ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Г.И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт
gri9z@mail.ru

Конформные преобразования евклидовой (комплексной) плоскости обладают некой полнотой (достаточностью) для решения целого ряда математических и физико-математических задач формулируемых на этой плоскости. Для евклидовых, псевдоевклидовы и поличисловых пространств размерности больше двух такая полнота (достаточность) множества конформных преобразований отсутствует. В настоящей работе показано, что, используя понятие аналогичных геометрий, можно несколько обобщить понятие конформных преобразований, не только для евклидовых и псевдоевклидовых пространств, но и для финслеровых пространств, аналогичных пространствам аффинной связности. Приведены конкретные примеры таких преобразований для комплексных и гиперкомплексных чисел H_4. В общем случае такие преобразования образуют группу переходов, элементы которой можно представлять как переходы между проективно евклидовыми геометриями выделенного класса, фиксируемого выбором метрической геометрии, допускающей аффинные координаты. Взаимосвязь между функциями, осуществляющими обобщенно-конформные преобразования, и обобщенно-аналитическими функциями может оказаться продуктивной для решения фундаментальных задач теоретической и математической физики.

Введение

Конформные преобразования играют в физике и математике выделенную роль. Не менее важны римановы и псевдоримановы пространства постоянной кривизны (к ним, например, относятся пространство Лобачевского и сферическое пространство), их однородность столь же полная, как и у евклидова пространства, так как группы движений таких пространств содержат то же число параметров, что и евклидово пространство [1]. В случае метрических пространств, а данная работа не выходит за рамки финслеровых пространств, допускающих аффинную систему координат, мы исходим из "главенства" элемента длины, а понятие угла будем считать "вторичным". Предложенный подход (конечно, несколько видоизменeный) применим и для пространств (геометрий), в которых элемент длины не определен, но зато в каждой точке определен угол между векторами.

Если V_n некое риманово или псевдориманово пространство с координатами x^i и метрическим тензором $g_{ij}(x)$, то коэффициенты связности Γ^i_{kl} в этом пространстве, как известно, определяются формулой

$$\Gamma^i_{kl}(g) = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (1)$$

Если

$$G_{ij}(x) = \Lambda(x) \cdot g_{ij}(x), \quad (2)$$

где $\Lambda(x) > 0$ - некая скалярная функция координат, тогда

$$\Gamma^i_{kl}(G) = \Gamma^i_{kl}(g) + \frac{1}{2\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^l} \delta^i_k + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \delta^i_l - g^{im} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^m} g_{kl} \right). \quad (3)$$

Пространства с метрическими тензорами g_{ij} и G_{ij} называются конформно связными [1].

Так как коэффициенты связности преобразовываются при переходе от одной системы координат к другой по формулам:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\Gamma^i_{kl} = \Gamma^{i'}_{n'p'}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^l} \tag{4}$$

- конформные преобразования координат, осуществляемые функциями f^i в некоторой области $W_n \subset V_n$, где метрический тензор g_{ij} не зависит от точки пространства, должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^l}\delta^m_k + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}\delta^m_l - g^{mp}\frac{\partial \Lambda}{\partial x^p}g_{kl}\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^m}. \tag{5}$$

Свернем левую и правую части уравнений (5) с тензором g^{kl} сразу по двум индексам, получим

$$g^{kl}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{2-n}{2\Lambda}g^{kl}\frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}\frac{\partial f^i}{\partial x^l}. \tag{6}$$

Таким образом, функции, которые осуществляют конформное преобразование в евклидовых или псевдоевклидовых пространствах, являются решениями дифференциального уравнения (6).

Для аналитических функций комплексной переменной (конформные преобразования евклидовой плоскости первого рода) и для комплексно сопряженной аналитической функции комплексной переменной (конформные преобразования евклидовой плоскости второго рода)

$$\Lambda = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)^2, \tag{7}$$

и уравнения (5) выполняются в области аналитичности и односвязности.

Обобщение конформных преобразований евклидовых и псевдоевклидовых пространств

В работе [2] введено понятие аналогичных геометрий. Предлагается называть геометрии аналогичными в некоторых областях, если эти геометрии одноразмерные и найдется такое отображение одной области на другую, при котором некоторый класс геодезических (экстремалей) одной геометрии совместятся полностью с некоторым классом геодезических (экстремалей) другой геометрии. При определенных допущениях аналогичность геометрий означает, что найдутся такие системы координат, в которых дифференциальные уравнения для геодезических (экстремалей) совпадают.

Если в некоторой геометрии аффинной связности к коэффициентам связности аддитивно добавить тензор

$$T^i_{kl} = \frac{1}{2}(p_k\delta^i_l + p_l\delta^i_k) + S^i_{kl}, \tag{8}$$

где p_i - произвольное ковариантное поле, а S^i_{kl} - произвольное поле тензора, антисимметрического по двум нижним индексам, то геодезические останутся теми же кривыми [1].

Пусть функции f^i осуществляют взаимно однозначное отображение некоторой области евклидового или псевдоевклидового пространства с метрическим тензором g_{ij} на некоторую другую область того же пространства, и при этом эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l \delta^m_k + p_k \delta^m_l) - g^{mp}\frac{\partial L}{\partial x^p} g_{kl}\right] \frac{\partial f^i}{\partial x^m}\,, \tag{9}$$

где p_i - некое ковариантное векторное поле, а L - некое скалярное поле, тогда такое отображение (преобразование координат) будем называть элементарным обобщенно-конформным.

Заметим, что если бы мы для получения формул (9) использовали аддитивную добавку (8) с ненулевым тензором кручения S^i_{kl}, то вместо обобщения получили бы дополнительные условия

$$S^m_{kl}\frac{\partial f^i}{\partial x^m} = 0\,, \tag{10}$$

так как все остальные аддитивные члены в левой и правой частях системы уравнений (9) симметричны относительно перестановки индексов k и l.

Из определения элементарных обобщенно-конформных преобразований евклидовых и псевдоевклидовых пространств следует, что эти преобразования и функции f^i, которые их осуществляют, тесно связаны с понятием проективно евклидовых геометрий [1].

Таким образом, каждая функция (компонента) элементарного обобщенно-конформного преобразования удовлетворяют следующему скалярному уравнению:

$$g^{kl}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = g^{kl}\left(p_k - \frac{n}{2}\frac{\partial L}{\partial x^k}\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^l}. \tag{11}$$

Хотя для собственно обобщенно-конформных преобразований формула (2) не имеет места, будем считать по определению, что

$$\Lambda = \Lambda_0 \cdot \exp(L). \tag{12}$$

В каком-то смысле, таким образом определенное скалярное поле Λ будет характеризовать квадрат коэффициента "сжатия-растяжения" пространства при элементарном обобщенно-конформном преобразовании.

Для того чтобы показать нетривиальность такого обобщения понятия конформных преобразований приведем одно из решений системы уравнений (9):

$$f^i = \frac{x^i}{a + b\cdot g_{kl}x^k x^l}, \tag{13}$$

где a и b - некоторые действительные числа, причем

$$\Lambda = \frac{d}{(a - b\cdot g_{kl}x^k x^l)^2}, \tag{14}$$

где d - некоторое действительное число.

В случае евклидовой (комплексной) плоскости (x, y)

$$z = x + iy, \qquad F(z) = f^1 + if^2, \tag{15}$$

функция (13)

$$F(z) = \frac{z}{a + bz\bar{z}} \tag{16}$$

при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ не является ни аналитической, ни комплексно сопряженной аналитической, но осуществляет элементарное обобщенно-конформное преобразование евклидовой плоскости. При $a = 0$ эта функция становится комплексно сопряженной аналитической

$$F(z) = \frac{1}{b\bar{z}}, \tag{17}$$

что соответствует конформному отображению второго рода. При $b = 0$ функция $F(z)$ является аналитической,

$$F(z) = \frac{1}{a} z, \tag{18}$$

что соответствует конформному отображению первого рода.

Поличисла H_4

В пространстве H_4 четвертая степень элемента длины в ψ - базисе имеет вид

$$(ds)^4 = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \tag{19}$$

а конформно связная геометрия будет иметь элемент длины вида

$$(ds)^4 = \Xi d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \tag{20}$$

где $\Xi > 0$ - некоторое скалярное поле. Такая геометрия аналогична геометрии аффинной связности с коэффициентами связности [2]

$$\Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2}(p_k \delta^i_j + p_j \delta^i_k) - p^i_{kj} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{j_-}} + S^i_{kj}, \tag{21}$$

где

$$\psi_k \psi_j = p^i_{kj} \psi_i, \qquad p^i_{kj} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j = k, \\ \\ 0, \text{ во всех остальных случаях}, \end{cases} \tag{22}$$

p_k, $S^i_{kj} = -S^i_{jk}$ - произвольные тензорные поля, индекс $j_- = j$, но по ним не ведется суммирование.

Таким образом, система уравнений для функций f^i, которые осуществляют элементарное обобщенно-конформные преобразования в координатном пространстве поличисел H_4, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l \delta^m_k + p_k \delta^m_l) - p^m_{kl} \frac{\partial L}{\partial x^{l_-}} \right] \frac{\partial f^i}{\partial x^m}, \tag{23}$$

где

$$\Xi = \Xi_0 \cdot \exp(L). \tag{24}$$

Любая аналитическая функция переменной H_4 которая осуществляет взаимно однозначное отображение некоторой области координатного пространства H_4 на некоторую другую область того же пространства удовлетворяет системе уравнений (23), причем

$$p_i = 0, \qquad \Xi = \dot{f}^1 \dot{f}^2 \dot{f}^3 \dot{f}^4, \qquad L = \ln |\Xi / \Xi_0|. \tag{25}$$

Множество решений системы уравнений (23) не сводится только к аналитическим функциям переменной H_4. Так решением этой системы уравнений является функция

$$f^i = \frac{f_0^i \ln \left| \dfrac{\xi^{i-}}{\xi_0^{i-}} \right|}{a + b \ln \left| \dfrac{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}{\xi_0^1 \xi_0^2 \xi_0^3 \xi_0^4} \right|}, \tag{26}$$

которая только при $b = 0$ становится аналитической функцией переменной H_4. В формуле (26) a, b, ξ_0^i, f_0^i - постоянные, но, конечно, не все они независимы. Для функции (26)

$$\Xi = \frac{const}{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}. \tag{27}$$

Так как в пространстве H_4 можно образовать тензор

$$q_{ij} = p_{ik}^m p_{mj}^k, \qquad (q_{ij}) = diag(1, 1, 1, 1), \tag{28}$$

то существует и дважды контравариантный тензор q^{ij}, причем

$$(q^{ij}) = diag(1, 1, 1, 1), \tag{29}$$

поэтому каждая компонента элементарного обобщенно-конформного преобразования в пространстве H_4, должна удовлетворять следующему скалярному уравнению:

$$q^{kl} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = q^{kl} \left(p_k - \frac{\partial L}{\partial x^k} \right) \frac{\partial f^i}{\partial x^l}. \tag{30}$$

Сравнивая уравнения (11), (30) и учитывая формулы (12) (24), видим, что скалярное уравнение (11), решениями которого являются функции, осуществляющие обобщенно-конформные преобразования в 4-мерном евклидовом пространстве, и скалярное уравнение (30), которому подчиняются функции, осуществляющие обобщенно-конформные преобразования в пространстве H_4, имеют совершенно одинаковую структуру:

$$\delta^{kl} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \delta^{kl} \left(p_k - 4 \frac{\partial l}{\partial x^k} \right) \frac{\partial f^i}{\partial x^l}, \tag{31}$$

где коэффициент линейного "сжатия-растяжения" λ выражается через скалярное поле l и для 4-мерного евклидового пространства, и для пространства H_4 по одной и той же формуле

$$\lambda = \lambda_0 \exp(l). \tag{32}$$

Заметим однако, что при этом мы не можем утверждать, что p_k, l одинаковы для 4-мерного евклидового пространства и пространства H_4. В то же время было бы весьма интересно найти такой класс элементарных обобщенно-конформных преобразований, для элементов которого одноковариантное поле $\left(p_k - 4 \dfrac{\partial l}{\partial x^k} \right)$ было бы одним и тем же как для 4-мерного евклидового пространства, так и для пространства H_4, то есть в обоих случаях функции f^i удовлетворяли бы одному и тому же скалярному уравнению не только по форме. Линейные преобразования автоматически являются подмножеством такого класса преобразований.

Обобщенно-конформные преобразования

Предыдущие построения позволяют предположить, что наиболее общий вид системы уравнений, которые определяют элементарные обобщенно-конформные преобразования некой метрической геометрии (на данный момент развития понятия финслеровой геометрии, по-видимому, более, чем достаточно для нужд теоретической и математической физики), допускающей аффинные координаты и для которой все ее конформно связные пространства всегда аналогичны некоторой геометрии аффинной связности, в аффинных координатах таков:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l\delta_k^m + p_k\delta_l^m) - \Delta_{kl}^{pm}\frac{\partial L}{\partial x^p}\right]\frac{\partial f^i}{\partial x^m}, \tag{33}$$

где Δ_{kl}^{pm} - симметрический по нижним индексам числовой тензор в аффинной системе координат исходной метрической геометрии, L и p_k - скалярное и однократно ковариантное поля, причем для конформных преобразований коэффициент линейного "растяжения-сжатия" λ выражается через скалярное поле L по формуле

$$\lambda = \lambda_0 \exp(L/m) \equiv \lambda_0 \exp(l). \tag{34}$$

Здесь λ_0 - действительное число, а m - натуральное число, равное порядку формы финслеровой геометрии, через которую выражается элемент длины, например, для евклидовых и псевдоевклидовых геометрий $m = 2$, а для H_4-чисел $m = 4$.

Из формул (33) следует, что любое линейное невырожденное преобразование является элементарным обобщенно-конформным с

$$p_i = 0, \qquad L = const. \tag{35}$$

Хотя мы надеемся, что для всех возможных тензоров Δ_{kl}^{pm} вполне достаточно понятия финслеровой геометрии (возможно, что даже достаточно только понятия полиномиальной геометри [3]), эта гипотеза (как и более жесткая) требует строгого доказательства.

Для невырожденных поличисловых пространств P_n всегда имеется тензор q^{ij} (см. (28), (29)), поэтому для таких пространств элементарные обобщенно-конформные преобразования удовлетворяют следующему скалярному уравнению:

$$q^{kl}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left(p_k q^{km} - q^{kl}\Delta_{kl}^{pm}\frac{\partial L}{\partial x^p}\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^m}. \tag{36}$$

Элементарные обобщенно-конформные преобразования (33) не образуют группу, но всевозможные произведения (то есть последовательное выполнение) таких преобразований вместе с обратными элементарными преобразованиями образуют группу, которую будем обозначать $G_n(\Delta_{kl}^{pm})$ и называть группой обобщенно-конформных преобразований. Элементы этой группы - решения системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l\delta_k^m + p_k\delta_l^m) - \Delta_{kl}^{pm}\frac{\partial L}{\partial x^p}\right]\frac{\partial f^i}{\partial x^m} - \\ - \left[\frac{1}{2}(p'_r\delta_s^i + p'_s\delta_r^i) - \Delta_{sr}^{pi}\frac{\partial L'}{\partial f^p}\right]\frac{\partial f^s}{\partial x^k}\frac{\partial f^r}{\partial x^l},\end{gathered} \tag{37}$$

где p_l, p'_k, L, L' - некоторые поля, Δ_{sr}^{pi} - тот же самый скалярный тензор, что и в системе уравнений (33); причем подразумевается, что производные $\dfrac{\partial L}{\partial f^p}$ явно выражены через частные производные по x^i.

Обобщенно-конформные преобразования, можно рассматривать как переходы в подмножестве (классе) проективно евклидовых пространств, которое (подмножество) однозначно характеризуется тензором Δ^{pi}_{sr}. Подчеркнем еще раз, что достаточно изучить элементарные обобщенно-конформные преобразования, так как произвольное обобщенно-конформное преобразование можно построить в виде произведения некоторого элементарного и некоторого обратного к элементарному преобразованию, конечно, другому, если мы не хотим получить в результате тождественное преобразование. Римановы и псевдоримановы конформно евклидовы пространства обязательно являются пространствами постоянной кривизны [1], поэтому предложенные построения определяют класс финслеровых пространств, которые можно назвать финслеровыми пространствами постоянной кривизны. Тем самым обобщенно-конформные преобразования образуют группу переходов между элементами такого класса финслеровых пространств.

Обобщенно-аналитические функции

Если исходное метрическое пространство, которому соответствует числовой тензор Δ^{pm}_{kl}, является полчисловым $P_n \ni X$, то, во-первых, аналитические функции поличисловой переменной P_n осуществляют, в области, где якобиан от их компонент не равен нулю, конформные преобразования, и, во-вторых, в этом же пространстве можно ввести понятие обобщенно-аналитической функции [3]. Конечно, в этом случае функции, осуществляющие обобщенно-конформные преобразования, являются обобщенно-аналитическими данной поличисловой переменной. Более интересной является следующая задача: найти такой класс $\Upsilon(\Delta^{pm}_{kl}) \ni F(X)$ обобщенно-аналитических функций, любой элемент которого являлся бы автоматически решением системы уравнений (37).

Заметим, что если $F_{(1)}(X)$, $F_{(2)} \in \Upsilon(\Delta^{pm}_{kl})$, то $F_{(1)}\left(F_{(2)}\right) \in \Upsilon(\Delta^{pm}_{kl})$. Это следует из групповых свойств обобщенно-конформных преобразований.

Обобщенно-аналитическая функция поличисловой переменной $X \in P_n$,

$$F(X) = f^1(x^1, x^2, ..., x^n)e_1 + f^2(x^1, x^2, ..., x^n)e_2 + ... + f^n(x^1, x^2, ..., x^n)e_n, \tag{38}$$

$X = x^i e_i$, e_i - базис, удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma^i_k = p^i_{kj}\dot{f}^j, \tag{39}$$

где $\dot{f}^j$ - обобщенная производная, тензор p^i_{kj} определяется соотношениями

$$e_k e_j = p^i_{kj} e_i, \tag{40}$$

а объект γ^i_k должен при переходе от одних координат к другим преобразовываться по закону

$$\gamma^{i'}_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\gamma^i_k - \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i} f^i. \tag{41}$$

Если ε^i - коэффициенты разложения единицы в базисе e_i, то, учитывая формулу

$$\varepsilon^k p^i_{kj} = \delta^i_j, \tag{42}$$

из формулы (39) получим

$$\dot{f}^i = \varepsilon^m \frac{\partial f^i}{\partial x^m} + \varepsilon^m \gamma^i_m \tag{43}$$

и аналог соотношений Коши - Римана:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma_k^i - p_{kj}^i \left(\varepsilon^m \frac{\partial f^j}{\partial x^m} + \varepsilon^m \gamma_m^j \right) = 0. \tag{44}$$

Условия интегрируемости соотношений (39) относительно функций f^i выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \left(-\gamma_k^i + p_{kj}^i \dot{f}^j \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(-\gamma_m^i + p_{mj}^i \dot{f}^j \right). \tag{45}$$

Если система поличисел P_n невырождена и обобщенная производная также является обобщенно-аналитической функцией $\{\dot{f}^i, \dot{\gamma}_k^i\}$, то формально каждая компонента f^i удовлетворяет следующему скалярному уравнению:

$$q^{mk} \dot{\tilde{\nabla}}_m \tilde{\nabla}_k f^i = Q_r^i \ddot{f}^r, \tag{46}$$

где

$$Q_r^i = q^{mk} p_{kj}^i p_{mr}^j. \tag{47}$$

Для аналитических функций комплексной переменной это уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f^i = 2\ddot{f}^i \tag{48}$$

и выполняется тождественно. Таким образом, поле $(2\ddot{f}^i)$ можно рассматривать как поле источника поля f^i для оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{49}$$

Рассмотрим двумерное неоднородное (с правой частью) гиперболическое уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \right) u_s = f_s(t, x_s), \tag{50}$$

где t - время, x_s - координата вдоль струны, $u_s(t, x_s)$ - амплитуда поперечных малых колебаний струны, $\rho f_s dx_s$ - действующая на элемент $(x_s, x_s + dx_s)$ струны поперечная сила, ρ - плотность массы на единицу длины струны. При замене переменных

$$f^i = u_s, \qquad at = x, \qquad y = x_s, \qquad \frac{1}{a^2} f_s(t, x_s) = 2f^i(x, y) \tag{51}$$

уравнения (48) и (50) переходят друг в друга, но правая часть уравнения (48) есть аналитическая функция комплексной переменной (x, y), что существенно ограничивает разнообразие источников.

Итак, если функцией источника (правой частью) в неоднородном двумерном гиперболическом уравнении (волновом уравнении) , записанном в специальном виде (48) является аналитическая функция комплексной переменной, то одним из частных решений этого уравнения будет вторая первообразная функции источника, деленная на два.

Кроме уравнения (48), каждая аналитическая функция комплексной переменной подчиняется также уравнению Лапласа, которое можно получить аналогично уравнению (46), заменив тензор q^{mk} на тензор g^{mk}, который есть обратный к g_{ij} - метрическому тензору евклидовой плоскости:

$$g^{mk}\dot{\tilde{\nabla}}_m\tilde{\nabla}_k f^i = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f^i = 0. \qquad (52)$$

Аналогичные уравнения справедливы и для аналитических функций H_2 - переменной,

$$X = x + jy, \qquad j^2 = 1, \qquad (53)$$

но эллиптический и гиперболический типы уравнений меняются местами:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f^i = 2\ddot{f}^i, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f^i = 0. \qquad (54)$$

Итак, если функцией источника (правой частью) в неоднородном двумерном уравнении Лапласа является аналитическая функция H_2 переменной, то одним из частных решений этого уравнения будет вторая первообразная функции источника, деленная на два.

Таким образом, при замене $C \leftrightarrow H_2$ не только "меняются местами" волновое уравнение и уравнение Лапласа, но при этом одно из них теряет источник (неоднородную правую часть), а другое приобретает. Есть все основания полагать, что подобная симметрия может иметь место для поличисел размерности больше двух и не только для аналитических, но и обобщенно-аналитических функций.

Скалярное уравнение (46) для аналитических функций H_4-переменной в координатной системе ψ-базиса (22) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(\xi^1)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(\xi^2)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(\xi^3)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(\xi^4)^2}\right) f^i = \ddot{f}^i, \qquad (55)$$

или в координатной системе (x^0, x^1, x^2, x^3) базиса $\{1,\ j,\ k,\ jk\}$, состоящего из единицы и трех символьных единиц $j^2 = k^2 = (jk)^2 = 1$:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 = x^0 + x^1 + x^2 + x^3,\ \xi^2 = x^0 + x^1 - x^2 - x^3, \\ \xi^3 = x^0 - x^1 + x^2 - x^3,\ \xi^4 = x^0 - x^1 - x^2 + x^3 \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

- то же уравнение запишется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}\right) f^i = 4\ddot{f}^i. \qquad (57)$$

Итак, если функцией источника (правой частью) неоднородного 4-мерного уравнения Лапласа является аналитическая функция H_4-переменной, то одним из частных решений этого уравнения является вторая первообразная функции источника, деленная на 4.

Заметим также, что в уравнениях (48), первом (54) и (57) можно брать произвольную линейную комбинацию компонент функции источника, не меняя координаты, так как индекс i свободен и в левой и правой частях, а также использовать симметрию (несвойственную соответствующим поличислам) скалярных операторов, стоящих в правой части, для перехода к другим координатам, не "перемешивая"компоненты аналитических функций. Эти обстоятельства несколько расширяют соответствующие множества функций источников.

Заключение

В настоящей работе предложено обобщение понятия конформных преобразований метрического пространства. Если ограничиться пространствами, которые допускают аффинные координаты, то обобщенно-конформные преобразования при фиксированном исходном метрическом пространстве можно рассматривать как группу переходов между элементами некоторого класса пространств постоянной кривизны.

При решении проблемы взаимно однозначного (с точностью до дискретной группы преобразований) соответствия между обобщенно-конформными преобразованиями пространства P_n и обобщенно-аналитическими функциями поличисловой переменной P_n есть все основания надеяться получить мощный математический аппарат для решения физико-теоретических и математических задач в пространствах P_n.

Литература

[1] П.К.Рашевский: Риманова геометрия и тензорный анализ, Наука, М. 1967.

[2] Г.И.Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (2004), 75 - 88.

[3] Д.Г.Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (2004), 5 - 19.