КВАТЕРНИОННЫЙ АНАЛИЗ[1]

Энтони Садбери

as2@mailer.york.ac.uk

1. *Введение*

Богатство теории функций комплексного переменного делает естественным поиск подобной теории для единственной иной нетривиальной ассоциативной алгебры с делением, называемой кватернионами. Такая теория существует, но она достаточно труднодоступна и еще по-видимому мало известна. Она не развивалась почти столетие после открытия кватернионов Гамильтоном. Гамильтон (1) и его основные последователи и интерпретаторы, Тэйт (2) и Джоли (3), лишь развили теорию функций кватернионных переменных настолько, насколько это было возможно посредством общих методов теории функций многих действительных переменных (основные идеи этой теории появились в их современной форме первый раз в работе Гамильтона о кватернионах). Среди всех кватернионнозначных функций кватернионных переменных они не выделили специальный класс регулярных функции аналогично регулярным функциям комплексной переменной.

Это произошло из-за того, что распространение никакого из двух фундаментальных определений аналитической функции комплексной переменной на кватернионы не дает интересных следствий; одно слишком узко, другое недостаточно узко. Функции кватернионных переменных, которые имеют кватернионные производные в очевидном смысле, есть лишь константы и линейные функции (причем не все из них); функции, которые могут быть представлены посредством кватернионных степенных рядов, есть именно те, которые могут быть представлены как степенные ряды из четырех действительных переменных.

В 1935 Р. Фютер (4) предложил определение "регулярности" кватернионных функций посредством аналогии с уравнениями Коши-Римана. Он показал, что это определение привело к тесной аналогии с теоремой Коши, интегральной формулой Коши и разложением Лорана (5). В последующие 12 лет Фютер и его сотрудники развили теорию кватернионного анализа. Полная библиография этой работы содержится в (6), и простая сводка (на английском) по элементарным разделам этой теории дана Деворсом (7).

Теория, развитая Фютером и его школой, не завершена по нескольким направлениям и многие из их теорем не являются ни столь общими, ни столь строго доказанными, как требуют современные стандарты описания в комплексном анализе. Цель данной работы заключается в представлении замкнутого обзора главного направления кватернионного анализа, который исправляет эти недостатки, заодно добавляя некоторое число новых результатов. Используя внешнее дифференциальное исчисление мы готовы предоставить новые и простые доказательства большинства основных теорем и разъяснить связь между кватернионным анализом и комплексным анализом.

В разделе 2 этой статьи мы устанавливаем свои обозначения для кватернионов и вводим кватернионные дифференциальные формы dq, $dq \wedge dq$ и Dq, которые играют фундаментальную роль в кватернионном анализе. 1-форма dq и 3-форма Dq

[1] *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1979), **85**, 199-225. Пер. А. Виноградовой под ред. А. Элиовича.

имеют простые геометрические интерпретации как касательная к кривой и нормаль к гиперповерхности соответственно.

Раздел 3 касается определения регулярной функции. Здесь развиты замечания второго параграфа этого введения о возможных аналогиях в определении комплексно-аналитической функции (этот материал по-видимому широко известен, но трудно доступен в литературе); затем показано, что определение Фютера регулярной функции, посредством аналогии с уравнениями Коши-Римана, эквивалентно существованию некоторого типа кватернионной производной. Точно так же, как для функции $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, уравнение Коши-Римана $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 0$ (переменная имеет вид $z = x + iy$) эквивалентно существованию комплексного числа $f'(z)$ такого что $df = f'(z)dz$, так и для функции $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, уравнение Коши-Римана-Фютера

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

(переменная имеет вид $q = t + ix + jy + kz$) эквивалентно существованию кватерниона $f'(q)$ такого, что $d\,(dq \wedge dqf) = Dqf'(q)$.

Раздел 4 посвящен кватернионным версиям теоремы Коши и интегральной формулы Коши. Если функция f непрерывно дифференцируема и удовлетворяет (1.1), то можно применить теорему Гаусса, чтобы показать, что

$$\int_{\partial C} Dqf = 0, \tag{1.2}$$

где C – некоторое гладкое замкнутое 3-мерное многообразие в $\mathbb{H}$, и что если q_0 лежит внутри C, то

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|\,q - q_0|^2}\, Dqf(q). \tag{1.3}$$

Мы покажем, что метод Гурса может быть использован для ослабления условий на контур C и функцию f, так что необходимо лишь потребовать спрямляемости C и производные функции f не обязательно должны быть непрерывными. Из интегральной формулы (1.3) следует, что как и в комплексном анализе, если f – регулярная функция на открытом множестве U, то она разлагается в степенной ряд в каждой точке множества U. Таким образом, поточечная дифференцируемость вместе с четырьмя действительными условиями (1.1) на шестнадцать частных производных функции f являются достаточным для обеспечения вещественной аналитичности.

В главе 5 мы показываем, как регулярные функции могут быть созданы из функций более обычного типа, а именно из гармонических функций четырех действительных переменных и аналитических функций комплексной переменной, и как регулярная функция порождает другие при конформных преобразованиях переменной.

Однородные компоненты в степенных рядах, представляющих регулярную функцию, сами являются регулярными; поэтому важно изучать регулярные однородные полиномы, базовые функции, через которые строятся все регулярные функции. Соответствующие функции комплексной переменной есть просто степени переменной, но ситуация с кватернионами более сложна. Множество однородных регулярных функций степени n формирует кватернионное векторное пространство размерности $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$; это справедливо для любого целого n, если подразумевается, что для отрицательных n функции определены и регулярны везде исключая 0. Функции с отрицательной степенью однородности соответствуют отрицательным степеням комплексной переменной и встречаются в кватернионном ряду Лорана, который существует для любой функции, регулярной на открытом множестве кроме одной точки.

Фютер нашел два естественных базиса для множества однородных функций которые играют двоякую роль в исчислении вычетов. (Он на самом деле только доказал, что эти базисы формируют остовы (натянутые множества, spanning sets)). В разделе 6 мы изучаем однородные регулярные функции при помощи гармонического анализа на единичной сфере в $\mathbb{H}$, которая формирует группу изоморфную $SU(2)$; это имеет такое же отношение к кватернионному анализу, как теория рядов Фурье – к комплексному анализу. В разделе 7 мы исследуем степенные ряды, представляющие регулярные функции, и получаем аналоги теоремы Лорана и теоремы вычетов.

Многие алгебраические и геометрические свойства комплексных аналитических функций не представлены в кватернионном анализе. Из-за того, что кватернионы не коммутируют, регулярные функции кватернионных переменных не могут быть перемножены или скомбинированы для создания новых регулярных функций. Поскольку кватернионы являются четырехмерными, не существует аналога геометрическому описанию комплексных аналитических функций как конформных отображений. Нули кватернионной регулярной функции не обязательно являются изолироваными, а ее область значений не обязательно открыта; ни одно из этих множеств не обязано даже быть подмногообразием $\mathbb{H}$. В соответствии с этим возникает сложность в структуре особенностей кватернионной регулярной функции; что было описано Фютером (9), но без четкой формулировки утверждений или доказательств. Эта тема не исследуется в настоящей работе.

2. *Предварительные соображения*

Обозначим четырехмерную действительную ассоциативную алгебру кватернионов через $\mathbb{H}$, ее единицу как 1; будем считать, что $\mathbb{R}$ вложено в $\mathbb{H}$ посредством отождествления $t \in \mathbb{R}$ с $1 \in \mathbb{H}$. Тогда мы имеем прямую сумму векторного пространства $\mathbb{H} = \mathbb{R} \bigoplus P$, где P – ориентированное трехмерное евклидово векторное пространство; в обычной системе обозначений для трехмерных векторов произведение двух элементов из P представляется в виде

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{a.b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{2.1}$$

Мы выбираем ортонормированный положительно ориентированный базис i, j, k для P и записываем типичный кватернион как

$$q = t + ix + jy + kz \qquad (t, x, y, z \in \mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Иногда мы будем обозначать базис кватернионов i, j, k через e_i и координаты x, y, z через x_i $(i = 1, 2, 3)$ и использовать правило суммирования для повторяющихся индексов. Тогда (2.2) принимает вид

$$q = t + e_i x_i \tag{2.3}$$

и умножение дается соотношением

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k. \tag{2.4}$$

Будем также иногда отождествлять поле, натянутое на 1 и i, с комплексным полем $\mathbb{C}$ и записывать

$$q = v + jw \qquad (v, w \in \mathbb{C}), \tag{2.5}$$

где $v = t + ix$ и $w = y - iz$. Правило умножения тогда записывается

$$vj = j\bar{v} \tag{2.6}$$

для всех $v \in \mathbb{C}$.

Мы будем писать

$$\bar{q} = t - ix - jy - kz, \tag{2.7}$$

$$\mid q \mid = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

$$Re\, q = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) = t \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

$$Pu\, q = \frac{1}{2}(q - \bar{q}) = ix + jy + kz \in P, \tag{2.10}$$

$$Un\, q = \frac{q}{\mid q \mid} \in S, \tag{2.11}$$

где S – единичная сфера в $\mathbb{H}$; и

$$\langle q_1, q_2 \rangle = Re(q_1\bar{q}_2) = t_1t_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{2.12}$$

Тогда имеем

$$\overline{q_1q_2} = \bar{q}_2\bar{q}_1, \tag{2.13}$$

$$|q_1q_2| = \mid q_1 \mid \cdot \mid q_2|, \tag{2.14}$$

$$Re(q_1q_2) = Re(q_2q_1) \tag{2.15}$$

и

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^{\,2}}. \tag{2.16}$$

Заметим, что если u_1 и u_2 – единичные кватернионы, т. е. $|u_1| = |u_2| = 1$, отображение $q \mapsto u_1qu_2$ является ортогональным относительно скалярного произведения (2.12) и имеет определитель 1; обратно, любое вращение $\mathbb{H}$ имеет форму $q \mapsto u_1qu_2$ с некоторыми $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ (смотри например (**10**)), раздел 10).

Скалярное произведение (2.12) порождает $\mathbb{R}$-линейное отображение $\Gamma : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$, где

$$\mathbb{H}^* = Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$$

– дуальное к $\mathbb{H}$ векторное пространство, заданное посредством

$$\langle \Gamma(\alpha), q \rangle = \alpha(q) \tag{2.17}$$

для $\alpha \in \mathbb{H}^*$, $q \in \mathbb{H}$. Так как $\{1, i, j, k\}$ – ортонормированный базис на $\mathbb{H}$, имеем

$$\Gamma(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k).$$

Множество $\mathbb{R}$-линейных отображений из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ формирует двустороннее векторное пространство на $\mathbb{H}$ размерности 4, которое будем обозначать как F_1. Оно порождается (на $\mathbb{H}$) $\mathbb{H}^*$, так что отображение Γ может быть расширено по линейности на правое $\mathbb{H}$-линейное отображение $\Gamma_r : F_1 \to \mathbb{H}$ и левое линейное отображение

$$\Gamma_l : F_1 \to \mathbb{H}.$$

Это задается посредством

$$\Gamma_r(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k) \tag{2.18}$$

и

$$\Gamma_l(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k) \tag{2.19}$$

для любого $\alpha \in F_1$.

Ниже дана геометрическая терминология, используемая в настоящей статье:

Ориентированный k-параллелепипед в $\mathbb{H}$ есть отображение $C : I^k \to \mathbb{H}$, где $I^k \subset \mathbb{R}^k$ – замкнутый единичный k-куб, формы

$$C(t_1, \ldots, t_k) = q_0 + t_1 h_1 + \ldots + t_k h_k.$$

$q_0 \in \mathbb{H}$ называется *исходной вершиной* параллелепипеда, $h_1, \ldots, h_k \in \mathbb{H}$ – *векторами его боковых ребер.* Параллелепипед *невырожден*, если его вектора боковых ребер линейно независимы (над $\mathbb{R}$). Невырожденный 4-параллелепипед является *положительно ориентированным*, если

$$v(h_1, \ldots, h_4) > 0,$$

отрицательно ориентированным, если $v(h_1, \ldots, h_4) < 0$, где v – объемная форма, определенная ниже (уравнение (2.26)).

Мы будем иногда упрощать запись, обозначая отображение $C(I^k)$ как просто C.

Кватернионные дифференциальные формы. Будем говорить, когда это необходимо во избежание путаницы с другими обозначениями дифференцируемости, что функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *действительно дифференцируема*, если она дифференцируема в обычном смысле. Ее дифференциал в точке $q \in \mathbb{H}$ тогда будет $\mathbb{R}$-линейным отображением $df_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Идентифицируя касательное пространство в каждой точке $\mathbb{H}$ с самим $\mathbb{H}$, мы можем рассматривать дифференциал как кватернионнозначную 1-форму

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{dz}dz. \tag{2.20}$$

Обратно, любая кватернионнозначная 1-форма $\theta = a_0 dt + a_i dx_i$ $(a_0, a_i \in \mathbb{H})$ может быть рассмотрена как $\mathbb{R}$-линейное отображение $\theta : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ представимое как

$$\theta(t + x_i e_i) = a_0 t + a_i x_i \tag{2.21}$$

Аналогично, кватернионнозначная r-форма может рассматриваться как отображение из $\mathbb{H}$ на пространство кососимметричных $\mathbb{R}$-полилинейных отображений из $\mathbb{H} \times \ldots \times \mathbb{H}$ (r раз) на $\mathbb{H}$. Определим внешнее произведение таких форм обычным способом: если θ – r-форма и ϕ – s-форма, то

$$\theta \wedge \phi(h_1, \ldots, h_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\rho} \epsilon(\rho)\theta(h_{\rho(1)}, \ldots, h_{\rho(r)}))\phi(h_{\rho(r+1)}, \ldots, h_{\rho(r+s)}), \tag{2.22}$$

где сумма производится по всем перестановкам ρ $r+s$ объектов, и $\epsilon(\rho)$ – знак ρ. Тогда множество всех r-форм есть двустороннее кватернионное векторное пространство, и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} a(\theta \wedge \phi) = (a\theta) \wedge \phi, \\ (\theta \wedge \phi)a = \theta \wedge (\phi a), \\ (\theta a) \wedge \phi = \theta \wedge (a\phi) \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

для всех кватернионов a, r-форм θ и s-форм ϕ. Пространство кватернионных r-форм имеет базис действительных r-форм, состоящий из внешних произведений действительных 1-форм dt, dx, dy, dz; для таких форм левое и правое умножение на кватернионы совпадают. Заметим, что так как внешнее произведение определено в терминах кватернионного умножения, которое не является коммутативным, вообще говоря, неверно, что $\theta \wedge \phi = -\phi \wedge \theta$ для кватернионных 1-форм θ и ϕ.

Внешняя производная кватернионной дифференциальной формы определена с помощью обычной рекурсивной формулы, а теорема Стокса остается в силе в обычной форме для кватернионных интегралов.

Следующие специальные дифференциальные формы будут часто использоваться на протяжении всей статьи. Дифференциал тождественной функции имеет вид

$$dq = dt + idx + jdy + kdz \tag{2.24}$$

и рассматривается как $\mathbb{R}$-линейное преобразование $\mathbb{H}$, dq – тождественное отображение. Его внешнее произведение с самим собой есть

$$dq \wedge dq = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk} e_i dx_j \wedge dx_k = idy \wedge dz + jdz \wedge dx + kdx \wedge dy, \tag{2.25}$$

которое, как антисимметричная функция на $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, является коммутатором своих аргументов. Для постоянной (а по существу единственной) действительной 4-формы используем сокращение

$$v = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \tag{2.26}$$

так что $v(1, i, j, k) = 1$. Наконец, 3-форма Dq определяется как кососимметричная $\mathbb{R}$-трилинейная функция посредством

$$\langle h_1, Dq(h_2, h_3, h_4)\rangle = v(h_1, h_2, h_3, h_4) \tag{2.27}$$

для всех $h_1, \ldots, h_4 \in \mathbb{H}$. Таким образом $Dq(i, j, k) = 1$ и $Dq(1, e_i, e_j) = -\epsilon_{ijk} e_k$. В координатах выражение для Dq есть

$$\begin{aligned} Dq = dx \wedge dy \wedge dz - \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk} e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k = \\ dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Геометрически, $Dq(a, b, c)$ – это кватернион, который перпендикулярен к a, b и c и имеет величину, равную объему 3-мерного параллелепипеда с ребрами a, b и c. Он имеет также следующее алгебраическое выражение:

Утверждение 1. $Dq(a, b, c) = \frac{1}{2}(c\bar{a}b - b\bar{a}c)$.

Доказательство. Для любого единичного кватерниона u отображение $q \longmapsto uq$ является ортогональным преобразованием $\mathbb{H}$ с детерминантом 1; следовательно

$$Dq(ua, ub, uc) = uDq(a, b, c).$$

Взяв $u = |\,a|\, a^{-1}$ и используя $\mathbb{R}$-трилинейность Dq, получим

$$Dq(a, b, c) = |\,a|^2 a Dq(1, a^{-1}b, a^{-1}c). \tag{2.29}$$

Теперь, так как

$$Dq(1, e_i, e_j) = -\epsilon_{ijk} e_k = \frac{1}{2}(e_j e_i - e_i e_j),$$

то при линеаризации имеем

$$Dq(1, h_1, h_2) = \frac{1}{2}(h_2 h_1 - h_1 h_2) \tag{2.30}$$

для всех $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$. Следовательно

$$Dq(a,b,c) = \frac{1}{2}|\,a|^2 a(a^{-1}ca^{-1}b - a^{-1}ba^{-1}c) = \frac{1}{2}(c\bar{a}b - b\bar{a}c). \ \square$$

В ходе этого доказательства были получены две полезные формулы. Рассуждение, приведшее к (2.29), может быть обобщено, используя тот факт, что отображение $q \longmapsto uqv$ есть вращение для любой пары единичных кватернионов u и v, на

$$Dq(ah_1b, ah_2b, ah_3b) = |a|^2|b|^2 aDq(h_1,h_2,h_3)b; \tag{2.31}$$

и формула (2.30) может быть записана как

$$1 \rfloor Dq = -\frac{1}{2}dq \wedge dq, \tag{2.32}$$

где $\rfloor$ обозначает обычное скалярное произведение между дифференциальными формами и векторными полями и 1 обозначает постоянное векторное поле, величина которого равна 1.

Так как дифференциал кватернионнозначной функции на H является элементом F_1, отображение Γ_r может быть применена к нему. Результатом будет

$$\Gamma_r(df) = \frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{2.33}$$

Введем следующие обозначения для дифференциального оператора, записанного в (2.33), и для других связанных с ним дифференциальных операторов:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\partial}_l f = \frac{1}{2}\Gamma_r(df) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),\\
\partial_l f &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),\\
\bar{\partial}_r f = \frac{1}{2}\Gamma_l(df) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i}e_i\right),\\
\partial_r f &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x_i}e_i\right),\\
\triangle f &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

Отметим, что $\partial_l, \bar{\partial}_l, \partial_r$ и $\bar{\partial}_r$ все коммутируют и что

$$\triangle = 4\partial_r\bar{\partial}_r = 4\partial_l\bar{\partial}_l. \tag{2.35}$$

3. Регулярные функции

Требование того, что функция комплексной переменной $z = x+iy$ должна быть комплексным полиномом, т. е. суммой членов $a_n z^n$, выделяет собственное подмножество полиномных функций $f(x,y)+ig(x,y)$. Соответствующее условие для функции кватернионных переменных $q = t+ix+jy+kz$, а именно чтобы она была суммой мономов $a_0qa_1 \ldots a_{r-1}qa_r$, не накладывает ограничение на функцию; в противоположность комплексному случаю координаты t, x, y, z могут самостоятельно быть записаны как кватернионные полиномы:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{4}(q - iqi - jqj - kqk), \\ x &= \frac{1}{4i}(q - iqi + jqj + kqk), \\ y &= \frac{1}{4j}(q + iqi - jqj + kqk), \\ z &= \frac{1}{4k}(q + iqi + jqj - kqk), \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

и поэтому каждый действительный полином в t, x, y, z является кватернионным полиномом в q. Поэтому теория кватернионных степенных рядов будет тождественна теории действительных аналитических функций на $\mathbb{R}^4$.

С другой стороны, требование того, чтобы функция кватернионной переменной имела бы кватернионную производную в очевидном смысле, является слишком сильным для получения интересных следствий, как мы сейчас покажем.

Определение. Функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *кватернионно-дифференцируема слева* в q, если предел

$$\frac{df}{dq} = \lim_{h\to 0}[h^{-1}\{f(q+h) - f(q)\}]$$

существует.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что функция f определена и кватернионно-дифференцируема слева на всем связном открытом множестве U. Тогда на U f имеет форму

$$f(q) = a + qb$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{H}$.

Доказательство. Из определения следует, что если f кватернионно-дифференцируема слева в q, она действительно-дифференцируема в q и ее дифференциал является линейным отображением умножения справа на $\partial f/\partial q$:

$$df_q(h) = h\frac{df}{dq},$$

то есть

$$df_q = dq\frac{df}{dq}. \tag{3.2}$$

Приравнивая коэффициенты при dt, dx, dy и dz, получим

$$\frac{df}{dq} = \frac{\partial f}{\partial t} = -i\frac{\partial f}{\partial x} = -j\frac{\partial f}{\partial y} = -k\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{3.3}$$

Положим $q = v + jw$, где $v = t + ix$ и $w = y - iz$, и пусть $f(q) = g(v, w) + jh(v, w)$, где g и h – комплекснозначные функции двух комплексных переменных v и w; тогда (3.3) может быть разделено на два набора комплексных уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -i\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = i\frac{\partial h}{\partial z},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = i\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = i\frac{\partial g}{\partial z}.$$

В терминах комплексных производных это может быть записано как

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial w} = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial w} \tag{3.5}$$

и

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{v}} = -\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.4) показывает, что g является комплексной аналитической функцией переменных v и $\bar{w}$, h – комплексной аналитической функцией переменных $\bar{v}$ и w. Отсюда согласно теореме Хартога ((**11**), стр. 133) g и h имеют непрерывные частные производные всех порядков, и таким образом из (3.5) вытекает

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial h}{\partial \bar{w}}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right) = 0.$$

Предположим сначала, что U – выпуклое. Тогда можно заключить, что g – линейное по $\bar{w}, h$ – линейное по w и h – линейное по $\bar{v}$. Таким образом

$$g(v,w) = \alpha + \beta v + \gamma \bar{w} + \delta v \bar{w},$$

$$h(v,w) = \epsilon + \zeta \bar{v} + \eta w + \theta \bar{v} w,$$

где греческими буквами обозначены комплексные константы. Теперь (3.5) и (3.6) дают следующие соотношения между этими константами:

$$\beta = \eta, \quad \zeta = -\gamma, \quad \delta = \theta = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f &= g + jh = \alpha + j\epsilon + (v + jw)(\beta - j\gamma) \\ &= a + qb, \end{aligned}$$

где $a = \alpha + j\epsilon$ и $b = \beta - j\gamma$; итак, f имеет указанную форму, если U – выпуклое. Произвольное связное открытое множество может быть покрыто выпуклыми множествами, любые два из которых могут быть связаны цепью попарно перекрывающихся выпуклых множеств; сравнивая формы функций f на перекрытиях, мы видим, что $f(q) = a + qb$ с теми же константами a, b на всем U. □

Теперь дадим определение "регулярности" для кватернионной функции, которая обеспечивается большим классом функций и которая приводит к развитию теории, подобной теории регулярных функций комплексной переменной.

Определение. Функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *лево-регулярная* в $q \in \mathbb{H}$, если она действительно-дифференцируема в q и там существует кватернион $f'_l(q)$ такой что

$$d(dq \wedge dqf) = Dqf'_l(q). \tag{3.7}$$

Она является *право-регулярной*, если там существует кватернион $f'_r(q)$ такой что

$$d(fdq \wedge dq) = f'_r(q)Dq.$$

Ясно, что теория лево-регулярных функций полностью эквивалентна теории право-регулярных функций. Для определенности мы рассмотрим только лево-регулярные функции, которые назовем просто *регулярными.* Запишем $f'_l(q) = f'(q)$ и назовем ее *производной* функции f в q.

Приложение теоремы Стокса дает следующее определение производной регулярной функции как предела разностного отношения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Предположим, что f регулярна в q_0 и непрерывно дифференцируема в окрестности q_0. Тогда при данном $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такие, что если C – невырожденный ориентированный 3-параллелепипед с $q_0 \in C(I^3)$ и $q \in C(I^3) \Rightarrow |q - q_0| < \delta$, то*

$$\left| \left(\int_C Dq \right)^{-1} \left(\int_{\partial C} dq \wedge dqf \right) - f'(q_0) \right| < \epsilon.$$

Соответствующее определение производной в терминах значений функции в конечном числе точек есть

$$\begin{aligned} f'(q_0) = \lim_{h_1,h_2,h_3 \to 0} [Dq(h_1,h_2,h_3)^{-1}\{&(h_1h_2 - h_2h_1)(f(q_0+h_3) - f(q_0)) \\ &+ (h_2h_3 - h_3h_2)(f(q_0+h_1) - f(q_0)) \\ &+ (h_3h_1 - h_1h_3)(f(q_0+h_2) - f(q_0))\}]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Выражение обоснованно, если подразумевается, что h_1, h_2, h_3 кратны трем фиксированным линейно независимым кватернионам, $h_i = t_i H_i$, и предел берется как $t_1, t_2, t_3 \to 0$.

Переписав (3.7) в виде

$$dq \wedge dq \wedge df = Dqf'(q)$$

и выразив эти трилинейные функции через аргументы (i, j, k) и $(1, i, j)$, мы получаем два уравнения, которые дают выражение для производной

$$f' = -2\partial_l f = -\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} \tag{3.9}$$

и также

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *(Уравнения Коши-Римана-Фютера).*

Действительно-дифференцируемая функция f регулярна в q тогда и только тогда, когда $\bar{\partial}_l f = 0$, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{3.10}$$

Если мы напишем $q = v + jw$, $f(q) = g(v,w) + jh(v,w)$ как в Теореме 1, выражение (3.10) становится парой комплексных уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{w}}, \qquad \frac{\partial g}{\partial w} = -\frac{\partial h}{\partial v}, \tag{3.11}$$

которые могут рассматриваться как комплексификация уравнений Коши-Римана для функции комплексной переменной.

Из Утверждения 3 и (2.35) следует, что, если f регулярна и дважды дифференцируема, то $\triangle f = 0$, то есть f – гармоническая функция. В следующем разделе мы увидим, что регулярная функция с необходимостью является бесконечно дифференцируемой, так что все регулярные функции гармонические.

4. Теорема Коши и интегральная формула

Интегральные теоремы для регулярных кватернионных функций имеют столь же широкую область справедливости, как их аналоги для регулярных комплексных функций, которая значительно шире, чем область справедливости интегральных теорем для гармонических функций. Теорема Коши справедлива для любого спрямляемого контура интегрирования; интегральная формула, которая подобна формуле Пуассона в том смысле, что она дает значение функции внутри области через значения на ее границе, справедлива в общем случае спрямляемой границы, и в этом заключается явное решение основной проблемы Дирихле.

Алгебраическим базисом этих теорем является уравнение

$$\begin{aligned} d(gDqf) &= dq \wedge Dqf - gDq \wedge df \\ &= \{(\bar{\partial}_r g)f + g(\bar{\partial}_l f)\}v, \end{aligned} \tag{4.1}$$

которое справедливо для любых дифференцируемых функций f и g. Взяв $g = 1$ и используя Утверждение 3, имеем:

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Дифференцируемая функция f регулярна в q тогда и только тогда, когда*

$$Dq \wedge df_q = 0.$$

Отсюда, вместе с теоремой Стокса, следует, что если f регулярна и непрерывно дифференцируема в области D с дифференцируемой границей, то

$$\int_{\partial D} Dqf = 0.$$

Как в комплексном анализе, однако, условия, накладываемые на f, могут быть ослаблены при использовании метода разбиений (dissection argument) Гурса. Применяя его к параллелепипеду, получим.

ЛЕММА 1.*Если f регулярна в каждой точке 4-параллелепипеда C,*

$$\int_{\partial C} Dqf = 0. \tag{4.2}$$

Метод разбиений может также быть использован для доказательства интегральной формулы Коши-Фютера для параллелепипеда:

ЛЕММА 2.*Если f регулярна в каждой точке положительно ориентированного 4-параллелепипеда C, и q_0 – точка внутри C, то*

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial C} \frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} Dqf(q). \tag{4.3}$$

Доказательство. В (4.1) возьмем $g(q) = \frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} = -\partial_r(\frac{1}{|q-q_0|^2})$.

Тогда g дифференцируема всюду, исключая q_0, и $\overline{\partial}_r g = 0$; отсюда, если f регулярна, то $d(gDqf) = 0$ всюду, исключая q_0. Метод сечений теперь показывает, что в выше приведенном интеграле C может быть заменен на любой меньший 4-параллелепипед C' с $q_0 \in int\, C' \subset C$, и так как f непрерывна в q_0, мы можем выбрать C' столь малым, что $f(q)$ может быть заменено на $f(q_0)$. Так как 3-форма gDq

замкнута и непрерывно дифференцируема в $\mathbb{H} - \{q_0\}$, мы можем заменить $\int_{\partial C'} gDq$ на интеграл по 3-сфере S с центром в q_0, на которой

$$Dq = \frac{(q - q_0)}{|q - q_0|} dS,$$

где dS – обычный евклидовый элемент объема на 3-сфере. Следовательно

$$\int_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = \int_C \frac{dS}{|q - q_0|^3} = 2\pi^2 f(q_0). \ \square$$

Мы будем использовать следующее специальное обозначение для функции, встречающейся в интегральной формуле:

$$G(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2}.$$

Эта функция действительно-аналитична всюду, кроме начала координат; поэтому в (4.3) подынтегральное выражение есть непрерывная функция (q, q_0) в $\partial C \times int\, C$ и, для каждого фиксированного $q \in \partial C$, действительно-аналитическая функция от q_0 в $int\, C$. Следовательно, ((**12**), стр. 7) этот интеграл есть действительно-аналитическая функция q_0 в $int\, C$. Поэтому мы имеем

ТЕОРЕМА 1. *Функция, регулярная на открытом множестве U, является действительно-аналитической в U.*

Это делает обоснованным применение теоремы Стокса и таким образом дает возможность получить теорему Коши для границы любой дифференцируемой 4-цепи. Все это может быть затем расширено на спрямляемые контуры, определенные ниже как:

Определение. Пусть $C : I^3 \to \mathbb{H}$ – непрерывное отображение единичного 3-куба в $\mathbb{H}$ и пусть $P : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_p = 1$, $Q : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = 1$ и

$$R : 0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_r = 1$$

являются тремя разбиениями единичного интервала I. Определим

$$\begin{aligned}\sigma(C; P, Q, R) = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{r-1} Dq(&C(s_{l+1}, t_m, u_n) - C(s_l, t_m, u_n),\\ &C(s_l, t_{m+1}, u_n) - C(s_l, t_m, u_n),\\ &C(s_l, t_m, u_{n+1}) - C(s_l, t_m, u_n)).\end{aligned}$$

C является *спрямляемой 3-ячейкой*, если существует действительное число M, такое что $\sigma(C; P, Q, R) < M$ для всех частей P, Q, R. В этом случае наименьшая верхняя грань чисел $(C; P, Q, R)$ называется *протяженностью* C и обозначается как $\sigma(C)$.

Пусть f и g – кватернионнозначные функции, определенные на $C(I^3)$. Будем говорить, что $fDqg$ *интегрируема* над C, если сумма

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{r-1} f(C(\bar{s}_l, \bar{t_m}, \bar{u_n}))Dq(&C(s_{l+1}, t_m, u_n) - C(s_l, t_m, u_n),\\ &C(s_l, t_{m+1}, u_n) - C(s_l, t_m, u_n),\\ &C(s_l, t_m, u_{n+1}) - C(s_l, t_m, u_n))g(C(\bar{s}, \bar{t_m}, \bar{u_n})),\end{aligned}$$

где $s_l \leq \bar{s_l} \leq s_{l+1}, t_m \leq \bar{t_m} \leq t_{m+1}$ и $u_n \leq \bar{u_n} \leq u_{n+1}$, имеет предел в смысле интегрирования по Риману-Стилтьесу как $|P|, |Q|, |R| \to 0$, где

$$|P| = \max_{0 \leq l \leq p-1} |s_{l+1} - s_l|$$

является мерой грубости разбиения P. Если этот предел существует, обозначим его как $\int_C fDqg$.

Мы расширим эти определения, чтобы определить спрямляемые 3-цепи и интегралы на спрямляемых 3-цепях обычным способом.

Точно так же, как для спрямляемых кривых, мы можем показать, что $fDqg$ интегрируема над 3-цепью C, если f и g непрерывны и C спрямляема, и

$$\left| \int_C fDqg \right| \leq (\max_C |f|)(\max_C |g|)\sigma(C).$$

Кроме того, мы имеем следующую слабую форму теоремы Стокса:

ТЕОРЕМА СТОКСА ДЛЯ СПРЯМЛЯЕМОГО КОНТУРА. *Пусть C – спрямляемая 3-цепь в $\mathbb{H}$ с $\partial C = 0$, и предположим, что f и g – непрерывные функции, определенные в окрестности U образа C, и что $fDqg = d\omega$, где ω есть 2-форма U. Тогда*

$$\int_C fDqg = 0.$$

Доказательство происходит с помощью аппроксимации C цепью 3-параллелепипедов с вершинами в точках $C_a(s_l, t_m, u_n)$, где C_a – 3-ячейка в C и (s_l, t_m, u_n) – точки разбиения в I. Теорема Стокса справедлива для этой цепи 3-параллелепипедов и мы можем использовать такое же рассуждение для спрямляемых кривых (смотри, например, (**13**), стр. 103).

Теперь мы можем дать наиболее общие формы теоремы Коши и интегральной формулы.

ТЕОРЕМА 2.*(Теорема Коши для спрямляемого контура). Предположим, что f регулярна на открытом множестве U, и пусть C будет спрямляемой 3-цепью, которая гомологична 0 в сингулярной гомологии U. Тогда*

$$\int_C Dqf = 0.$$

Доказательство. Сначала мы докажем теорему в случае, когда U – стягиваемая. В этом случае, так как $d(Dqf) = 0$ и f – непрерывно дифференцируема (по Теореме 1), применима лемма Пуанкаре и мы имеем $Dqf = d\omega$ для некоторой 2-формы ω на D. Но $\partial C = 0$, поэтому по теореме Стокса $\int_C Dqf = 0$.

В общем случае, предполагаем $C = \partial C^*$, где C^* – 4-цепь в U. Мы можем разбить C^* на

$$C^* = \sum_n C_n^*,$$

где каждая C_n^* – 4-ячейка, лежащая внутри открытого шара, содержащегося в U, причем C_n^* – спрямляема. Отсюда, по первой части теоремы $\int_{\partial C_n^*} Dqf = 0$, и поэтому

$$\int_C Dqf = \sum_n \int_{\partial C_n^*} Dqf = 0. \quad \square$$

Для общей формы интегральной формулы нам нужен аналог понятия числа оборотов кривой вокруг точки на плоскости. Пусть q – любой кватернион и пусть C – 3-цикл в $\mathbb{H} - \{q\}$. Тогда C – гомологичен $n\partial C_0$, где C_0 – положительно ориентированный 4-параллелепипед в $\mathbb{H} - \{q\}$ и n – целое (независимо от выбора C_0), которое мы назовем *числом оборотов* C вокруг q.

ТЕОРЕМА 3 *(Интегральная формула для спрямляемого контура).*

Предположим, что f – регулярная функция на открытом множестве U. Пусть q_0 – точка в U, и пусть C – спрямляемая 3-цепь, которая гомологична, в сингулярной гомологии $U - \{q_0\}$, дифференцируемой 3-цепи, образ которой есть ∂B для некоторого шара $B \subset U$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_C \frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} Dqf(q) = nf(q_0)$$

где n – число оборотов C вокруг q_0.

Многие стандартные теоремы комплексного анализа зависят только от интегральной формулы Коши и поэтому они также справедливы для кватернионных регулярных функций. Наглядными примерами являются теорема о максимуме модуля (смотри, например, (**14**), стр. 165 (первое доказательство)) и теорема Лиувилля ((**14**), стр. 85 (второе доказательство)). Теорема Морера также справедлива для кватернионных функций, но в этом случае обычное доказательство не может быть легко адаптировано. Она может быть доказана (**8**) при помощи метода разбиений (dissection argument), показывающего, что если f непрерывна на открытом множестве U и удовлетворяет

$$\int_{\partial C} Dqf = 0$$

для любого 4-параллелепипеда C, содержащегося в U, то f удовлетворяет интегральной формуле; и далее рассуждая, как при доказательстве аналитичности регулярной функции.

5. Построение регулярных функций

Регулярные функции могут быть созданы из гармонических функций двумя способами. Первый: если f – гармоническая, то (2.35) показывает, что $\partial_l f$ – регулярная. Второй: любая действительно-значная гармоническая функция является, по крайней мере локально, действительной частью регулярной функции:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть u – действительно-значная функция, определенная на звездном открытом множестве $U \subseteq \mathbb{H}$. Если u – гармоническая и имеет непрерывные вторые производные, то существует регулярная функция f, определенная на U, такая что $Ref = u$.*

Доказательство. Не ограничивая общности можем принять, что U содержит начало координат и является звездным относительно него. В этом случае покажем, что функция

$$f(q) = u(q) + 2Pu\int_0^1 s^2\partial_l u(sq)qds \tag{5.1}$$

регулярна в U.

Так как

$$\begin{aligned} Re\int_0^1 s^2\partial_l u(sq)q ds &= \frac{1}{2}\int_0^1 s^2\left\{t\frac{\partial u}{\partial t}(sq)+x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(sq)\right\}ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 s^2\frac{d}{ds}[u(sq)]ds \\ &= \frac{1}{2}u(q)-\int_0^1 su(sq)ds, \end{aligned}$$

мы можем записать

$$f(q)=2\int_0^1 s^2\partial_l u(sq)q ds+2\int_0^1 su(sq)ds. \tag{5.2}$$

Так как u и $\partial_l u$ имеют непрерывные частные производные в U, можно ввести дифференцирование под знак интеграла, чтобы получить для $q\in U$,

$$\bar\partial_l f(q)=2\int_0^1 s^2\bar\partial_l[\partial_l u(sq)]q ds+\int_0^1 s^2\{\partial_l u(sq)+e_i\partial_l u(sq)e_i\}ds+2\int_0^1 s^2\bar\partial_l u(sq)ds.$$

Но $\bar\partial_l[\partial_l u(sq)]=\frac{1}{4}s\triangle u(sq)=0$, так как u – гармоническая в U, и

$$\begin{aligned} \partial_l u(sq)+e_i\partial_l u(sq)e_i &= -\,2\overline{\partial_l u(sq)} \\ &= -\,2\bar\partial_l u(sq) \end{aligned}$$

так как u – действительная. Отсюда $\bar\partial_l f=0$ в U и следовательно f – регулярная. □

Если область U является звездной, относительно не начала координат, а какой-то другой точки a, формулы (5.1) и (5.2) должны быть применены для измененного начала координат так:

$$f(q)=u(q)+2Pu\int_0^1 s^2\partial_l u((1-s)a+sq)(q-a)ds \tag{5.3}$$

$$=2\int_0^1 s^2\partial_l u((1-s)a+sq)(q-a)ds+2\int_0^1 su((1-s)a+sq)ds. \tag{5.4}$$

Пример, который, как можно надеяться, будет важным в случае функции

$$u(q)=|q|^{-2}.$$

Это элементарная потенциальная функция в четырех измерениях, подобно $\log|z|$ на комплексной плоскости, и таким образом, регулярная функция, действительная часть которой равна $|q|^{-2}$, является аналогом логарифма комплексной переменной.

Возьмем в качестве U всю $\mathbb{H}$, исключая начало координат и отрицательную часть вещественной оси. Тогда U является звездной по отношению к 1, и $|q|^{-1}$ – гармоническая в U. Положим

$$u(q)=\frac{1}{|q|^2},\qquad \partial_l u(q)=\frac{q^{-1}}{|q|^2},\qquad a=1;$$

тогда (5.3) дает

$$\left.\begin{aligned} f(q) &= -(qPu\,q)^{-1}-\frac{1}{|Pu\,q|^2}\arg q \quad \text{если} Pu\,q\neq 0 \\ &= \frac{1}{|q|^2}\quad \text{если } q \text{ действительная и положительная,} \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

где

$$\arg q = \log(Un\, q) = \frac{Pu\, q}{|Pu\, q|}\tan^{-1}\left(\frac{|Pu\, q|}{Re\, q}\right), \tag{5.6}$$

который равен i, умноженному на обычный аргумент на комплексной плоскости, порожденный q. (На практике формулы (5.3) и (5.4) не особенно удобны для использования и проще получить (5.5), решая уравнения

$$\nabla.\mathbf{F} = -\frac{2t}{(t^2+r^2)^2}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{F} = \frac{2\mathbf{r}}{(t^2+r^2)^2},$$

где $t = Re\, q$, $\mathbf{r} = Pu\, q$ и $r = |\mathbf{r}|$ – здесь выражают тот факт, что $\mathbf{F} : \mathbb{H} \to P$ чисто кватернионная часть регулярной функции, чья реальная часть равна $|\, q|^{-2}$, и допуская, что $\mathbf{F}$ имеет форму $F(r)\mathbf{r}$.)

Обозначим функцию (5.5) через $-2L(q)$. Производная от $L(q)$ может быть наиболее просто подсчитана при записи ее в форме

$$L(q) = -\frac{r^2 + te_ix_i}{2r^2(r^2+t^2)} + \frac{e_ix_i}{2r^3}\tan^{-1}\left(\frac{r}{t}\right); \tag{5.7}$$

в результате получается

$$\partial_l L(q) = G(q) = \frac{q^{-1}}{|\, q|^2}. \tag{5.8}$$

Тогда $L(q)$ есть первообразная для функции, содержащейся в интегральной формуле Коши-Фютера, точно так же, как комплексный логарифм является первообразной для z^{-1}, – функции, содержащейся в интегральной формуле Коши.

Теорема 4 показывает, что регулярных функций кватернионной переменной существует столько же, сколько существует гармонических функций 4-х действительных переменных. Однако, эти функции не включают простые алгебраические функции, такие как степени переменных, которые оказываются аналитическими функциями в случае комплексной переменной. Фютер (**4**) также нашел метод создания регулярной функции кватернионной переменной из аналитической функции комплексной переменной.

Пусть для каждого $q \in \mathbb{H}$ $\eta_q : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ является вложением комплексных чисел в кватернионы, таким, что q есть изображение комплексного числа $\zeta(q)$ лежащего в верхней полуплоскости; то есть

$$\eta_q(x+iy) = x + \frac{Pu\, q}{|Pu\, q|}y, \tag{5.9}$$

$$\zeta(q) = Re\, q + i|Pu\, q|. \tag{5.10}$$

Тогда имеем

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналитическая в открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}$ и определим $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ посредством*

$$\tilde{f}(q) = \eta_q \circ f \circ \zeta(q). \tag{5.11}$$

Тогда $\triangle\tilde{f}$ регулярна на открытом множестве $\zeta^{-1}(U) \subseteq \mathbb{H}$ и ее производная равна

$$\partial_l(\triangle\tilde{f}) = \triangle\tilde{f}', \tag{5.12}$$

где f' – производная комплексной функции f.

Для доказательства рассмотрим (**7**). Заметим, что если записать $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, $t = Re\,q$ и $r = Pu\,q$, то

$$\tilde{f}(q) = u(t,r) + \frac{Pu\,q}{r}v(t,r), \tag{5.13}$$

$$\triangle\tilde{f}(q) = \frac{2u_2(t,r)}{r} + \frac{2Pu\,q}{r}\left\{\frac{u_2(t,r)}{r} - \frac{u(t,r)}{r^2}\right\}, \tag{5.14}$$

где нижний индекс 2 означает дифференцирование по второму аргументу.

Функции формы $\tilde{f}$ были взяты как базис в альтернативной теории функций кватернионной переменной Куллена (**15**). Представляют интерес следующие примеры: когда

$$f(z) = z^{-1}, \qquad \triangle\tilde{f}(q) = -4G(q); \tag{5.15}$$

когда

$$f(z) = \log z, \qquad \triangle\tilde{f}(q) = -4L(q); \tag{5.16}$$

Взяв регулярную функцию f, можно сконструировать из нее остальные регулярные функции составлением и применением к ней конформных преобразований. В особенно полезны частные случаи инверсии и вращения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. (i) *Дана функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, пусть $If : \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H}$ – функция*

$$If(q) = \frac{q^{-1}}{|\,q|^2}f(q^{-1}). \tag{5.17}$$

Если f регулярна в q^{-1}, то If – регулярна в g.

(ii) *Дана функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и постоянные кватернионы a, b, пусть $M(a,b)f$ – функция*

$$[M(a,b)f](q) = bf(a^{-1}qb). \tag{5.18}$$

Если f регулярна в $a^{-1}qb$, то $M(a,b)f$ – регулярна в q.

Доказательство. (i) Согласно утверждению 4, достаточно показать, что

$$Dq \wedge d(If)_q = 0.$$

Теперь $If = G(f \circ i)$, где $G(q) = q^{-1}/|\,q|^2$ и $i : \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H}$ есть инверсия $q \longmapsto q^{-1}$. Отсюда

$$\begin{aligned} Dq \wedge d(If)_q &= Dq \wedge dG_q f(q^{-1}) + Dq \wedge G(q)d(f \circ i)_q \\ &= DqG(q) \wedge i_q^* df_{q^{-1}} \end{aligned}$$

так как G – регулярна в $q \neq 0$. Но

$$\begin{aligned} i_q^* Dq(h_1,h_2,h_3) &= Dq(-q^{-1}h_1q^{-1}, -q^{-1}h_2q^{-1}, -q^{-1}h_3q^{-1}) \\ &= -\frac{q^{-1}}{|q|^4}Dq(h_1,h_2,h_3)q^{-1} \end{aligned}$$

согласно (2.31). Тогда

$$DqG(q) = -|q|^2 q i_q^* Dq$$

и таким образом

$$Dq \wedge d(If)_q = i_q^*(Dq \wedge df_{q^{-1}}) = 0$$

если f регулярна в q^{-1}.

(ii) Пусть $\mu : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ является отображением $q \longmapsto aqb$. Тогда согласно (2.31)

$$\mu^* Dq = |\,a|^2 |b|^2 a Dq b$$

и таким образом

$$\begin{aligned} Dq \wedge d[M(a,b)f]_q &= Dq \wedge b\mu_q^* df_{\mu(q)} \\ &= |\,a|^{-2}|b|^{-2}a^{-1}(\mu_q^* Dq)b^{-1} \wedge b\mu_q^* df_{\mu(q)} \\ &= |\,a|^{-2}|b|^{-2}a^{-1}\mu_q^*(Dq \wedge df_{\mu(q)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

если f регулярна в $\mu(q)$. Из Утверждения 4 следует, что $M(a,b)f$ регулярна в q. $\square$

Общее конформное преобразование одноточечного компактного расширения (one-point compactification) $\mathbb{H}$ имеет форму

$$\nu(q) = (aq + b)(cq + d)^{-1} \tag{5.19}$$

где $a^{-1}b \neq c^{-1}d$. Такое преобразование ((**16**), стр. 312) является результатом последовательных преобразований вида, рассмотренного в Утверждении 5, совместно с преобразованиями $q \longmapsto q + a$ (которое с очевидностью сохраняет регулярность). Соответствующее преобразование регулярных функций следует из:

ТЕОРЕМА 6. *Задана функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и конформное преобразование ν как в (5.19), и пусть $M(\nu)f$ – функция*

$$[M(\nu)f](q) = \frac{1}{|b - ac^{-1}d|^2} \frac{(cq+d)^{-1}}{|cq+d|^2} f(\nu(q)).$$

Если f регулярна в $\nu(q)$, то $M(\nu)f$ регулярна в q.

6. Однородные регулярные функции

В этом разделе мы будем изучать взаимосвязь между регулярными полиномами, гармоническими полиномами и гармоническим анализом на группе S единичных кватернионов, который для кватернионного анализа является тем же, что Фурье анализ для комплексного анализа.

Базисные Фурье функции $e^{in\theta}$ и $e^{-in\theta}$ рассматриваются как функции на единичной окружности комплексной плоскости, каждая из них имеет два расширения к гармоническим функциям на $\mathbb{C} - \{0\}$; таким образом мы имеем четыре функции $z^n, \bar{z}^n, z^{-n}$ и $\bar{z}^{-n}$. Требование аналитичности отбирает половину из них, а именно z^n и z^{-n}. Таким же образом, все базисные гармонические функции на S, а именно матричные элементы матрицы унитарных неприводимых представлений S, имеют два расширения к гармоническим функциям на $\mathbb{H} - \{0\}$, одно с отрицательной степенью однородности и одно с положительной степенью. Мы увидим, что функциональное пространство, принадлежащее к частному унитарному представлению, соответствующему пространству комбинаций $e^{in\theta}$ и $e^{-in\theta}$ для частного значения n, может быть разложено на два взаимно дополнительных подпространства; одно (подобно $e^{in\theta}$) дает регулярную функцию на $\mathbb{H} - \{0\}$ когда умножается на положительную степень $|\,q|$, другое (подобно $e^{-in\theta}$) должно быть умножено на отрицательную степень $|\,q|$.

Пусть U_n – множество функций $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H} - \{0\}$, которые регулярны и однородны степени n на $\mathbb{R}$, т. е.

$$f(\alpha q) = \alpha^n f(q) \qquad \text{для} \alpha \in R.$$

Перенос начала координат из области f дает возможность рассмотреть оба случая: положительного и отрицательного n (альтернативная процедура добавления точки на бесконечности к $\mathbb{H}$ наталкивается на трудности, поскольку регулярные полиномы не обязательно допускают непрерывное расширение к $\mathbb{H} \cup \{\infty\} \cong S^4$). Пусть W_n – множество функций $f : \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H}$ которые гармоничны и однородны степени n на R. Тогда U_n и W_n являются правыми векторными пространствами над $\mathbb{H}$ (с поточечным сложением и скалярным умножением) и, так как каждая регулярная функция является гармонической, мы имеем $U_n \subseteq W_n$.

Функции в U_n и W_n могут быть изучены посредством их ограничения на единичную сферу $S = \{q : |\,q| = 1\}$. Пусть

$$\tilde{U}_n = \{f|S : f \in U_n\}, \qquad \tilde{W}_n = \{f|S : f \in W_n\};$$

где U_n и $\tilde{U}_n$ – изоморфны (как кватернионные векторные пространства) в силу соответствия

$$f \in U_n \Leftrightarrow \tilde{f} \in \tilde{U}_n, \quad \text{где} \quad f(q) = r^n \tilde{f}(u), \tag{6.1}$$

используя обозначение $r = |\,q| \in \mathbb{R}$, $u = q/|\,q| \in S$.

Аналогично, изоморфны W_n и $\tilde{W}_n$.

Чтобы выразить уравнения Коши-Римана-Фютера в форме, подходящей для полярного разложения $q = ru$, введем следующие векторные поля $X_0, \ldots, X_3$ на $\mathbb{H} - \{0\}$:

$$X_0 f = \frac{d}{d\theta}[f(qe^{\theta})]_{\theta=0}, \tag{6.2}$$

$$X_i f = \frac{d}{d\theta} f[q \exp(e_i\theta)]_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} f[q(\cos\theta + e_i \sin\theta)]_{\theta=0} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{6.3}$$

Эти поля формируют базис для действительного векторного пространства левоинвариантных векторных полей на мультипликативной группе в $\mathbb{H}$, и они относятся к декартовым векторным полям $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x_i$ как

$$X_0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{6.4}$$

$$X_i = -x_i \frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{r^2}(tX_0 - x_i X_i), \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{r^2}(\epsilon_{ijk} x_j X_k + tX_i + x_i X_0). \tag{6.7}$$

Их скобки Ли равны

$$[X_0, X_i] = 0, \tag{6.8}$$

$$[X_i, X_j] = 2\epsilon_{ijk} X_k. \tag{6.9}$$

Используя (6.6) и (6.7), дифференциальные операторы $\bar{\partial}_l$ и $\triangle$ могут быть вычислены в терминах X_0 и X_i. Результат равен

$$\bar{\partial}_l = \frac{1}{2}\bar{q}^{-1}(X_0 + e_i X_i), \tag{6.10}$$

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\{X_i X_i + X_0(X_0+2)\}. \tag{6.11}$$

Следующие факты относительно пространства гармонических функций W_n хорошо известны (и следуют из (6.11); смотри например (**17**), стр. 71):

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. (i) $\tilde{W}_n \cong \tilde{W}_{-n-2}$. (ii) $\dim W_n = (n+1)^2$. (iii) *Элементы* W_n *являются полиномами в* q.

Мы можем теперь установить основные факты относительно пространства U_n регулярных функций:

ТЕОРЕМА 7. (i) $\tilde{W}_n = \tilde{U}_n \oplus \tilde{U}_{-n-2}$. (ii) $U_n \cong U_{-n-3}$. (iii) $\dim U_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Доказательство. (i) Уравнение (6.10) показывает, что элементы U_n, которые удовлетворяют $X_0 f = nf$ и $\bar{\partial}_l f = 0$, являются собственными функциями $\Omega = e_i X_i$ с собственными значениями $-n$. Так как векторные поля X_i являются касательными к сфере S, Ω может рассматриваться как оператор на $\tilde{W}_n$, и $\tilde{U}_n$ состоит из собственных функций из Ω с собственным значением $-n$. Используя (6.9), можно показать, что

$$\Omega^2 - 2\Omega + X_i X_i = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{f} \in \tilde{W}_n &\Rightarrow \triangle(r^n f) = 0\\ &\Rightarrow X_i X_i f = -n(n+2)f\\ &\Rightarrow (\Omega - n - 2)(\Omega + n)f = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{W}_n$ является прямой суммой собственных пространств из $\tilde{\Omega}$ с собственными значениями $-n$ и $n+2$ (они являются векторными подпространствами $\tilde{W}_n$, так как собственные значения действительны), т. е.

$$\tilde{W}_n = \tilde{U}_n \oplus \tilde{U}_{-n-2}.$$

(ii) Из утверждения 5 (i) следует, что отображение I является изоморфизмом между U_n и U_{-n-3}.

(iii) Пусть $d_n = \dim U_n$. Согласно (i) и Утверждению 6 (ii)

$$d_n + d_{-n-2} = (n+1)^2$$

и по (ii),

$$d_{-n-2} = d_{n-1}.$$

Тогда

$$d_n + d_{n-1} = (n+1)^2.$$

Решение этого рекурсивного отношения с $d_0 = 1$, есть

$$d_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \ \Box$$

Существует связь между Утверждением 5 (ii) и тем фактом, что однородные регулярные функции являются собственными функциями Ω. Утверждение 5 (ii) относится к представлению M группы $\mathbb{H}^\times \times \mathbb{H}^\times$, определенной на пространстве действительно-дифференцируемых функций $f : \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H}$ посредством

$$[M(a,b)f](q) = bf(a^{-1}qb).$$

Ограничиваясь подгруппой $\{(a,b) : |a| = |b| = 1\}$, которая изоморфна к

$$SU(2) \times SU(2),$$

мы получаем представление $SU(2) \times SU(2)$. Так как отображение $q \longmapsto aqb$ является вращением при $|a| = |b| = 1$, множество W гармонических функций есть инвариантное подпространство в этом представлении. Теперь $W = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} W^C$, где W^C – множество комплекснозначных гармонических функций, и представление $SU(2) \times SU(2)$ может быть записано как

$$M(a,b)(q \otimes f) = (bq) \otimes R(a,b)f$$

где R обозначает квазирегулярное представление, соответствующее действию $q \longmapsto aqb^{-1}$ из $SU(2) \times SU(2)$ на $\mathbb{H} - \{0\}$:

$$[R(a,b)f]q = f(a^{-1}qb).$$

Поэтому $M|W$ есть тензорное произведение представлений $D^0 \times D^1$ и $R|W^C$ из $SU(2) \times SU(2)$, где D^n обозначает $(n+1)$-мерное комплексное представление $SU(2)$. Изотипичные компоненты $R|W^C$ являются однородными подпространствами W_n^C, на которых R действует неприводимо как $D^n \times D^n$. Таким образом, W_n является инвариантным подпространством в представлении M, и $M|W_n$ есть тензорное произведение $(D^0 \times D^1) \otimes (D^n \times D^n)$. W_n следовательно имеет два инвариантных подпространства, на которых M действует как неприводимое представление $D^n \times D^{n+1}$ и $D^n \times D^{n-1}$. Эти подпространства являются собственными пространствами Ω. Чтобы увидеть это, сосредоточим внимание на втором факторе в $SU(2) \times SU(2)$; мы имеем представление

$$M'(b)(q \otimes f) = M(1,b)(q \otimes f) = [D^1(b)q] \otimes [R(1,b)f],$$

где $D^1(b)q = bq$. Бесконечномалые генераторы представления $R(1,b)$ равны дифференциальным операторам X_i; бесконечномалые генераторы $D^1(b)$ равны e_i (под ними мы подразумеваем левое умножение на e_i). Поэтому бесконечномалые операторы тензорного произведения M' равны $e_i + X_i$. Изотипичные компоненты W являются собственными пространствами оператора Казимира

$$(e_i + X_i)(e_i + X_i) = e_i e_i + X_i X_i + 2\Omega.$$

Но $e_i e_i = -3$, и $X_i X_i = -n(n+2)$ на W_n; следовательно

$$(e_i + X_i)(e_i + X_i) = 2\Omega - n^2 - 2n - 3.$$

и таким образом, изотипичные компоненты W_n для представления M' являются собственными пространствами Ω. U_n, пространство однородных регулярных функций степени n, имеет собственное значение $-n$ для Ω, так что $M'|U_n$ есть представление D^{n+1} для $SU(2)$.

Аналогичное рассмотрение приводит к следующему факту:

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Если f регулярна, то qf – гармонична.*

Представление M $SU(2) \times SU(2)$ может также быть использовано для нахождения базиса регулярных полиномов. Оно принадлежит к классу индуцированных представлений, изучавшихся в (**18**), где процедура дана для разбиения представления на неприводимые компоненты и нахождения базиса для каждой компоненты.

Вместо того, чтобы дать строгий эвристический вывод, следуя этой процедуре, которая мало что в этом случае разъясняет, мы установим результат и затем проверим, что он является базисом.

Так как рассматриваемые функции содержат множество факториалов, мы введем обозначение

$$\begin{aligned} z^{[n]} &= \frac{z^n}{n!} \quad \text{если} \quad n \geq 0 \\ &= 0 \qquad \text{если} \quad n < 0 \end{aligned}$$

для комплексной переменной z. Это обозначение позволяет ввести удобную формулу

$$\frac{d}{dz} z^{[n]} = z^{[n-1]}, \tag{6.12}$$

$$(z_1 + z_2)^{[n]} = \sum_r z_1^{[r]} z_2^{[n-r]} \tag{6.13}$$

где сумма производится по всем целым r.

Представление D^n из $S \cong SU(2)$ действует на пространстве однородных полиномов степени n от двух комплексных переменных посредством

$$[D^n(u)f](z_1, z_2) = f(z_1', z_2'),$$

где

$$z_1' + jz_2' = u^{-1}(z_1 + jz_2).$$

Записав $u = v + jw$, где $v, w \in \mathbb{C}$ и $|v|^2 + |w|^2 = 1$, мы имеем

$$z_1' = \bar{v} z_1 + \bar{w} z_2, \qquad z_2' = -wz_1 + vz_2.$$

Отсюда матричные элементы $D^n(u)$, соответствующие базису $f_k(z_1, z_2) = z_1^{[k]} z_2^{[n-k]}$ равны

$$D^n_{kl}(u) = (-)^n k!(n-k)! P^n_{kl}(u),$$

где

$$P^n_{kl}(v + jw) = \sum_r (-)^r v^{[n-k-l+r]} \bar{v}^{[r]} w^{[k-r]} \bar{w}^{[l-r]}. \tag{6.14}$$

Функции $P^n_{kl}(q)$ определены для всех кватернионов $q = v + jw$ и для всех целых k, l, n, но они равны нулю при $0 \leq k, l \leq n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *В качестве правого векторного пространства над* $\mathbb{H}$, U_n *имеет базис*

$$Q^n_{kl}(q) = P^n_{kl}(q) - jP^n_{k-1,l}(q) \qquad (0 \leq k, l \leq n).$$

Доказательство. Используя (6.14), легко проверить, что Q^n_{kl} удовлетворяет уравнениям Коши-Римана-Фютера в форме (3.11)

$$\frac{\partial P^n_{kl}}{\partial \bar{v}} = -\frac{\partial P^n_{k-1,l}}{\partial \bar{w}}, \qquad \frac{\partial P^n_{kl}}{\partial w} = \frac{\partial P^n_{k-1,l}}{\partial v}.$$

Так как функции D^n_{kl} независимы над $\mathbb{C}$ как функции на S для $0 \leq k, l \leq n$, функции P^n_{kl} – независимы над $\mathbb{C}$ как функции на $\mathbb{H}$ для $0 \leq k, l \leq n$. Следовательно, функции Q^n_{kl} $(0 \leq k \leq n+1,\ 0 \leq l \leq n)$ независимы над $\mathbb{C}$ и поэтому покрывают правое векторное пространство над $\mathbb{H}$ размерности как минимум $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Так как это пространство есть подпространство U_n, которое имеет размерность $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, Q^n_{kl} покрывает U_n.

Так как $zj = j\bar{z}$ для любого $z \in \mathbb{C}$, из определения (6.14) следует, что

$$P^n_{kl} j = j P^n_{n-k,n-l}$$

и следовательно

$$Q^n_{kl} j = Q^n_{n-k+1,n-l}.$$

Тогда U_n охватывается Q^n_{kl} $(0 \le k \le l \le n)$, которые следовательно формируют базис для U_n. $\square$

Другой базис для U_n будет дан в следующем разделе.

Мы завершаем этот раздел изучением кватернионной производной ∂_l. Так как ∂_l есть линейное отображение из U_n в U_{n-1} и $\dim U_n > \dim U_{n-1}$, ∂_l должно иметь большое ядро и поэтому мы не можем сделать вывод из $\partial_l f = 0$, что f – константа. Однако, хотя результат отнюдь не однозначен, возможно проинтегрировать регулярные полиномы:

ТЕОРЕМА 8.*Каждый регулярный полином имеет первообразную, то есть ∂_l отображает U_n на U_{n-1} при $n > 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f \in U_n$ – такая, что $\partial_l f = 0$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Таким образом, f может быть рассмотрена как функция на пространстве P чисто мнимых кватернионов. Используя векторные обозначения для элементов из P и записывая $f = f_0 + \mathbf{f}$ с $f_0 \in \mathbb{R}$, $f \in P$, условие $e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ превращается в

$$\nabla f_0 + \nabla \times \mathbf{f} = 0, \qquad \nabla.\mathbf{f} = 0.$$

Если $n \ge 0$, можно определить $f(0)$ так, что эти условия будут справедливы на всем P, и поэтому существует функция $\mathbf{F} : P \to P$ такая, что

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{F}, \qquad f_0 = -\nabla.\mathbf{F},$$

то есть

$$f = e_i \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}.$$

Тогда $\mathbf{F}$ – гармоническая, т. е. $\nabla^2 \mathbf{F} = 0$.

Пусть T_n – правое кватернионное векторное пространство функций $\mathbf{F} : P \to \mathbb{H}$, однородных степени n и удовлетворяющих $\nabla^2 \mathbf{F} = 0$; тогда $\dim T_n = 2n+1$. Пусть K_n – подпространство T_n, состоящее из функций, удовлетворяющих $e_i \partial \mathbf{F}/\partial x_i = 0$; тогда $K_n = \ker \partial_l \subset U_n$. Выше показано, что $e_i \partial/\partial x_i : T_{n+1} \to T_n$ отображает T_{n+1} в K_n; его ядро есть K_{n+1} и таким образом,

$$\dim K_n + \dim K_{n+1} = \dim T_{n+1} = 2n+3.$$

Решение этого рекурсивного соотношения, с $\dim K_0 = 1$, есть $\dim K_n = n+1$. Но

$$\dim U_n - \dim U_{n-1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = n+1.$$

Из этого следует, что ∂_l отображает U_n в U_{n-1}. $\square$

ТЕОРЕМА 9. *Если $n < 0$, отображение $\partial_l : U_n \to U_{n-1}$ является взаимно однозначным.*

Доказательство. Введем следующее скалярное произведение между функциями, определенными на единичной сфере S:

$$\langle f, g\rangle = \int_S \overline{f(u)} g(u) du$$

где du обозначает меру Хаара на группе S, нормированную так, что

$$\int_S du = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Для функций, определенных на $\mathbb{H}$, можно записать его в виде

$$\langle f, g\rangle = \int_S \overline{f(q)} q^{-1} Dq g(q).$$

Как отображение, $U_n \times U_n \to H$, оно антилинейно по первой переменной и линейно по второй, то есть

$$\langle fa, gb\rangle = \bar{a}\langle f, g\rangle b \qquad \text{для всех}\, a, b \in \mathbb{H}$$

и является невырожденным, поскольку $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Теперь пусть $f \in U_n, g \in U_{-n-2}$ и пусть I обозначает отображение $U_n \to U_{-n-3}$, определенное в Утверждении 5 (i). Тогда

$$\begin{aligned}\langle g, I\partial_l f\rangle &= \int_S \overline{g(q)} q^{-1} Dq g^{-1} \partial_l f(q^{-1}) \\ &= -\int_S \overline{g(q)} i^*(Dq\partial_l f),\end{aligned}$$

где i обозначает отображение $q \longmapsto q^{-1}$, и мы использовали тот факт, что $i^* Dq = -q^{-1}Dqg^{-1}$ для $q \in S$. Так как f регулярна, $Dq\partial_l f = \frac{1}{2}d(dq \wedge dqf)$ и таким образом

$$\begin{aligned}\langle g, I\partial_l f\rangle &= -\frac{1}{2}\int_S \overline{g(q)} d[i^*(dq \wedge dqf)] \\ &= \frac{1}{2}\int_S \overline{dg} \wedge i^*(dq \wedge dqf), \quad \text{так как} \quad \partial S = 0.\end{aligned}$$

На S инверсия i совпадает с объединением кватернионов; отсюда $i^* dq = d\bar{q}$ и поэтому

$$\begin{aligned}\langle g, I\partial_l f\rangle &= \frac{1}{2}\int_S \bar{g}(q) \wedge d\bar{q} \wedge d\bar{q} f(q^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}\int_S \overline{dg \wedge dq \wedge dq} f(q^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}\int_S \overline{Dq \wedge \partial_l g(q)} f(q^{-1})\end{aligned}$$

так как g – регулярная функция. Так как сопряжение есть ортогональное преобразование с детерминантом -1, $Dq(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3) = -\overline{Dq(h_1, h_2, h_3)}$; следовательно, поскольку сопряжение – это то же самое, что инверсия на S,

$$\overline{Dq} = -i^* Dq = q^{-1} Dq q^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle g, I\partial_l f\rangle &= \int_S \overline{\partial_l g(q)} q^{-1} Dq g^{-1} f(q^{-1}) \\ &= \langle \partial_l g, If\rangle.\end{aligned}$$

Но I является изоморфизмом, а скалярное произведение невырождено на U_{-n-2}, и ∂_l отображает U_{-n-2} в U_{-n-3} если $n \leq 3$; отсюда следует, что $\partial_l : U_n \to U_{n-1}$ взаимно однозначно. $\square$

В пропущенных случаях $n = -1$ и $n = -2$, обе теоремы 8 и 9 справедливы тривиально, так как $U_{-1} = U_{-2} = \{0\}$.

7. Регулярные степенные ряды

Степенные ряды, представляющие регулярную функцию, и ряды Лорана, представляющие функцию с изолированной особенностью, наиболее естественно выражаются в терминах некоторых специальных однородных функций.

Пусть ν – неупорядоченное множество n целых $\{i_1, \dots, i_n\}$ с $1 \leq i \leq 3$; ν может также быть задано посредством трех целых n_1, n_2, n_3 с $n_1 + n_2 + n_3 = n$, где n_1 – количество первого в ν, n_2 – количество второго и n_3 – третьего, и мы будем писать $\nu = [n_1 n_2 n_3]$. Существуют $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ таких множеств ν; обозначим множество всех их как σ_n. Они могут быть использованы как метки; когда $n = 0$, так что $\nu = \emptyset$, мы будем использовать нижний индекс 0 вместо $\emptyset$. Запишем ∂_ν для n-го порядка дифференциального оператора

$$\partial_\nu = \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial^n}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3}}.$$

Исследуемые функции есть

$$G_\nu(q) = \partial_\nu G(q) \tag{7.1}$$

и

$$P_\nu(q) = \frac{1}{n!} \sum (te_{i_1} - x_{i_1}) \dots (te_{i_n} - x_{i_n}), \tag{7.2}$$

где сумма берется по всем $n!/(n_1! n_2! n_3!)$ различных порядков n_1 – первого, n_2 – второго и n_3 – третьего. Тогда P_ν является однородной степени n и G_ν – однородна степени $-n-3$.

Как в предыдущем разделе, U_n будет обозначать правое кватернионное векторное пространство однородных регулярных функций степени n.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Полиномы $P_\nu(\nu \in \sigma_n)$ являются регулярными и формируют базис для U_n.*

Доказательство. (**17**) Пусть f – регулярный однородный полином степени n. Так как f – регулярная,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

и так как она однородная,

$$t \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf(q).$$

Отсюда

$$nf(q) = \sum_i (x_i - te_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Но $\partial f/\partial x_i$ является регулярной и однородной степени $n-1$, так что мы можем повторно применить рассуждение; после n шагов получим

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{n!}\sum_{i_1\ldots i_n}(x_{i_1}-te_{i_1})\ldots(x_{i_n}-te_{i_n})\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_n}} \\ &= \sum_{\nu\in\sigma_n}(-1)^n P_\nu(q)\partial_\nu f(q). \end{aligned}$$

Так как f – полином, $\partial_\nu f$ – константа; поэтому любой регулярный однородный полином является линейной комбинацией P_ν. Пусть V_n – правое векторное пространство, покрытое P_ν. Согласно утверждению 6 (iii), элементы из U_n являются полиномами, так $U_n \subseteq V_n$, но

$$\dim V_n \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \dim U_n$$

по Теореме 7 (iii). Отсюда $V_n = U_n$. $\square$

Зеркальное отражение этого рассуждения доказывает, что P_ν является также право-регулярным.

Так же, как для комплексного переменного, мы имеем

$$(1-q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

для $|q|<1$; ряды сходятся абсолютно и равномерно на любом шаре $|q|\leq r$ с $r<1$. Это приводит к разложению $G(p-q)$ по степеням $p^{-1}q$; отождествляя его с рядами Тейлора G около p, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Разложения*

$$\begin{aligned} G(p-q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu\in\sigma_n} P_\nu(q)G_\nu(p) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu\in\sigma_n} G_\nu(p)P_\nu(q) \end{aligned}$$

корректны (valid) для $|q|<|p|$*; ряды сходятся равномерно в любой области* $\{(p,q): |q|\leq r|p|\}$ *из* $\mathbb{H}^2$ *с* $r<1$.

Теперь те же рассуждения, что и в комплексном анализе, дают:

ТЕОРЕМА 10. *Предположим, что f – регулярная функция вблизи 0. Тогда существует шар B с центром в 0, в котором $f(g)$ представима в виде равномерно сходящихся рядов*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu\in\sigma_n} P_\nu(q)q_\nu.$$

где коэффициенты a_ν даются выражением

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial B} G_\nu(q)Dqf(q) \\ &= (-1)^n\partial_\nu f(0). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ.

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_S G_\mu(q)DqP_\nu(q) = \delta_{\mu\nu},$$

где S – любая сфера, содержащая начало координат.

ТЕОРЕМА 11 *(Ряды Лорана). Предположим, что f – регулярная функция на открытом множестве U за исключением, быть может, $q_0 \in U$. Тогда существует окрестность N точки q_0, такая, что если $q \in N$ и $q \neq q_0$, $f(q)$ может быть представлена в виде ряда*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu\in\sigma_n}\{P_\nu(q-q_0)a_\nu + G_\nu(q-q_0)b_\nu\}$$

который сходится равномерно в любом полом шаре

$$\{q : r \leq |q-q_0| \leq R\}, \quad \text{с} \quad r > 0, \quad \text{который лежит внутри } N.$$

Коэффициенты a_ν и b_ν задаются посредством

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi^2}\int_C G_\nu(q-q_0)Dqf(q),$$

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi^2}\int_C P_\nu(q-q_0)Dqf(q),$$

где C – любая замкнутая 3-цепь в $U - \{q_0\}$, которая гомологична ∂B для некоторого шара с $q_0 \in B \subset U$ (так что C имеет число оборотов 1 вокруг q_0).

Я признателен за гостеприимство кафедре прикладной математики и теоретической физики Ливерпульского университета, где была сделана часть этой работы и лично доктору P. J. McCarthy и доктору C. J. S. Clarke за весьма плодотворные дискуссии.

Литература

1. Hamilton W. R. Elements of quaternions (London, Longmans Green, 1866).

2. Tait P. G. An elementary treatise on quaternions (Cambridge University Press, 1867).

3. Joly C. J. A manual of quaternions (London, Macmillan, 1905).

4. Fueter R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\triangle u = 0$ und $\triangle\triangle u = 0$ mit vier reellen Variablen. Comment. Math. Helv. **7** (1935), 307-330.

5. Fueter R. Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen.Comment. Math. Helv. **8** (1936), 371-378.

6. Haefeli H. Hyperkomplexe Differentiale.Comment. Math. Helv. **20** (1947), 382-420.

7. Deavours C. A. The quaternion calculus. Amer.Math.Monthly **80** (1973), 995-1008.

8. Schuler B. Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionen-Variablen. Comment. Math. Helv. 10 (1937), 327-342.

9. Fueter R. Die Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionen-variablen.Comment. Math. Helv. **9** (1937), 320-335.

10. Porteous I. R. Topological geometry (London, Van Nostrand Reinhold,1969).

11. Cartan H. Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables (London, Addison-Wesley, 1963).

12. Herv É M. Several complex variables (Oxford University Press, 1963).

13. Heins M. Complex functio theory (London, Academic Press, 1968).

14. Titchmarsh E. C. The theory of functions, 2nd ed. (Oxford University Press, 1939).

15. Cullen C. G. An integral theorem for analitic intrinsic functions on quaternions. Duke Math. J. **32**(1965), 139-148.

16. Schouten J. A. Ricci-calculus, 2nd ed. (Berlin, Springer-Verlag, 1954).

17. Sugiura M. Unitary representations and harmonic analysis (London, Wiley, 1975).

18. McCarthy P. J. and Sudbery, A. Harmonic analysis of generalised vector functions, generalised spin-weighted functions and induced representations. J. Phys. **A 10** (1977), 331-338.