ПОНЯТИЯ РАССТОЯНИЯ И МОДУЛЯ СКОРОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
hypercomplex@mail.ru

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия
gri9z@mail.ru

Получены формулы для трёхмерного расстояния и модуля скорости в четырёхмерном линейном пространстве с метрикой Бервальда-Моора при помощи разработанного алгоритма, который применим как для пространства Минковского, так и для произвольного полилинейного финслерова пространства, если в нем можно выделить времениподобную компоненту. Построенный в данной работе модуль трёхмерной скорости в пространстве с метрикой Бервальда-Моора при малых (нерелятивистских) скоростях совпадает с соответствующим выражением в пространстве Галилея, а при максимально возможных скоростях, то есть для мировых линий, лежащих на поверхности конуса будущего, – равен единице. Для построения трехмерного расстояния используется понятие поверхности относительной одновременности, что концептуально аналогично соответствующему методу специальной теории относительности. Выведены формулы преобразования скорости при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. В случае когда обе скорости направлены вдоль одной из трёх выделенных прямых, полученные соотношения совпадают с аналогичными соотношениями в специальной теории относительности, однако отличаются в других случаях. Получены выражения для преобразований, играющих роль преобразований Лоренца пространства Минковского. Если при этом три пространственные координатные оси есть прямые, вдоль которых скорости складываются так же, как в специальной теории относительности, то выбирая скорость новой инерциальной системы коллинеарной одной из таких координатных осей, получим, что преобразования этой координаты и временной совпадают с преобразованиями Лоренца, а преобразования двух поперечных координат отличаются от соответствующих преобразований Лоренца.

Введение

Геометрию пространства классической нерелятивистской физики, обычно связываемую с именами Галилея и Ньютона, можно считать приближением второго порядка по малому параметру (отношению модуля скорости к скорости света) от геометрии пространства Минковского. Однако, существуют и другие геометрии необязательно с квадратичной метрикой, для которых подобный предельный переход приводит к пространству Галилея, то есть к классической нерелятивистской механике.

Отталкиваясь от четырёх измерений, как несомненно присутствующих в нашем физическом мире, и желая рассмотреть, в первую очередь, простейшую метрическую форму четвертого порядка, мы считаем целесообразным начать подобные исследования с линейного пространства с метрикой Бервальда-Моора, интервал которого в одном из базисов представим в виде произведения четырех координат:

$$S = \sqrt[4]{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}. \tag{1}$$

Такое пространство условимся обозначать H_4 [1]. Метрическая функция (1) является частным случаем более общей метрической функции ([2], [3])

$$S = \xi_1^{(1+r_1+r_2+r_3)/4}\xi_2^{(1+r_1-r_2-r_3)/4}\xi_3^{(1-r_1+r_2-r_3)/4}\xi_4^{(1-r_1-r_2+r_3)/4}, \tag{2}$$

когда входящие в нее три параметра r_1, r_2, r_3 оказываются равными нулю. Замечательной особенностью пространства H_4 является то, что с ним можно связать коммутативно-ассоциативную алгебру, а также естественным образом ввести аналог скалярному произведению, в качестве которого выступает симметрическая полилинейная форма от нескольких векторов [4].

Следует отметить, что несмотря на свой экзотический вид метрическая форма в правой части формулы (1) может рассматриваться как четырехмерное обобщение квадратичной формы обычной псевдоевклидовой плоскости, которая помимо привычной записи

$$S^2 = x_0^2 - x_1^2 \tag{3}$$

при переходе из ортонормированного базиса в специальный, состоящий из особого вида изотропных векторов, принимает вид:

$$S^2 = \xi_1\xi_2. \tag{4}$$

Уже одного этого наблюдения достаточно, чтобы ожидать от пространства с метрикой (1) свойств, близких к свойствам псевдоевклидова пространства (особенно двухмерного), среди которых, конечно же, должны быть и релятивистские черты.

Замечание. Чтобы упростить написание формул, мы, как правило, все тензорные индексы будем писать внизу, а также иногда не станем выписывать координаты векторов через разности координат их конца и начала. Это не должно привести к ошибкам или непониманию, так как рассматриваются пока только аффинные пространства, а поднятие и опускание индексов не используется.

Физическая интерпретация основных геометрических объектов

В четырехмерном многообразии, рассматриваемом как некоторая модель пространства-времени, с наглядной точки зрения важны, прежде всего, эффекты, реализующиеся в его трехмерном подпространстве. Последнее желательно иметь возможность интерпретировать как обычное трехмерное пространство наблюдателя с его классическими свойствами. В пространстве Минковского (а также в его римановых обобщениях) евклидовы свойства некоторых из его (их) трехмерных подпространств заложены уже в самом виде фундаментальной метрической формы, включающей положительно определенную квадратичную составляющую. В связи с этим, методологические трудности при сопоставлении особенностей таких многообразий со свойствами реального трехмерного пространства (несомненно, весьма близкого к евклидовой геометрии), если и возникают, то только в отношении следствий, связанных с отказом от абсолютной одновременности.

При переходе от пространства Минковского с его квадратичной формой к финслерову пространству, в котором интервалы связаны с формой четвертого порядка, в частности к H_4, ответ на вопрос, какую геометрию вокруг себя обнаружит "живущий" в таком многообразии наблюдатель, не является столь же очевидным. Чтобы ответить на него, рассмотрим, каким образом объектам данного многообразия можно сопоставить общепринятые физические понятия и величины. Прежде чем сделать это, остановимся на интерпретациях геометрических объектов, связанных со специальной теорией относительности (СТО). К таким интерпретациям относятся:

1) точка четырехмерного пространства – событие;

2) прямая – мировая линия инерциальной системы отсчета;

3) расстояние между парой точек вдоль прямой – интервал между событиями;

4) множество изотропных (имеющих нулевой интервал) прямых, пересекающихся в одной точке, – световой конус;

5) гиперповерхность, точки которой удалены на равный интервал от некоторой фиксированной точки – гиперсфера пространства-времени, или множество событий, равноудаленных в собственном времени наблюдателя от фиксированного события;

6) гиперповерхность, точки которой равноотстоят от двух фиксированных точек – множество относительно одновременных событий в выделенной инерциальной системе отсчета, мировая линия которой проходит через фиксированные точки;

7) прямые, параллельные некоторой заданной, – множество неподвижных точек трехмерного пространства наблюдателя, находящегося в заданной инерциальной системе отсчета.

Для геометрических объектов, существующих в рассматриваемом пространстве H_4 (равно, как и для многих других линейных финслеровых пространств), можно оставить фактически те же физические интерпретации, что были перечислены выше и достаточно часто используются в СТО. Отличия проявляются только в частностях и в рассматриваемом случае H_4 сводятся всего к трем фактам: место светового конуса, имеющего круговую симметрию, занимает конус с плоскими гранями; множество относительно одновременных событий (то есть множество событий, равноудаленных от двух фиксированных точек пространства-времени) оказывается не плоским, а представляет собой достаточно сложную гиперповерхность; и, наконец, аналогом псевдоевклидовой сферы, состоящей из трех односвязных гиперболоидов (поверхностей второго порядка), является гиперповерхность, состоящая из шестнадцати гиперболоидов (поверхностей четвертого порядка). Все эти обстоятельства являются прямыми следствиями того, что теперь интервал между двумя событиями определяется не квадратным корнем из квадратичной формы, а корнем четвертой степени из формы четвертого же порядка (1).

Специальный базис, в котором интервал пространства H_4 имеет лаконичный вид (1), связан с особыми изотропными векторами. В специальной теории относительности в аналогичном базисе квадрат интервала имеет также непривычный вид:

$$S^2 = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_4 + \xi_3\xi_4. \tag{5}$$

Такое представление интервала пространства Минковского довольно редко используется, поэтому, чтобы не отступать от общепринятых в СТО построений, перепишем и нашу метрическую форму пространства H_4 в базисе, являющимся аналогом ортонормированного [5]. Для этого достаточно воспользоваться линейной подстановкой:

$$\xi_i = A_{ij}x_j, \ \ (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \ A_{ik}A_{kj} = 4\delta_{ij} \tag{6}$$

– после которой четвертая степень интервала окажется связанной со своими компонентами соотношением:

$$S^4 = x_0^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 8x_0x_1x_2x_3 + \\ + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2. \quad (7)$$

Если квадрат интервала в пространстве Минковского

$$S^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (8)$$

возвести еще раз в квадрат, чтобы в обоих выражениях фигурировали одинаковые четвертые степени, то справа получится полином, напоминающий по виду полином в правой части (7):

$$S^4 = x_0^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2. \quad (9)$$

В областях, для которых $|v_\alpha| \ll 1$, где $v_\alpha = x_\alpha/x_0$, $\alpha = 1, 2, 3$, характерных для нерелятивистской физики, выражения (7) и (9) равны с точностью до бесконечно малых $|v_\alpha|$ второго порядка. Из этого следует уже отмеченный выше предельный переход от геометрии H_4 к геометрии пространства Галилея, то есть к геометрии классической ньютоновой физики.

Определение расстояния и модуля скорости в пространстве Минковского

В пространстве Минковского множество событий, которым с точки зрения наблюдателя правомерно приписывать одинаковые значения пространственной (в трехмерном смысле) удаленности можно получить простым и наглядным геометрическим приемом, пересекая друг с другом две сферы (имеющие в пространстве Минковского вид гиперболоидов) одинаковых по величине радиусов, но имеющих разные центры (рис. 1). Прямую, проходящую через точки центров этих гиперболических сфер, можно ассоциировать с инерциальной системой отсчета, с позиции которой события, являющиеся пересечением соответствующих гиперболоидов, оказываются равноудаленными.

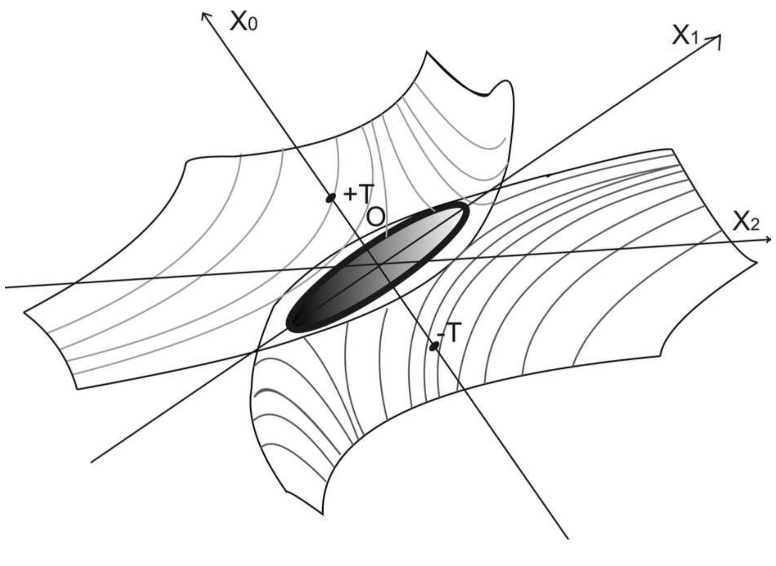

Рис. 1: Пересечение гиперболоидов в пространстве Минковского

Без потери общности рассуждения центры гиперболоидов можно разместить симметрично относительно начала координат и вдоль временной оси x_0, связав с точками: $(-T,0,0,0)$ и $(T,0,0,0)$. Чтобы получить уравнение поверхности, соответствующей пересечению двух псевдоевклидовых сфер радиуса S с центрами в данных точках, необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} S^2 &= (T+x_0)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \\ S^2 &= (T-x_0)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Складывая первое уравнение со вторым и вычитая одно из другого, мы переходим к эквивалентной системе

$$\left.\begin{aligned} &S^2 = T^2 + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \\ &0 = 2Tx_0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

первое из уравнений которой задает однополостный сферический гиперболоид (в качестве оси симметрии выступает временная ось), а второе описывает гиперплоскость $x_0 = 0$ ортогональную оси x_0 (рис. 2).

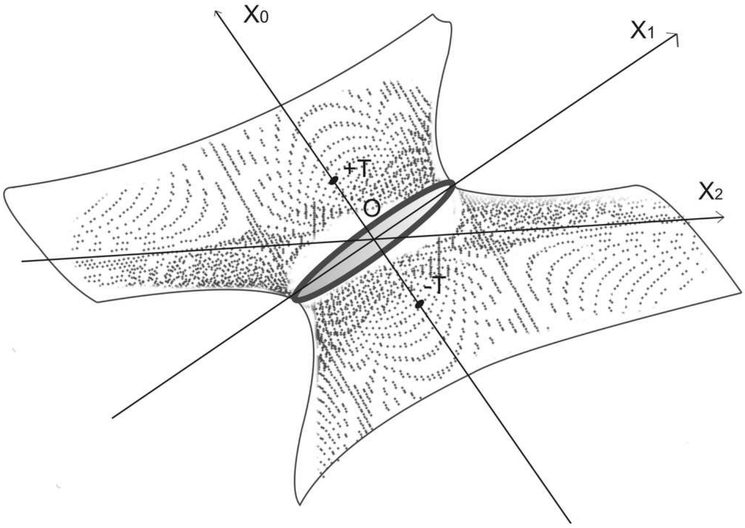

Рис. 2: Пересечение плоскости с однополостным гиперболоидом в пространстве Минковского

Варьируя величину интервала S от 0 до T, получаем семейство двухмерных поверхностей, вложенных друг в друга. Каждой из этих поверхностей следует присвоить конкретное значение некоторой положительной действительной величины, под которой мы и могли бы понимать расстояние (с позиции наблюдателя, связанного с конкретной системой отсчета). Для этого достаточно присвоить конкретные величины расстояний хотя бы одной из точек каждой поверхности и распространить это значение уже на все ее точки. Реализовать последнее проще всего, выбрав прямую, пересекающую все такие поверхности, тогда линейный параметр вдоль этой прямой как раз и мог бы выступать в качестве понятия расстояния. В частности, нужной прямой может выступать ось x_1. Принимая линейный закон соответствия расстояния l с координатой x_1, то есть подставляя в первое уравнение (11) $x_0 = 0$, $x_1 = l$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, приходим к соотношению

$$l = \sqrt{T^2 - S^2}, \tag{12}$$

получая т. о. связь расстояния l с радиусом (интервалом) S исходных гиперболоидов, чье пересечение и дало нам поверхности с одинаковыми значениями расстояний. Это соотношение позволяет переписать первое уравнение (11) в виде общеизвестного в СТО выражения трехмерного расстояния от оси x_0 до параллельных ей мировых линий, задаваемых координатами (x_1, x_2, x_3):

$$l = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{13}$$

Следует отметить, что в СТО проделанная только что процедура получения формулы для расстояний, как правило, не применяется, но она совершенно равноценна тем, что обычно используются. Нам же такая, несколько усложненная, процедура потребовалась для того, чтобы реализовать аналогичное построение в пространстве H_4, в котором обычно применяемые в СТО алгоритмы, не приводят к желаемому результату.

Для трехмерной скорости в пространстве Минковского можно также использовать похожие рассуждения. Две точки $(x_{(1)0}, x_{(1)1}, x_{(1)2}, x_{(1)3})$ и $(x_{(2)0}, x_{(2)1}, x_{(2)2}, x_{(2)3})$, вторая из которых находится в конусе будущего относительно первой, определяют вектор с координатами $(x_{(2)i} - x_{(1)i})$, которые можно переписать, введя понятие скорости следующим образом:

$$(x_{(2)i} - x_{(1)i}) \equiv (x_{(2)0} - x_{(1)0}) v_i, \tag{14}$$

где $v_0 \equiv 1$, а компоненты v_1, v_2, v_3 образуют вектор трехмерной скорости. Тогда интервал между этими двумя точками может быть записан через компоненты скорости:

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0}) \sqrt{1 - v^2}, \tag{15}$$

где

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{16}$$

Отметим, что модуль v трехмерной скорости в СТО обладает свойством

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0}) f(v), \tag{17}$$

где $f(v)$ – функция одного действительного переменного. Если же вектор $(1, v_1, v_2, v_3)$, а значит и вектор $(x_{(2)0} - x_{(1)0},\ x_{(2)1} - x_{(1)1},\ x_{(2)2} - x_{(1)2},\ x_{(2)3} - x_{(1)3})$ стремится к изотропному направлению, то $v \to 1$.

Определение расстояния и модуля скорости в пространстве H_4

Примем по определению, что в H_4 так же, как и в пространстве Минковского пересечение двух сфер (гиперболоидов) с одинаковыми радиусами, но разными центрами, представляет собой множество, точки которого (с позиции наблюдателя, чья мировая линия проходит через эти центры) являются равноудаленными в пространственном отношении от наблюдателя. Помимо аналогии с псевдоевклидовым случаем основанием к такому заключению служит факт равенства собственных времен для сигналов, исходящих из точки $(-T, 0, 0, 0)$ и приходящих в точки пересечения двух гиперболоидов, и собственных времен обратных сигналов, исходящих из этих точек и приходящих в точку $(T, 0, 0, 0)$. С позиции наблюдателя, чья мировая линия проходит через данные точки (то есть совпадает с осью x_0) и пользующегося информацией, связанной только с ним самим и с этими сигналами, последние отражаются от точек трехмерного пространства, удаленных от него на одинаковые расстояния. При этом общее время в пути (по часам самих сигналов) оказывается для всех пар сигналов (вне зависимости от направления) равным $2S$. По часам же считающего себя неподвижным наблюдателя прошел интервал 2T. Таким образом, ни показания часов, связанных с сигналами, ни показания часов самого наблюдателя не будут противоречить предположению, что расстояния от него до мировых линий, проходящих через точки поверхности, являющейся пересечением двух гиперболоидов, одинаковы и, следовательно, полностью характеризуются этими двумя величинами S и T.

Для пространства H_4 система двух уравнений, определяющая поверхность пересечения двух гиперболоидов с центрами в точках $(-T,0,0,0)$ и $(T,0,0,0)$, получается подстановкой в уравнение (7) вместо координат (x_0,x_1,x_2,x_3) вначале $(T+x_0,x_1,x_2,x_3)$, а затем $(T-x_0,-x_1,-x_2,-x_3)$:

$$\left.\begin{aligned} &S^4=(T+x_0)^4-2(T+x_0)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+8(T+x_0)x_1x_2x_3+\\ &+x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2-2x_2^2x_3^2,\\ &S^4=(T-x_0)^4-2(T-x_0)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-8(T-x_0)x_1x_2x_3+\\ &+x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2-2x_2^2x_3^2. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Перейдем, как и в случае пространства Минковского, к эквивалентной системе, взяв сумму и разность данных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &S^4=x_0^4+2x_0^2(3T^2-x_1^2-x_2^2-x_3^3)+8x_0x_1x_2x_3+T^4-\\ &-2T^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_1^4+x_2^4+x_3^4-2(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2),\\ &0=x_0^3+(T^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2)x_0+2x_1x_2x_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

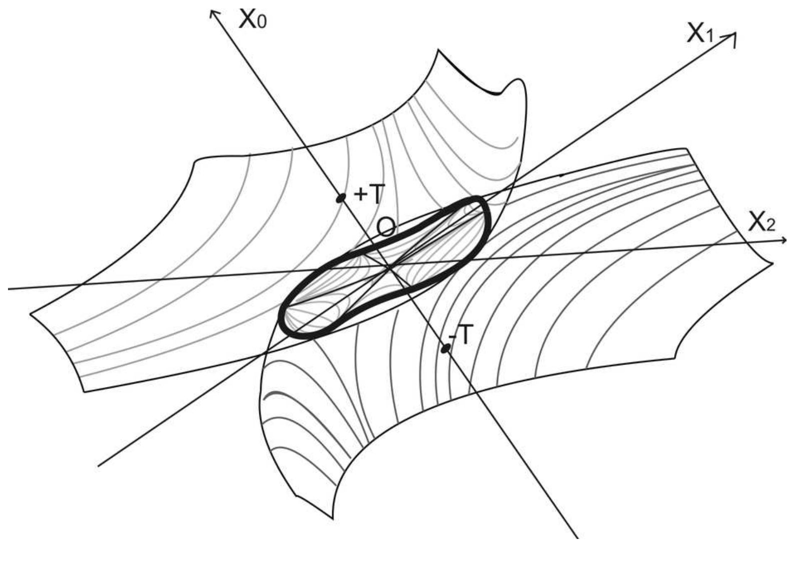

Рис. 3: Пересечение гиперболоидов в пространстве H_3

Изобразить, даже схематически, соответствующие системе уравнений (18) двумерные поверхности в четырехмерном пространстве затруднительно, поэтому для иллюстрации (рис. 3) мы воспользуемся более наглядным трехмерным случаем, соответствующим пространству H_3, которое устроено аналогично исследуемому пространству H_4 и имеет в изотропном базисе метрическую форму:

$$S^3=\xi_1\xi_2\xi_3. \tag{20}$$

Перейдя от (18) к системе уравнений (19), мы перешли от пересечения двух гиперболоидов к пересечению двух новых гиперповерхностей. Первая из них аналогична эквивалентна однополостному гиперболоиду пространства Минковского, а вторая – гиперплоскости $x_0 = 0$ псевдоевклидова пространства, поскольку каждая ее точка удалена на равные интервалы, как от точки $(-T, 0, 0, 0)$, так и от точки $(T, 0, 0, 0)$ (рис. 4). Однако теперь второе уравнение (19) определяет существенно нелинейную поверхностью, что является следствием специфики финслеровых метрических функций более высокого порядка, чем квадратичная. С физической точки зрения такой гиперповерхности можно поставить в соответствие понятие относительной одновременности, в финслеровом случае имеющее смысл только тогда, когда указана конкретная система отсчета и характерный масштаб T, задающий интервал времени между мгновенным положением наблюдателя и событием, по отношению к которому эта одновременность определяется. В псевдоевклидовом случае указание конкретного масштаба было излишне, так как связанная с понятием относительной одновременности гиперплоскость оставалась одной и той же для всех интервалов, разделяющих наблюдателя и интересующий его слой относительно одновременных событий. В рассматриваемых линейных финслеровых пространствах это уже не так, что неизбежно приводит к необходимости переосмысления свойств времени, во всяком случае, для пространств с неквадратичной метрикой.

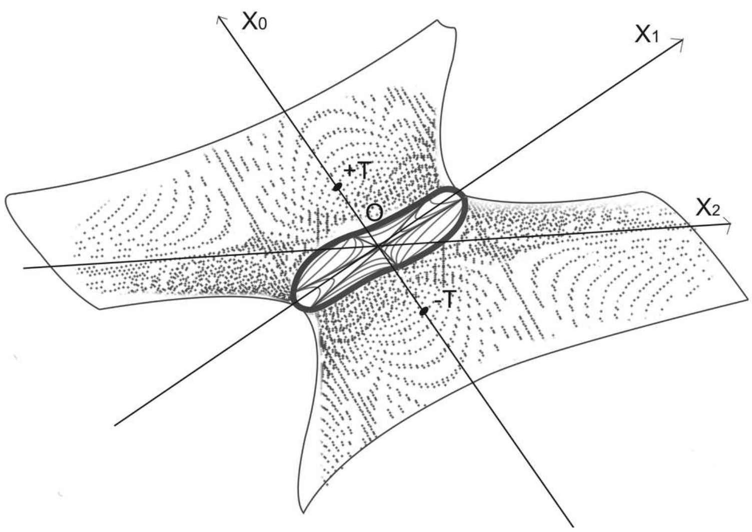

Рис. 4: Пересечение специальной поверхности с однополостным гиперболоидом в пространстве H_3

Пересечение гиперболоидов (18) с центрами в точках $(-T,\ 0,\ 0,\ 0)$ и $(T,\ 0,\ 0,\ 0)$ является множеством событий, которым с точки зрения наблюдателя, связанного с мировой линией, проходящей через эти точки, следует приписать одинаковые значения пространственной удаленности от данной мировой линии, то есть данного наблюдателя. Варьируя величину интервала S от 0 до T, мы получаем семейство таких двухмерных поверхностей, вложенных друг в друга, каждой из которых отвечает только одно значение пространственного расстояния. Для того, чтобы каждое получающееся таким образом двухмерное множество автоматически характеризовалось одним и тем же значением удаленности, нам достаточно присвоить конкретные величины расстояний хотя бы одной из точек каждой поверхности и распространить это значение уже на все ее точки. Для этого, как и в рассматривавшемся выше псевдоевклидовом случае, проще всего выбрать прямую, пересекающую все такие поверхности, а линейному параметру l вдоль такой прямой поставить в соответствие величину, которую можно условиться называть расстоянием, но уже не в обычном псевдоевклидовом, а в линейном финслеровом пространстве-времени.

Из анализа системы уравнений (19) следует, что поверхности относительной одновременности пространства H_4, соответствующей данному уравнению принадлежат все прямые, выходящие из начала координат и лежащие в одной из трех плоскостей: (x_1, x_2), (x_1, x_3) или (x_2, x_3). В частности, одной из таких прямых является ось x_1, поэтому, принимая линейный закон соответствия расстояния l и координаты x_1, из уравнений (19) получим связь расстояния l от наблюдателя до покоящихся относительно его других наблюдателей с радиусом S исходных гиперболоидов и половиной интервала между их центрами T. Для этого подставим в систему (19) $x_1 = l,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} S^4 &= x_0^4 + 2x_0^2(3T^2 - l^2) + T^4 - 2T^2l^2 + l^4, \\ 0 &= x_0^3 + (T^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)x_0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Из второго уравнения следует, что $x_0 = 0$, поэтому первое уравнение принимает вид

$$S^4 = T^4 - 2T^2l^2 + l^4. \tag{22}$$

Разрешая это уравнение относительно величины l, получим выражение

$$l = \sqrt{T^2 - S^2}. \tag{23}$$

Таким образом, трехмерное расстояние от мировой линии $(0, 0, 0)$ до параллельной ей мировой линии с координатами (x_1, x_2, x_3) выражается формулой:

$$l(T, x_1, x_2, x_3) = \sqrt{T^2 - S^2(T, x_1, x_2, x_3)}, \tag{24}$$

где $S^2(T, x_1, x_2, x_3)$ – корень квадратный из правой части первого соотношения (19) с заменой x_0 на действительный корень кубического уравнения (второго соотношения (19)) относительно неизвестной x_0.

Получившееся выражение для трёхмерного расстояния помимо того, что оно существенно отличается от привычной сферически симметричной формулы (13), включает зависимость от явно отсутствующего в СТО параметра T. Эти отличия приводят к тому, что трехмерные расстояния в H_4 приобретают несколько необычные свойства. В частности, расстояние от мировой линии A до мировой линии B, как правило, не совпадает с расстоянием от B до A. Однако, подобные эффекты проявляются только когда хотя бы одним из модулей $|x_\alpha|$ нельзя пренебречь по сравнению с величиной T. Если третьими и более высоким степенями отношений $|x_\alpha|/T$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то выражение для расстояния (24) принимает вид:

$$l(T, x_1, x_2, x_3) \simeq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{25}$$

Качественно новой особенностью, проявившейся при построении поверхности относительно одновременных событий в H_4 по сравнению с пространством Минковского, оказалась необходимость конкретизации параметра T, имеющего размерность длины. Представляется логичным данный характерный масштаб, отсутствующий в явном виде в построениях СТО, связывать непосредственно с наблюдателем, то есть системой отсчета, и интерпретировать его, как дополнительный параметр, характеризующий систему отсчета и позволяющий в данной системе отсчета однозначно строить поверхность относительной одновременности.

Перейдем теперь к трехмерной скорости.

В пространстве H_4 две точки $(x_{(1)0}, x_{(1)1},\ x_{(1)2},\ x_{(1)3})$ и $(x_{(2)0},\ x_{(2)1},\ x_{(2)2},\ x_{(2)3})$, вторая из которых находится в конусе будущего относительно первой, определяют вектор с координатами $(x_{(2)i} - x_{(1)i})$, которые можно переписать, введя понятие скорости:

$$(x_{(2)i} - x_{(1)i}) \equiv (x_{(2)0} - x_{(1)0})v_i, \tag{26}$$

где $v_0 \equiv 1$, а компоненты v_1, v_2, v_3 образуют вектор трехмерной скорости. Тогда интервал между этими двумя точками может быть записан через компоненты скорости следующим образом:

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt[4]{W}, \tag{27}$$

где

$$W = (1 + v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 - v_3)(1 - v_1 - v_2 + v_3). \tag{28}$$

Модуль v трехмерной скорости в пространстве H_4 должен обладать свойством

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})f(v), \tag{29}$$

где $f(v)$ – функция одного действительного переменного. Если только одна из компонент трехмерной скорости отлична от нуля, например v_1, то естественно считать, что $v = |v_1|$, причем из формулы (27) следует, что в этом случае

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt{1 - v^2}. \tag{30}$$

Обобщая этот одномерный случай, как и в случае с трехмерным расстоянием, на произвольную скорость, получим

$$\sqrt{1 - v^2} = \sqrt[4]{W(v_1, v_2, v_3)}, \tag{31}$$

или

$$v = \sqrt{1 - \sqrt{W(v_1, v_2, v_3)}}. \tag{32}$$

В нерелятивистском приближении

$$v \simeq \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{33}$$

Если же вектор $(1, v_1, v_2, v_3)$, а значит и вектор $(x_{(2)0} - x_{(1)0},\ x_{(2)1} - x_{(1)1},\ x_{(2)2} - x_{(1)2},\ x_{(2)3} - x_{(1)3})$ стремится к изотропному направлению, то $v \to 1$. Отметим также, что в общем случае $W(-v_1, -v_2, -v_3) \neq W(v_1, v_2, v_3)$.

Сложение скоростей

Группа симметрии $G_1(H_4)$, оставляющая инвариантным интервал (1) и состоящая из непрерывных линейных преобразований вида

$$x'_i = \frac{1}{4}A_{ik}D_{km}A_{mj}x_j, \tag{34}$$

где

$$(D_{km}) = diag(\exp\varepsilon_0, \exp\varepsilon_1, \exp\varepsilon_2, \exp\varepsilon_3), \tag{35}$$

действительные параметры ε_i изменяются в пределах $(-\infty, \infty)$ и связаны соотношением

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \tag{36}$$

может быть параметризована тремя действительными величинами, V_1, V_2, V_3, имеющими смысл компонент скорости, которую приобретает покоящийся объект после преобразования (35):

$$\exp\varepsilon_i = \frac{A_{ij}V_j}{\sqrt{1-V^2}}, \tag{37}$$

где $i, j = 0, 1, 2, 3$; $V_0 = 1$. Если в исходной системе отсчёта объект имел скорость (v_1, v_2, v_3), то в новой системе отсчёта этот же объект будет иметь скорость

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \frac{v_1 + V_1 + v_2V_3 + v_3V_2}{1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3},\\ v_2' &= \frac{v_2 + V_2 + v_1V_3 + v_3V_1}{1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3},\\ v_3' &= \frac{v_3 + V_3 + v_1V_2 + v_2V_1}{1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Из определения группы $G_1(H_4)$ имеем

$$(x'_{(2)0} - x'_{(1)0})\sqrt{1-(v')^2} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt{1-v^2}, \tag{39}$$

что даёт формулу для модуля трёхмерной скорости в новой системе координат

$$v' = \sqrt{1 - \frac{(1-v^2)(1-V^2)}{(1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3)^2}}, \tag{40}$$

так как при преобразованиях (34) – (37)

$$x'_{(2)0} - x'_{(1)0} = \frac{1 + v_1V_1 + v_2V_2 + v_3V_3}{\sqrt{1-V^2}}(x_{(2)0} - x_{(1)0}). \tag{41}$$

Если среди компонент v_α и V_α отличны от нуля только по одной компоненте вдоль одного и того же специального направления, например, $(v_1, 0, 0)$ и $(V_1, 0, 0)$, то формулы (38) совпадают с соответствующими формулами сложения скоростей в СТО.

Переход из покоящейся инерциальной системы в движущуюся

В данном разделе рассмотрим переход из старой (нештрихованной) системы отсчета в новую (штрихованную) систему отсчета, инерциально движущуюся со скоростью (V_1, V_2, V_3) относительно старой. Т. о. точка, движущаяся в старой системе отсчета со скоростью (V_1, V_2, V_3), в новой системе отсчета будет двигаться со скоростью $(0, 0, 0)$. Формулы (34) – (36) останутся теми же, а вместо формулы (37) получим

$$\exp(-\varepsilon_i) = \frac{A_{ij}V_j}{\sqrt{1-V^2}}, \tag{42}$$

то есть переходы от одной системы отсчета к другой, рассмотренные в предыдущем разделе и в данном, являются обратными друг к другу. Заметим, что замена в преобразовании (34) – (37) (V_1, V_2, V_3) на $(-V_1, -V_2, -V_3)$ не дает обратное преобразование к преобразованию (34) – (37).

Итак, при переходе к системе координат, движущейся со скоростью (V_1, V_2, V_3), старые координаты будут выражаться через новые по формулам

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{1-V^2}} \cdot \hat{A} \cdot \begin{pmatrix} (1+V_1+V_2+V_3)(x'_0+x'_1+x'_2+x'_3) \\ (1+V_1-V_2-V_3)(x'_0+x'_1-x'_2-x'_3) \\ (1-V_1+V_2-V_3)(x'_0-x'_1+x'_2-x'_3) \\ (1-V_1-V_2+V_3)(x'_0-x'_1-x'_2+x'_3) \end{pmatrix}, \tag{43}$$

где матрица $\hat{A}$ имеет компоненты A_{ij} (6).

Рассмотрим это преобразование, когда компоненты скорости новой системы отсчета в старой по трем специальным направлениям все равны нулю, кроме одной компоненты, например, $V_1 \neq 0$, а $V_2 = 0$ и $V_3 = 0$. Тогда

$$V = |V_1|, \tag{44}$$

а формулы (43) принимают вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \\ 0 & 0 & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

или

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 = \dfrac{x'_0 + V_1 x'_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & x_1 = \dfrac{V_1 x'_0 + x'_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \\ x_2 = \dfrac{x'_2 + V_1 x'_3}{\sqrt{1-V_1^2}} & x_3 = \dfrac{V_1 x'_2 + x'_3}{\sqrt{1-V_1^2}} \end{array}\right\}. \tag{46}$$

Такое преобразование координат $(x'_0, x'_1) \leftrightarrow (x_0, x_1)$ совпадает с соответствующим преобразованием в СТО, а преобразование координат $(x'_2, x'_3) \leftrightarrow (x_2, x_3)$ отличается от соответствующих преобразования в СТО, где $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$.

Заключение

Пространство H_4, являясь пространством ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел), алгебраически устроено весьма просто – оно изоморфно алгебре квадратных диагональных действительных матриц 4×4. Это пространство есть неизотропное метрическое финслерово пространство с трехпараметрической абелевой группой симметрии и оно не сводится никоим образом к пространствам с квадратичной метрической функцией. Именно совместное рассмотрение и алгебраических, и геометрических свойств пространства H_4 приводит к появлению весьма нетривиального математического объекта. Как показано в настоящей работе, наполнение пространства H_4, кроме алгебраической и геометрической структур, еще и физическим содержанием, делает его, несмотря на исходную алгебраическую простоту, еще более сложным и интересным. В нерелятивистском пределе (с точностью до второго порядка по отношению скорости физического объекта к скорости света) оно неотличимо как от пространства Галилея (то есть от пространства классической нерелятивистской механики), так и от пространства Минковского (СТО). Более того, и в общем случае по некоторым выделенным направлениям и двумерным плоскостям свойства пространства H_4 совпадают с соответствующими свойствами пространства Минковского по тем же направлениям и плоскостям.

Так как отличие пространства H_4 от пространства Минковского связано с анизотропией первого и физическими эффектами порядка кубической и более высоких степеней отношений скоростей физических объектов к скорости света, вопрос о том, какое из пространств наиболее адекватно реальному Миру, на наш взгляд, остается открытым. Во всяком случае, представляется неоспоримой необходимость тщательного изучения пространства H_4 и ему подобных, тем более, что по ряду объективных и субъективных причин они оказались в стороне от основного направления современных геометрических и физических исследований и при этом вполне могут содержать в себе сущности, близкие к свойствам реального Мира.

Подчеркнем, что подход, предложенный в данной работе для получения модуля трёхмерной скорости и трёхмерного пространственного расстояния, применим для произвольного линейного финслерова пространства, если в нем некоторую специальную систему координат можно разделить на одну временную и остальные пространственные координаты.

Литература

[1] Д. Г. Павлов, "Четырехмерное время", Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 1, N 1, (2004), 33.

[2] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner: Phys. Lett. A 244, N 4, (1988) 222.

[3] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner: Gen. Relativ. Gravit. 31, N 10, (1999) 1565.

[4] D. G. Pavlov: ArXiv: gr-qc/0206004.

[5] Д. Г. Павлов, "Обобщение аксиом скалярного произведения", Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 1, N 1, (2004), 5.