b^{i_2} \cdot b^{i_3} \cdot \dots \cdot b^{i_{n-1}} \cdot b^{i_n}) + S(a,b). \tag{4}$$

Полученная в (4) форма $S(a,b)$, порожденная формой f, совершенно аналогична обычным образом введенным скалярным произведениям в тензорных пространствах, где косинус угла между векторами определяется выражениями типа

$$Cos(A \wedge B) = 1/2[(A+B)^2 - (A,A) - (B,B)]/(A,A)^{1/2}/(B,B)^{1/2}. \tag{5}$$

Образуем ассоциированный с b_i объект

$$B^I = \begin{cases} b^i \\ b^{i_1} \cdot b^{i_2} \\ b^{i_1} \cdot b^{i_2} \cdot b^{i_3} \\ \dots\dots\dots \\ b^{i_1} \cdot b^{i_2} \cdot \ldots \cdot b^{i_{n-1}} \end{cases} \tag{6}$$

обозначим его B^I, здесь и далее $\{^I\}$ – мультииндекс, а также ассоциированные с a^i и $a^i + b^i$ объекты

$$A^I = \begin{cases} a^i \\ a^{i_1} \cdot a^{i_2} \\ a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot a^{i_3} \\ \dots\dots\dots \\ a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot \ldots \cdot a^{i_{n-1}} \end{cases} \qquad C^I = \begin{cases} (a^i + b^i) \\ (a^{i_1} + b^{i_1}) \cdot (a^{i_2} + b^{i_2}) \\ (a^{i_1} + b^{i_1}) \cdot (a^{i_2} + b^{i_2}) \cdot (a^{i_3} + b^{i_3}) \\ \dots\dots\dots \\ (a^{i_1} + b^{i_1}) \cdot (a^{i_2} + b^{i_2}) \cdot \ldots \cdot (a^{i_{n-1}} + b^{i_{n-1}}) \end{cases} \tag{7}$$

обозначим их A^I и C^I соответственно. Тогда форма $S(a,b)$ может быть записана в виде, аналогичном обычному скалярному произведению с расширенной метрикой S_{IJ}.

Имеем

$$S(a,b) = S_{IJ} A^I B^J. \tag{8}$$

Построенная в (8) матрица может быть обращена или псевдообращена, при этом будет построен ассоциированный расширенный метрический тензор S^{IJ}. Он может быть использован для поднятия или опускания индексов ассоциированных объектов A^I, A_J. Законы преобразования ассоциированных объектов следуют из их строения. Операция сложения ассоциированных объектов определена соотношениями (6), (7).

При необходимости может быть разрешена линейная система

$$S_{IJ} X^J = B_I. \tag{9}$$

Что можно сказать о системе (9) и о матрице системы (9). Матрица S_{IJ} квадратная. К сожалению нельзя сказать что либо определенное о ее невырожденности, знакоопределенности и обусловленности.

Однако из [2] для матрицы S_{IJ} следует существование ее представления в виде

$$S_{IJ} = G_{IP} U^P_J \tag{10}$$

где U^P_J – r-ортогональная матрица, а G_{IP} – симметричная неотрицательно определенная матрица ранга r.

Здесь и далее предполагается невырожденность матрицы S_{IJ}. Случай вырожденных матриц S_{IJ} должен рассматриваться особо.

В приложении 1 приведено решение задачи по определению стационарных решений уравнений Лагранжа, основанное на идеях раздела 1 настоящей работы.

В следующем разделе приведены теоремы, позволяющие решать линейные системы как вырожденные, так и невырожденные.

§2. Сингулярная фильтрация полярное разложение и обращение матриц линейных систем алгебраических уравнений

Краткая постановка задач, определения, теоремы по материалам [2], [3], [4].

Обозначим:
$Q^+_{symmetric}$ или Q^+_s – коммутативное множество симметричных положительно определенных диагонализируемых матриц,
$Q_{fixed\,rank}$ – коммутативное множество симметричных положительно определенных диагонализируемых матриц фиксированного ранга,
$\alpha_A = norm_2(A) \cdot norm_2(A^{-1})$ – спектральное число обусловленности невырожденной матрицы A,
$\alpha_A = norm_2(A) \cdot norm_2(A^+)$ – спектральное число обусловленности вырожденной матрицы A,
$\|A\|_2$ – спектральную норму матрицы A.

Определение 1. Проектор P удовлетворяет уравнению $P^2 = P$.

Определение 2. Будем называть $(m \times n)$-матрицу U_{pj} ортогональной матрицей фиксированного ранга r или для краткости r-ортогональной матрицей, если

$$P_{pq} = U_{pj} \cdot U_{qj}; \quad R_{ij} = U_{pi} \cdot U_{pj}; \tag{11}$$

являются $(m \times m)$- и $(n \times n)$-проекторами соответственно.

Для матричного оператора A_{pj} неопределенного ранга имеет место полярное разложение

$$A_{pj} = G_{pq} \cdot U_{qj}; \tag{12}$$

где:

G_{pq} – $(m \times m)$-положительно определенная матрица, и U_{qj} – $(m \times n)$ r-ортогональная матрица или ортогональная матрица фиксированного ранга $rank = r$; если при этом

$$rank\,G = rank\,U = rank\,A, \tag{13}$$

то разложение (12) единственно.

Следующие теоремы могут использоваться для решения линейных систем уравнений, сингулярной фильтрации матричных и сеточных операторов, а также для вычисления проекторов. Эти теоремы использовались также при проведения гарантированных оценок максимально возможной гарантированной точности, согласованной с алгоритмом (процедурой) вычисления произведения матриц.

Теорема 1. Пусть $B \in Q^+_s$ и $F(t) = (1-t)I + tB,\ t \in [0,1]$. Тогда

1. $C = F(t)^{-1} \cdot B\ \in Q^+_s,\ t \in [0,1]$

2. число обусловленности матрицы C есть монотонная функция параметра t, более того,

$$\alpha_C = \alpha_B \cdot \left[1 - \frac{t \cdot (\Lambda_{max} - \Lambda_{min})}{1 - t(1 - \Lambda_{max})}\right], \tag{14}$$

$$\frac{d\alpha_C}{dt} = -\alpha_B \cdot \frac{\Lambda_{max} - \Lambda_{min}}{[1 - t(1 - \Lambda_{max})]^2}, \tag{15}$$

где $\Lambda_{max}, \Lambda_{min}$ являются минимальным и максимальным собственным значением матрицы B;

3. $\alpha_C \cdot \alpha_F = \alpha_B$.

Теорема 2. Пусть U – r-ортогональная матрица фиксированного ранга $rank\, U = r$ полярного разложения $(m \times n)$-матрицы A, такой что $rank\, A = r$. Тогда при $t \in [0, 1]$ число обусловленности матрицы $C = F^{+} \cdot A$, где

$$F(t) = (1-t)U + tA, \;\; t \in [0, 1]$$

– монотонно убывающая функция параметра t, более того:

1.
$$\alpha_C = \alpha_A \cdot \left[1 - \frac{t \cdot (d_{max} - d_{min})}{1 - t(1 - d_{max})} \right], \tag{16}$$

2.
$$\frac{d\alpha_C}{dt} = -\alpha_A \cdot \frac{d_{max} - d_{min}}{[1 - t(1 - d_{max})]^2}, \tag{17}$$

здесь d_{max}, d_{min} – максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A;

3. $\alpha_C \cdot \alpha_F = \alpha_A$.

Теорема 3. Для произвольной матрицы A, такой что $\|A\|_2 = 1$ и матрицы $F(t), \; t \in [0, 1/2]$, вычисляемой по правилу $F = (1-t)I + tA^T \cdot A$

имеет место:

1. Итерационный процесс $X_{k+1} = F_k^{-1} \cdot X_k$, где $X_1 = A$, а F_k вычисляется как $F_k = (1-t)I + tX_k^T \cdot X_k$, сходится к r-ортогональной матрице U полярного разложения матрицы $A = G \cdot U$.

При этом $\quad G \in Q_s^{+}; \quad \lim\limits_{k \to \infty} X_k = U; \quad rank\, A = rank\, U = rank\, G;$

2. Число обусловленности матрицы X_k удовлетворяет выражению

$$\alpha_{X_{k+1}} = (1-t)\alpha_{X_k} + t\alpha_{X_k}^{-1} \tag{18}$$

3. Число обусловленности матрицы F_k удовлетворяет выражению

$$\alpha_{F_{k+1}} = [(1-t) + t\alpha_{X_k}^{-2}]^{-1} \tag{19}$$

4. Имеет место равенство $\alpha_{X_{k+1}} \cdot \alpha_{F_k} = \alpha_{X_k}$.

Теоремы 1, 2, 3 позволяют строить r-ортогональные матрицы проекционного типа, а также левые и правые проекторы операторов.

В приложении 2 приведены конечные сравнительные результаты оценок точности для различных алгебраических алгоритмов – Гаусса, Хаусхолдера и для алгебраических алгоритмов С. А. Шишкина. Последние при проведении вычислений с простой точностью по оценкам гарантированно в

в n раз точнее алгоритма Гаусса,
в $n^{1/2}$ раз точнее алгоритма Хаусхолдера,
и согласованы с точностью умножения матриц.

Как известно, проекционные операторы удовлетворяют уравнению

$$P \cdot P = P. \tag{20}$$

Однако нетривиальным и состоявшимся фактом является существование квадратных корней из единичного, а значит и из проекционного оператора, не совпадающих с P.

То есть наряду с оператором P, удовлетворяющим уравнению (20), существуют нетривиальные решения уравнения

$$X \cdot X = P. \tag{21}$$

§3.

Рассмотрим матричное квадратное уравнение

$$X \cdot X = I. \tag{22}$$

Теорема 4. Всякая матрица S, ортогонально подобная матрице X, удовлетворяющей уравнению (22) $X \cdot X = I$, удовлетворяет уравнению

$$S \cdot S = I.$$

Доказательство очевидно.

Другими словами, если матрица X удовлетворяет уравнению $X \cdot X = I$, то матрица $Y = \Phi \cdot X \cdot \Phi^T$, где Φ ортогональна, удовлетворяет уравнению

$$Y \cdot Y = I.$$

Уравнению (22) $X \cdot X = I$ удовлетворяет всякая симметричная матрица перестановок. Действительно, пусть p – матрица перестановок и пусть $p = p^T$. Тогда, так как $p \cdot p^T = I$, то

$$p \cdot p = I. \tag{23}$$

Пусть теперь ненулевые элементы матрицы q принимают значения ± 1 и стоят на тех же местах, что и ненулевые элементы матрицы p.

Тогда, если $q = q^T$, то матрица q удовлетворяет уравнению

$$q \cdot q = I \tag{24}$$

Будем называть такие матрицы *матрицами перестановочного типа.*

Множество корней из 3×3 единичной матрицы может быть классифицировано в соответствии с классификацией симметричных знаковых матриц.

Недавно, в мае 2004 года, на конференции начинающих молодых ученых в МФТИ был сделан доклад Алексея С. Шишкина, Ивана С. Шишкина (см. материалы конференции, а также [5]), в котором были найдены новые корни уравнения $X \cdot X = I$. Одним из результатов этого доклада явилось решение матричного квадратного уравнения $U \cdot U = I$ для размерности $n = 3$. Точнее было получено

$$U = \pm 1/3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

С учетом этих матриц и матриц перестановочного типа множество решений уравнения $X \cdot X = I$ для $3 \cdot 3$ матриц может быть разбито на линейно несвязные плотно заполненные множества.

Казалось бы, какое отношение этот результат имеет к $Cos(A \wedge B)$? Однако имеет место

Теорема 5. (А. С. Шишкин, И. С. Шишкин 2002, 2004).

Для всякого треугольника ABC с медианами m_a, m_b, m_c и сторонами a, b, c имеют место равенства

$$\begin{pmatrix} m_a^2 \\ m_b^2 \\ m_c^2 \end{pmatrix} = 3/4U \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = 4/3U \begin{pmatrix} m_a^2 \\ m_b^2 \\ m_c^2 \end{pmatrix}$$

$$(m_a^4 + m_b^4 + m_c^4) = 9/16 \cdot (a^4 + b^4 + c^4),$$

где

$$U = \pm 1/3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

– симметричная, ортогональная, кроссимметричная матрица, удовлетворяющая уравнению $U \cdot U = I$.

Полученная в теореме 5 матрица U линейно связна с ортогональной матрицей перестановочного типа

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кое-что можно сказать о существовании квадратных корней такого типа из единичных матриц порядка n.

Обозначим через $\mathbf{1}$ $n \times n$ матрицу, составленную только из единиц 1.

Тогда (А. С. Шишкин, И. С. Шишкин, 2004) матрица

$$U = \pm[I - (2/n) \cdot \mathbf{1}] \tag{26}$$

ортогональна и удовлетворяет уравнению

$$U \cdot U = I.$$

В заключение, рассмотрим решение уравнения

$$X^{p/q} = I. \tag{27}$$

Очевидно, имеют место равенства

$$X^p = I^q, \quad X^p = I. \tag{28}$$

Решение уравнений типа $X^{p/q} = I$ дает следующий результат.

Теорема 6. На поле комплексных матриц Z нетривиальные (то есть те, которые не могут быть сформированы при помощи матриц перестановочного типа) решения уравнения

$$Z^{p/q} = I \tag{29}$$

задаются выражением

$$Z = \xi([I + \alpha \cdot 1], \tag{30}$$

где комплексные числа α, ξ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^{k=p} (C_k^p \cdot (\alpha^k) \cdot (n^{k-1}), \quad [\xi]^{p/q} = 1, \quad C_k^p = p!/(p-k)!/(k!). \tag{31}$$

Следствие. Множество комплексных матриц Y, унитарно подобных матрице Z, являющейся решением уравнения $Z^{p/q} = I$, удовлетворяет уравнению $Y^{p/q} = I$.

Сегодня появляется возможность геометрических построений с метрикой нового типа, когда в качестве метрического тензора используется метрика, удовлетворяющая уравнению

$$U \cdot U = I.$$

Действительно, для любых ненулевых векторов x, y выполнены аксиомы метрики:

1. Коммутативность $(x^i U_{ij} y^j) = (y^i U_{ij} x^j)$;
2. Дистрибутивность $((x^i + y^i) U_{ij} z^j) = (x^i U_{ij} z^j) + (y^i U_{ij} z^j)$;
3. Выполнен распределительный закон умножения $((a \cdot x^i + b \cdot y^i) U_{ij} z^j) = a \cdot (x^i U_{ij} z^j) + b \cdot (y^i U_{ij} z^j)$.

Приложение 1.
Уравнения стационарного движения Лагранжевой системы.

Рассматриваются стационарные движения Лагранжевых систем. Система уравнений разрешена относительно скоростей $\dot{x}_k$.

Рассмотрим уравнение движения некоторого объекта

$$g_{ik} \ddot{x}^k + G_{i,jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = f_i \tag{П.1}$$

Оно может быть разрешено относительно произведения $\dot{x}^j \dot{x}^k$.

Обозначим X^{jk} произведение $\dot{x}^j \dot{x}^k$. Матрица X для любых ненулевых векторов x^j имеет ранг 1.

Введем в рассмотрение математический объект $A^{i,jk}$, обратный объекту $G_{i,jk}$, так что выполнены соотношения

$$G_{i,jk} A^{p,jk} = \delta_i^p, \qquad G_{i,jk} A^{i,pq} = \delta_{jk}^{pq} \tag{П.2}$$

для невырожденных в этом смысле объектов $G_{i,jk}$, $A^{i,pq}$.

Для вырожденного случая аналогично имеем

$$G_{i,jk} A^{p,jk} = P_i^p \qquad G_{i,jk} A^{i,pq} = P_{jk}^{pq}, \tag{П.3}$$

где P_i^p и P_{jk}^{pq} – проекционные операторы.

Стационарный случай

Пусть теперь

$$\ddot{x}^k = 0. \tag{П.4}$$

Тогда из уравнения (П.1) следует

$$G_{i,jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = f_i. \tag{П.5}$$

Далее получаем

$$X^{pq} = \dot{x}^p \dot{x}^q = A^{i,pq} f_i \tag{П.6}$$

Теперь для получения уравнений стационарного движения, разрешенных относительно скоростей, достаточно разложить матрицу X^{pq} ранга 1 по базису. Выберем максимальную по длине строку матрицы X^{pq}, пусть это X^{1q}. Нормируем ее. Тогда вектор $\dot{x}^p$ вычислится как

$$\begin{aligned} \phi^p &= X^{1q}/norma_2(X^{1q}) \\ (norma_2(\dot{x}^p))^2 &= X^{pq} \cdot \phi^p \cdot \phi^p \\ \dot{x^p} &= (norma_2(\dot{x}^p)) \cdot \phi^p. \end{aligned} \tag{П.7}$$

Приложение 2. Анализ гарантированных оценок точности алгоритмов авторского пакета программ Алгебра©.

Сравнения проведены с наиболее распространенными алгоритмами решения линейных систем.

Обозначения:

K_A – спектральное число обусловленности матрицы A,

$\|.\|_2$ – спектральная норма матрицы.

$$C_2(n) = \begin{cases} 1.01n & \text{– для вычислений с двойной точностью} \\ n^2 & \text{– для вычислений с простой точностью.} \end{cases}$$

При проведении численных расчетов, связанных с матричными вычислениями, граничной оценкой, по существу ограничивающей возможности алгоритмов, является оценка точности умножения матриц

$$\|AB - A \cdot B\|_2 \le 2^{-p} \|A\|_2 \|B\|_2 C_2(n) \tag{ПП 1}$$

$(\cdot)$ – численное умножение матриц.

При $B^{-1} = A$ оценка (1) принимает вид

$$\|A \cdot A^{-1} - I\|_2 / K_A \le 2^{-p} C_2(n). \tag{ПП 2}$$

Именно с такой точностью и удалось **(впервые)** гарантировать точность обращения матриц и решения линейных систем алгоритмами авторского пакета программ (SOLV, SQRoot, SPEC). Конкретно было получено

$$\|A \cdot A^{-1} - I\|_2 / K_A \le 2^{-p} C_2(n) \cdot k, \tag{ПП 3}$$

где

$k = 1$ для симметричных положительно определенных матриц,

$k = 2$ для матриц общего вида.

Оценка (3) применительно к линейным системам $Ax = b$ эквивалентна следующей

$$\|Ax - b\|_2 / K_A \le 2^{-p} C_2(n) k \|b\|_2. \tag{ПП 4}$$

Для сравнения приведем оценки точности для алгоритма Гаусса и для алгоритмов, построенных на ортогональных отражениях Хаусхолдера.

Для алгоритма Гаусса с выбором главного элемента[1] было получено $K_A = (n^3 + 3n^2)$.

Для алгоритмов, построенных на ортогональных отражениях Хаусхолдера[2], было получено $K_A = (40 \cdot n^{5/2} + O(n^2))$.

Для извлечения квадратных корней из симметричных положительно определенных матриц решение уравнения

$$S = X^2 \tag{ПП 5}$$

точность гарантируется оценкой

$$\|S - X^2\| \le 2^{-p+3} C_2(n) \, \|S\|_2 \tag{ПП 6}$$

В случае, когда при решении уравнения

$$S = Z^2 \tag{ПП 7}$$

матрица S симметрична, возможно вырождена и знако-неопределена, решение уже не может быть получено в действительных матрицах и записывается в виде $Z = X + iY$. В этом случае точность гарантируется оценками

$$\begin{gathered} \|S - (X + iY) \cdot (X + iY)\| \le 20 \cdot 2^{-p} \, C_2(n) \, \|S\|_2, \\ \|XY - X \cdot Y\| \le 2^{-p+3} \, C_2(n) \, \|S\|_2. \end{gathered} \tag{ПП 8}$$

Таким образом и в этом случае достигнута почти предельная точность решения уравнения (7). При тестировании алгоритма, использованного для решения уравнения (7), в качестве тест матриц использовались матрицы следующего вида

$$S_{ij} = 1/(i + j - 1) - 1/(2n - i - j + 1); \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Эти матрицы имеют равные по модулю и противоположные по знаку действительные собственные значения, причем все матрицы нечетного порядка вырождены. Полученные результаты тестирования представлены в таблице 1.

Таблица 1.

n	$\|XY\|_2/\|A\|_2$	$\|S - (X + iY) \cdot (X + iY)\|_2/\|A\|_2$	$2^{-p}n^2$
7	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$6.51 \cdot 10^{-11}$	$9.8 \cdot 10^{-11}$
9	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.13 \cdot 10^{-11}$	$1.62 \cdot 10^{-10}$
11	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.41 \cdot 10^{-11}$	$2.42 \cdot 10^{-10}$
13	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$5.18 \cdot 10^{-11}$	$3.38 \cdot 10^{-10}$
15	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$2.57 \cdot 10^{-11}$	$4.50 \cdot 10^{-10}$

Вычисления проведены в арифметике с простой точностью при представлении числа с точностью 10^{-12}.

Для обращения вырожденных матриц размера $m \times n$ и ранга $r < min(m, n)$ программами пакета Алгебра(SPEC) – Special Programs for Exect Calculations оценка

[1] См. монографию Уилкинсона, а также работы Дж. Форсайта.

[2] См. Уилкинсон, С.К. Годунов, Малышев.

точности аналогична оценке (3). В этом случае под K_A надо понимать спектральную обусловленность вырожденного матричного оператора. Соответствующая оценка принимает вид

$$\|A \cdot A^{+} - P\|_2 / K_A \leq 2^{-p+1} C_2(n) \tag{ПП 9}$$

где P – проектор на собственное подпространство матрицы А.

Литература

1. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. Москва, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

2. С. А. Шишкин. Об одном алгоритме обращения матриц с гарантированной точностью. Ж. Вычисл. Матем и Матем. Физ. 1991, Т. 31, № 6, с. 783–789.

3. С. А. Шишкин. Сингулярная фильтрация матричных и сеточных операторов с гарантированной точностью. Ж. Вычисл. Матем и Матем. Физ. 1994, Т. 34, № 4, с. 636–639. Полный текст депонирован в ВИНИТИ, 1993, N 2283 - B93, 27 с.

4. С. А. Шишкин. К вопросу об извлечении квадратных корней из симметричных знаконеопределенных матриц. Вариант полярного разложения. Ж. Вычисл. Матем и Матем. Физ. 1994, Т. 34, № 2, с. 315–317. Полный текст депонирован в ВИНИТИ, 1993, N 2282 - B93, 27 с.

5. А. С. Шишкин, И. С. Шишкин. Новое в треугольнике. // Педагогічна думка. Науково-практичний журнал № 1. 2003. Директор школи ліцею гімназіі.

6. А. С. Шишкин, И. С. Шишкин. Новое в треугольнике. Материалы конференции "Старт в науку", МФТИ, май 2004.