АЛГЕБРА С ДЕЛЕНИЕМ, ОБОБЩЕННЫЕ СУПЕРСИММЕТРИИ И ОКТОНИОННАЯ М-ТЕОРИЯ[1]

Ф. Топпан

CBPF – CCP, Rio de Janeiro, Brazil
toppan@cbpf.br

Данная работа освещает исследования, проводимые автором и его коллегами, направленные на изучение взаимоотношения между понятиями алгебр с делением, представлений алгебр Клиффорда, обобщенных суперсимметрий с введением альтернативного описания М-алгебры в терминах неассоциативных октонионных структур . Излагаемые результаты были представлены на конференции "Число, время и относительность", проходившей в Техническом Университете им. Баумана (Москва) в августе 2004 года.

Введение

В наши дни программа объединения, нацеленная на общее описание известных взаимодействий совместно с непротиворечивой квантовой формулировкой гравитации, в основном возлагает надежду на многомерные суперсимметричные теории. На данный момент, самой многообещающей, но, в то же время, остающейся лишь гипотетической, является теория, рассматриваемая в одиннадцатимерных пространствах, которая носит имя М-теории [1]. Требования теоретической (и феноменологической) согласованности, накладываемые на любого допустимого кандидата на роль объединенной теории, обязательно приводят к систематическому исследованию свойств алгебр Клиффорда и спиноров в пространстве-времени произвольной размерности и сигнатуры. Обобщенные суперсимметрии, идущие дальше стандартной HŁS схемы [2], допускают существование бозонных абелевых тензорных центральных зарядов, связанных с динамикой расширенных объектов (бран). Со времен работы [3] стало широко известно, что суперсимметрии связаны с алгебрами с делением. На самом деле, даже для обобщенных суперсимметрий, классификационные схемы базируются на ассоциативных алгебрах с делением ($\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$). Несравненно меньше известно относительно оставшейся делимой алгебры октонионов, что связано с осложнениями, проистекающими из неассоциативности. Несмотря на это, октонионная структура была рассмотрена в работах [4, 5] в рамках применения к теории суперструн.

Октонионы возникают не только как курьез. Они представляют собой максимальную алгебру с делением. Уже один этот факт показывает, что октонионы должны занять место, подобное тому, которое занимает, скажем, максимальная супергравитация. Однако, они важны не только поэтому. Октонионы являются сердцевиной многих исключительных структур в математике и ответственны за их существование. Среди этих исключительных структур мы можем упомянуть 5 исключительных алгебр Ли и исключительные йордановы алгебры. На самом деле, алгебра Ли G_2 является группой автоморфизмов октонионов, в то время как F_4 есть группа автоморфизмов 3×3 октонионнозначных эрмитовых матриц, реализующих исключительную йорданову алгебру $J_3(\mathbf{O})$. Алгебра F_4 и оставшиеся исключительные алгебры Ли E_6,

[1] Перевод Р. Михайлова, ред. А. Элиовича.

E_7, E_8 получаются из так называемой "конструкции магического квадрата Титса", которая сопоставляет алгебру Ли любой паре алгебр с делением, в случае если как минимум одна из алгебр этой пары совпадает с октонионной алгеброй [6].

Неоднократно отмечалось ([7, 8]), что исключительные алгебры Ли хорошо соответствуют сценарию Великого объединения. Более того, алгебра Ли E_8 вводит через тензорное произведение $E_8 \times E_8$ теорию гетеротических струн без аномалий, в то время как G_2 голономия семимерных многообразий требуется, на феноменологическом уровне, для создания 4-мерной $N = 1$ суперсимметричной теории поля посредством компактификации одиннадцатимерия. Это лишь часть списка разрозненных доводов (в том числе, см. [8]), наводящих на мысль, что по каким-то глубоким причинам, Природа, похоже, предпочитает исключительные структуры. В данном контексте заслуживает упоминания исключительная йорданова алгебра $J_3(\mathbf{O})$, которая не только связана с единственной последовательной квантово-механической системой (в подходе Йордана, см. [9]), основанной на неассоциативной алгебре, но и также связана с уникальной матричной теорией Черна-Саймонса йорданова типа (см. [10]).

В данной работе я буду обсуждать исследования, изложенные в работах [11, 12], посвященные вопросу возможности реализации общей суперсимметрии в терминах неассоциативной алгебры октонионов. В частности, в работе [11] было показано, что M-алгебра, предположительно обозначающая M-теорию, возникает в двух (и только двух, ввиду отсутствия комплексных и кватернионных структур) вариантах. Помимо стандартной реализации M-алгебры, включающей вещественные спиноры и, следовательно, использующей вещественную структуру, также может использоваться альтернативная формулировка, требующая введения октонионной структуры. Это возможно благодаря существованию октонионного описания алгебры Клиффорда, которое определяет 11-мерное пространство-время Минковского и связанные с ним спиноры. Особенности второго варианта, а именно, октонионной M-супералгебры, озадачивает. Не слишком удивительно, что эта алгебра содержит меньшее число бозонных генераторов, 52, в сравнении с 528-ю в случае стандартной M-алгебры (это, все-таки, можно ожидать, ввиду того, что наложение дополнительной структуры налагает ограничение на теорию). Что действительно является полной неожиданностью, так это появление новых условий, отсутствующих в стандартной M-теории. Эти условия означают, что различные секторы бран более не независимы. Одна октонионная 5-брана содержит целое множество степеней свободы, и следовательно, эквивалентна октонионным секторам $M1$ и $M2$. Символически мы можем записать эту эквивалентность как $M5 \equiv M1 + M2$. Этот результат, действительно, является интригующим. Он означает появление совершенно нетривиальных структур при исследовании октонионных конструкций в M-теории. Весьма заманчиво думать, что упомянутые выше исключительные структуры должны раскрываться более полно с помощью октонионного варианта M-алгебры, нежели с помощью стандартной вещественной M-алгебры.

Другой подход состоит в определении замкнутой алгебраической структуры, реализующей октонионную суперконформную M-алгебру. Получается, что суперконформная алгебра $OSp(1, 64)$ вещественной M-теории заменяется в октонионном случае на супералгебру суперматриц $OSp(1, 8|\mathbf{O})$ с октонионнозначными элементами и общим числом $7 + 232 = 239$ бозонных генераторов.

Об алгебрах Клиффорда

Классификация обобщенных суперсимметрий требует предварительной классификации алгебр Клиффорда, спиноров и их соотношений с алгебрами с делением.

Для замкнутости (самодостаточности) изложения, в данной части работы мы приведем обзор классификации алгебр Клиффорда, связанных с ассоциативными алгебрами с делением **R**,**C**, **H**, следуя работам [13] и [14].

Наиболее общие неприводимые *вещественные* матричные представления алгебры Клиффорда

$$\Gamma^\mu\Gamma^\nu + \Gamma^\nu\Gamma^\mu \ = \ 2\eta^{\mu\nu}, \tag{1}$$

где $\eta^{\mu\nu}$ – диагональная матрица сигнатуры (p,q) (т. е. p положительных $+1$ и q отрицательных -1 диагональных элементов)[1] могут быть классифицированы согласно свойствам самой общей S матрицы, коммутирующей со всеми Γ ($[S,\Gamma^\mu] = 0$ для всех μ). В случае, когда самая общая S матрица является кратной тождественной, мы получаем нормальный (**R**) случай. В противном случае, S может быть суммой двух матриц, вторая из которых является кратным квадратного корня из -1 (что представляет почти комплексный, **C** случай) или линейной комбинацией 4 матриц, замыкающих кватернионную алгебру (это случай **H**). Согласно [13], *вещественные* неприводимые представления **R**, **C**, **H** типа строятся в соответствии со следующей таблицей, элементы которой представляют значения $p - q \ mod \ 8$

R	**C**	**H**
$0,2$		$4,6$
1	$3,7$	5

(2)

Вещественное неприводимое представление всегда единственно при $p-q \ mod \ 8 = 1,5$. В этих сигнатурах представлены два неэквивалентных вещественных представления, второе из которых восстанавливается переключением знака у всех Γ ($\Gamma^\mu \mapsto -\Gamma^\mu$).

Обозначим через $C(p,q)$ неприводимое представление алгебры Клиффорда, соответствующее сигнатуре (p,q). Нормальный (**R**), почти комплексный (**C**) и кватернионный (**H**) типы соответствующих неприводимых представлений алгебры Клиффорда могут также быть рассмотрены следующим образом. В то время, как в **R**-случае, матрицы, реализующие неприводимое представление, обязательно имеют вещественные элементы, в **C**-случае могут использоваться матрицы с комплексными элементами, а в **H**-случае – с кватернионными.

Обсудим простейшие примеры. Алгебра Клиффорда $C(0,1)$ **C**-типа может быть представлена как посредством вещественно-значных 2×2 матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, так и с помощью мнимого числа i.

С другой стороны, алгебра Клиффорда $C(0,3)$ **H**-типа может быть реализована следующим образом:
i) тремя 4×4 вещественно-значными матрицами, заданными с помощью тензорного произведения $\tau_A\otimes\tau_1$, $\tau_A\otimes\tau_2$ и $\mathbf{1}_2\otimes\tau_A$, где матрицы τ_A, τ_1 и τ_2 реализуют вещественное неприводимое представление $C(2,1)$

[1] В рамках данной работы мы будем считать, что положительные собственные значения соотносятся с пространственно-подобными направлениями, а негативные – с времениподобными.

$(\tau_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$,

ii) тремя 2×2 комплексно-значными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$,

iii) тремя мнимыми кватернионами e_i (более детально см. часть **3**).

Формулы в пунктах *i)* и *ii)* представляют вещественное и комплексное представления, соответственно, для мнимых кватернионов. Они могут быть непосредственно расширены для получения вещественных и комплексных представлений алгебр Клиффорда **H**-типа посредством подстановки вместо кватернионных элементов соответствующих представлений (кватернионная единица заменяется в комплексном представлении единичной 2×2 матрицей $\mathbf{1}_2$ и единичной 4×4 матрицей $\mathbf{1}_4$ в вещественном представлении).

Стоит отметить, что в данных сигнатурах $p-q \; mod \; 8 = 0, 4, 6, 7$ без ограничения общности матрицы Γ^μ могут быть выбраны блочно антидиагональными (матрицы обобщенного вейлевского типа), т. е. имеющими форму

$$\Gamma^\mu \; = \; \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Следовательно, в данных сигнатурах возможно ввести вейлевские проективные спиноры, число компонент которых равно половине размера соответствующих Γ-матриц[2].

Очень удобная форма неприводимых представлений алгебр Клиффорда, построенная с помощью алгоритма отбора (в произвольной сигнатуре пространства-времени) представителя (с точностью до смены знака $\Gamma^\mu \leftrightarrow -\Gamma^\mu$) в каждом неприводимом классе представлений гамма-матриц Клиффорда, приведена в работе [14]. Мы приведем и расширим здесь результаты, представленные в [14], устанавливая явную связь между максимальными алгебрами Клиффорда в таблице (6) ниже и свойствами соответствующих алгебр с делением.

Конструкция состоит в следующем. В начале доказывается, что из представления гамма-матриц Клиффорда, соответствующего заданной размерности D пространства-времени, с помощью двух алгоритмов можно рекурсивно построить гамма-матрицы Клиффорда, соответствующие размерности $D+2$ пространства-времени. На самом деле, очень просто проверить, что если γ_i обозначают d-мерные гамма-матрицы $D = p+q$ пространства-времени с сигнатурой (p,q) (обеспечивающие именно представление алгебры Клиффорда $C(p,q)$), то $2d$-мерные $D+2$ гамма-матрицы (обозначаемые как Γ_j) $D+2$ пространства-времени представляются в соответствии с

$$\Gamma_j \; \equiv \; \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ -\mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$$

$$(p,q) \; \mapsto \; (p+1, q+1). \tag{4}$$

[2] Понятие вейлевского спинора, удобное для наших целей, отличается от принятого, связанного с *комплексно*-значными алгебрами Клиффорда и было введено в [14].

или

$$
\Gamma_j \;\equiv\; \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ -\gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ \mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}
$$

$$
(p,q) \;\mapsto\; (q+2,p). \tag{5}
$$

Следует отметить, что три введенные ранее матрицы τ_A, τ_1, τ_2, реализующие алгебру Клиффорда $C(2,1)$ получаются посредством применения либо (4), либо (5) к числу 1, т. е. одномерной реализации $C(1,0)$.

Все алгебры Клиффорда **R**-типа получаются рекурсивным применением алгоритмов (4) и (5) к алгебре Клиффорда $C(1,0)$ ($\equiv 1$) и алгебрам Клиффорда серий $C(0,7+8m)$ (с неотрицательным целым m), которые уже известны на предыдущем шаге рекурсии. Подобным образом, все алгебры Клиффорда **H**-типа получаются рекурсивным применением алгоритмов к алгебрам Клиффорда $C(0,3+8m)$, а алгебры Клиффорда **C**-типа получаются рекурсивным применением алгоритмов к алгебрам Клиффорда $C(0,1+8m)$ и $C(0,5+8m)$. Это согласуется с приведенной ниже схемой, взятой из [14]. Мы имеем

Таблица максимальных алгебр Клиффорда (до $d = 256$).

	1	*	2	*	4	*	8	*	16	*	32	*	64	*	128	*	256	*
R	(1, 0)	⇒	(2, 1)	⇒	(3,2)	⇒	(4,3)	⇒	(5,4)	⇒	(6,5)	⇒	(7,6)	⇒	(8,7)	⇒	(9,8)	⇒
					(1,2)	→	(2,3)	→	(3,4)	→	(4,5)	→	(5,6)	→	(6,7)	→	(7,8)	→
				↗														
C			(0,1)															
				↘														
					(3,0)	→	(4,1)	→	(5,2)	→	(6,3)	→	(7,4)	→	(8,5)	→	(9,6)	→
							(1,4)	→	(2,5)	→	(3,6)	→	(4,7)	→	(5,8)	→	(6,9)	→
						↗												
H					(0,3)													
						↘												
							(5,0)	→	(6,1)	→	(7,2)	→	(8,3)	→	(9,4)	→	(10,5)	→
									(1,6)	→	(2,7)	→	(3,8)	→	(4,9)	→	(5,10)	→
								↗										
C							(0,5)											
								↘										
									(7,0)	→	(8,1)	→	(9,2)	→	(10,3)	→	(11,4)	→
									(1,8)	→	(2,9)	→	(3,10)	→	(4,11)	→	(5,12)	→
								↗										
R/O							(0,7)											
								↘										
									(9,0)	→	(10,1)	→	(11,2)	→	(12,3)	→	(13,4)	→

	1	$*$	2	$*$	4	$*$	8	$*$	16	$*$	32	$*$	64	$*$	128	$*$	256	$*$
													(1,10)	$\rightarrow$	(2,11)	$\rightarrow$	(3,12)	$\rightarrow$
												$\nearrow$						
C											$\underline{(0,9)}$							
												$\searrow$						
													(11,0)	$\rightarrow$	(12,1)	$\rightarrow$	(13,2)	$\rightarrow$
															(1,12)	$\rightarrow$	(2,13)	$\rightarrow$
														$\nearrow$				
H													$\underline{(0,11)}$					
														$\searrow$				
															(13,0)	$\rightarrow$	(14,1)	$\rightarrow$
																	(1,14)	$\rightarrow$
																$\nearrow$		
C															$\underline{(0,13)}$			
																$\searrow$		
																	(15,0)	$\rightarrow$
																	(1,16)	$\rightarrow$
																$\nearrow$		
R/**O**															$\underline{(0,15)}$			
																$\searrow$		
																	(17,0)	$\rightarrow$

(6)

Необходимо добавить несколько замечаний относительно приведенной таблицы. Столбцы нумеруются размером матрицы d (в вещественных компонентах) максимальных алгебр Клиффорда. Их сигнатура обозначается парами (p, q). Далее, подчеркнутые алгебры Клиффорда в данной таблице могут быть названы "примитивными максимальными алгебрами Клиффорда". Оставшиеся в таблице максимальные алгебры Клиффорда являются "максимальными потомственными алгебрами Клиффорда". Они получаются из примитивных максимальных алгебр Клиффорда итеративным применением рекурсивных алгоритмов (4) и (5). Кроме того, любая немаксимальная алгебра Клиффорда получается из данной максимальной алгебры Клиффорда удалением некоторого числа гамма-матриц (данный момент детально излагается в [14] и не будет рассматриваться здесь).

Максимальные алгебры Клиффорда, порожденные $C(0, 7 + 8m)$ сериями, связаны как с вещественными ($\mathbf{R}$), так и октонионными ($\mathbf{O}$) алгебрами с делением, (см. (1)), поскольку для $(0, 7 + 8m)$-сигнатуры они могут быть реализованы как ассоциативно (в нормальном, $\mathbf{R}$, случае), так и неассоциативно посредством октонионов (см. [14] и [16]).

Примитивные максимальные алгебры Клиффорда $C(0, 3)$ и $C(0, 7)$ могут быть явно реализованы посредством трех 4×4 матриц (как уже отмечалось) и семи 8×8 матриц соответственно:

$$C(0,3) \equiv \begin{array}{c} \tau_A \otimes \tau_1, \\ \tau_A \otimes \tau_2, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \end{array} \qquad \text{и} \qquad C(0,7) \equiv \begin{array}{c} \tau_A \otimes \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2, \\ \tau_A \otimes \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_1, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_2, \\ \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\ \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\ \tau_A \otimes \tau_A \otimes \tau_A. \end{array} \tag{7}$$

Комплексные примитивные максимальные алгебры Клиффорда $C(0,1)$ и $C(0,5)$ могут быть получены из $C(1,2)$ и $C(0,7)$, соответственно, удалением двух гамма-матриц. В $C(0,7)$ мы можем, в том числе, рассмотреть последний тензорно умноженный столбец, устранить два члена, содержащие τ_1 и τ_2, и заменяя $\mathbf{1}_2 \mapsto 1$, $\tau_A \mapsto i$, получить

$$C(0,5) \equiv \begin{array}{l} \tau_A \otimes \tau_1, \\ \tau_A \otimes \tau_2, \\ i\tau_1 \otimes \mathbf{1}_2, \\ i\tau_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\ i\tau_A \otimes \tau_A. \end{array} \tag{8}$$

Стоит отметить, что $C(0,1)$ и $C(0,5)$ серии были вполне корректно рассмотрены в [14] как "потомственные", ввиду того, что они могут быть получены из $C(1,2)$, $C(0,7)$ после стирания лишних гамма-матриц. Однако, здесь мы находим более удобным явно включить их в таблицу (6) и рассматривать их как "примитивные", из-за того, что они допускают иную структуру алгебры с делением (они почти комплексные, $\mathbf{C}$); что касается нормального ($\mathbf{R}$) типа максимальных алгебр Клиффорда, они выводятся отсюда.

Оставшиеся примитивные максимальные алгебры Клиффорда $C(0,x+8m)$, для положительных целых $m=1,2,\dots$ и $x=1,3,5,7$, могут быть восстановлены с помощью $mod \quad 8$ свойств гамма-матриц. Пусть $\overline{\tau}_i$ – реализация $C(0,x)$ для $x=1,3,5,7$. Применяя алгоритм (4) к $C(0,7)$, мы сначала строим матрицы 16×16, реализующие $C(1,8)$ (матрица с положительной сигнатурой обозначается γ_9, ${\gamma_9}^2=\mathbf{1}$, в то время как восемь матриц с отрицательными сигнатурами обозначаются через γ_j, $j=1,2\dots,8$, ${\gamma_j}^2=-\mathbf{1}$). Теперь мы находимся в положении работы [14] для явной конструкции целой серии примитивных максимальных алгебр Клиффорда $C(0,x+8n)$, посредством формул

$$C(0,x+8n) \equiv \begin{array}{ll} \overline{\tau}_i \otimes \gamma_9 \otimes \dots & \dots \quad \dots \otimes \gamma_9, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots \quad \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots \quad \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \dots & \dots \quad \dots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \dots & \dots \qquad \dots, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \dots & \dots \quad \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j, \end{array} \tag{9}$$

Здесь тензорное произведение 16-ти мерного представления берется n раз.

Об алгебрах с делением

В предыдущей части мы описали алгоритм явного построения любого неприводимого представления алгебры Клиффорда определенного делимо-алгебраического типа. Для удобства приведем здесь основные свойства алгебр с делением, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Четыре алгебры с делением: вещественных ($\mathbf{R}$) и комплексных ($\mathbf{C}$) чисел, кватернионы ($\mathbf{H}$) и октонионы ($\mathbf{O}$) имеют соответственно 0, 1, 3 и 7 мнимых элементов e_i, удовлетворяющих соотношениям

$$e_i \cdot e_j \ = \ -\delta_{ij} + C_{ijk} e_k, \tag{10}$$

(i, j, k принимают значение 1 комплексном случае, $1, 2, 3$ в кватернионном случае и $1, 2, \ldots, 7$ в октонионном; кроме того, по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

C_{ijk} представляют собой полностью антисимметричные структурные константы алгебр с делением. Октонионная алгебра с делением максимальна, ввиду того, что кватернионы, комплексные и вещественные числа могут быть получены как ее ограничения. Полностью антисимметричные октонионные структурные константы могут быть выражены как

$$C_{123} = C_{147} = C_{165} = C_{246} = C_{257} = C_{354} = C_{367} = 1 \tag{11}$$

(и обращаются в нуль в иных случаях).

Октонионы являются единственной неассоциативной, однако альтернативной (см. [17]), алгеброй с делением.

Вследствие антисимметричности C_{ijk} очевидно, что мы можем реализовать (1) посредством сопоставления сигнатур $(0, 3)$ и $(0, 7)$ мнимым кватернионам и октонионам соответственно.

Для дальнейшего изложения важную роль играет понятие главного сопряжения в алгебре с делением. Любой элемент X в заданной алгебре с делением может быть представлен как сумма

$$X \ = \ x_0 + x_i e_i, \tag{12}$$

где x_0 и x_i вещественны, по повторяющимся индексам предполагается суммирование, и положительные числа i ограничены 1, 3 и 7 в $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$ случаях соответственно. Главное сопряжение X^* элемента X определяется как

$$X^* \ = \ x_0 - x_i e_i. \tag{13}$$

Это позволяет ввести норму в алгебре с делением посредством произведения $X^* X$. Ограничение единичной нормировки $X^* X = 1$ выделяет три параллелизуемые[3] сферы S^1, S^3 и S^7 в связи с $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$ соответственно.

Дальнейшее рассмотрение алгебр с делением и их связи с алгебрами Клиффорда содержится в работах [14] и [17].

[3] Доб. пер. Многообразие называется параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально.

О фундаментальных спинорах

В части **2** мы обсудили свойства неприводимых представлений алгебр Клиффорда, показав метод их явного построения, а также отметили их делимо-алгебраическую структуру. Стоит напомнить, что делимо-алгебраический характер фундаментальных спиноров не обязательно (в зависимости от данного пространства-времени) совпадает с делимо-алгебраическим типом соответствующего неприводимого представления алгебры Клиффорда.

Фундаментальные спиноры реализуют представление обобщенной Лоренцевой группы с минимальным числом вещественных компонент в соответствии с максимальной, совместимой, допустимой делимо-алгебраической структурой.

Следующая таблица, взятая из результатов [18] и [13], (см. также [14]), сравнивает между собой делимо-алгебраические свойства неприводимых представлений Клиффорда ($\mathbf{\Gamma}$) и фундаментальных спиноров ($\mathbf{\Psi}$), в различном пространстве-времени, параметризованном посредством $\rho = s - t \quad mod \quad 8$. Имеем

ρ	$\mathbf{\Gamma}$	$\mathbf{\Psi}$
0	**R**	**R**
1	**R**	**R**
2	**R**	**C**
3	**C**	**H**
4	**H**	**H**
5	**H**	**H**
6	**H**	**C**
7	**C**	**R**

(14)

Из приведенной таблицы ясно, что для $\rho = 2, 3$, фундаментальные спиноры могут допускать более широкую делимо-алгебраическую структуру, нежели соответствующее неприводимое представление алгебр Клиффорда. Для $\rho = 6, 7$ верно обратное: неприводимые представления Клиффорда допускают более широкую делимо-алгебраическую структуру, нежели соответствующие спиноры. В некоторых случаях это несовпадение делимо-алгебраических структур играет важную роль. Например, в [11] был разработан метод построения суперконформных алгебр, основанный на минимальной делимо-алгебраической структуре, общей как для неприводимых представлений алгебры Клиффорда, так и для фундаментальных спиноров. Этот метод может быть напрямую преобразован для построения расширенных суперконформных алгебр, основанных на наибольшей делимо-алгебраической структуре. За такое обобщение приходится платить введением для $\rho = 2, 3$ приводимых представлений алгебры Клиффорда, и обратно, для $\rho = 6, 7$ – введением неминимальных спиноров.

Причина такого несовпадения может быть легко объяснена на основе алгоритмической конструкции части **2** и таблицы (6). Действительно, все максимальные потомственные алгебры Клиффорда, входящие в таблицу (6), имеют блочно антидиагональные гамма-матрицы, за исключением единственной гамма-матрицы, задающейся как $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$. Следовательно, все немаксимальные алгебры Клиффорда, получающиеся посредством удаления этой дополнительной гамма-матрицы (детальное обсуждение данного вопроса содержится в [14]), имеют блочно антидиагональную форму. Напомним, что фундаментальные спиноры реализуют представление обобщенной группы Лоренца, генераторы которой задаются как коммутаторы гамма-матриц $[\Gamma_i, \Gamma_j]$. При рассмотрении немаксимальных алгебр Клиффорда, все эти коммутаторы имеют блочно-диагональную 2×2 форму, позволяющую ввести (обобщенную в смысле работы [14]) проекцию Вейля для фундаментальных спиноров с ненулевыми верхними и нижними компонентами.

Удобно непосредственно рассмотреть простейшие случаи пространств Минковского, в которых возникает несовпадение (общая процедура может быть напрямую получена из таблицы (6)). В обычном $(3,1)$ пространстве-времени, ($\mathbf{R}$) неприводимое представление алгебры Клиффорда получается как немаксимальная алгебра Клиффорда $(3,1) \subset (3,2)$, полученная из максимальной ($\mathbf{R}$) $(3,2)$ после удаления времениподобных гамма-матриц. С другой стороны, фундаментальные комплексные спиноры получаются из приводимых представлений алгебры Клиффорда $(3,1) \subset (4,1)$, посредством удаления пространственноподобных гамма-матриц из ($\mathbf{C}$) неприводимого представления алгебры Клиффорда $(4,1)$.

В других случаях пространств Минковского имеем

i) $(4,1)$: $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с максимальным клиффордовым представлением $(4,1)$ ($\mathbf{C}$), в то время как $\mathbf{\Psi}$ строится в терминах приводимого, немаксимального представления Клиффорда $(4,1) \subset (6,1)$ ($\mathbf{H}$),

ii) $(7,1)$: $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с немаксимальным клиффордовым представлением $(7,1) \subset (7,2)$ ($\mathbf{H}$), в то время как $\mathbf{\Psi}$ строится в терминах приводимого, немаксимального представления Клиффорда $(7,1) \subset (8,1)$ ($\mathbf{C}$),

iii) $(8,1)$: $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с максимальным клиффордовым представлением $(8,1)$ ($\mathbf{C}$), в то время как $\mathbf{\Psi}$ строится в терминах приводимого, немаксимального представления Клиффорда $(8,1) \subset (10,1)$ ($\mathbf{R}$).

Обобщенные суперсимметрии: примеры M и F алгебр

Необходимо ввести три матрицы, A, B, C, для описания трех сопряжений (эрмитова, комплексного и транспозиции), действующих на гамма-матрицах [3]. Ввиду того, что только две из этих матриц независимы, мы, следуя [14], будем работать лишь с A и C. A играет роль времениподобной матрицы Γ^0 в пространстве-времени Минковского и используется для введения сопряженных спиноров (barred spinors). C, с другой стороны, является матрицей зарядового сопряжения. С точностью до общего знака, в общем (s,t) пространство-времени A и C задаются как произведения всех времениподобных и, соответственно, всех симметричных (или антисимметричных) гамма-матриц[4]. Свойства A и C немедленно следуют из их явной конструкции, см. [3] и [14].

В представлении алгебры Клиффорда, реализованном матрицами с действительными элементами, сопряжение действует как тождественное преобразование, см. (13). В этом случае пространственноподобные гамма-матрицы симметричны, в то время как времениподобные гамма-матрицы антисимметричны, таким образом, A может быть отождествлена с матрицей зарядового сопряжения C_A.

[4] В зависимости от заданного пространства-времени (см. [3] и [14]), существуют не более двух матриц зарядового сопряжения C_S, C_A, задаваемых как произведение всех симметричных и всех антисимметричных гамма-матриц соответственно. В специальных сигнатурах пространства-времени они сливаются в одну матрицу C.

Для наших целей, важность матрицы A и матрицы зарядового сопряжения C следует из того, что в D-мерном пространстве-времени ($D = s + t$), натянутом на $d \times d$ гамма-матрицы, они позволяют строить базис для $d \times d$ (анти)эрмитовых и (анти)симметричных матриц соответственно. Легко доказать, что в вещественном и комплексном случаях (кватернионный случай отличается), все $\begin{pmatrix} D \\ k \end{pmatrix}$ антисимметризованные произведения k гамма-матриц $A\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$, являются эрмитовыми или антиэрмитовыми, в зависимости от значения $k \le D$. Аналогично, антисимметризованные произведения $C\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$ все симметричны или все антисимметричны.

Что касается M-алгебры, 32-компонентные вещественные спиноры $(10, 1)$-пространства-времени допускают антикоммутаторы $\{Q_a, Q_b\}$, которые являются 32×32 симметричными вещественными матрицами с, не более чем, $32 + \frac{32 \times 31}{2} = 528$ компонентами. Расширяя r.h.s.[5] в терминах антисимметризированного произведения гамма-матриц, мы получаем, что оно может быть насыщено посредством так называемой M-алгебры

$$\{Q_a, Q_b\} \;=\; (A\Gamma_\mu)_{ab}\, P^\mu + \; \left(A\Gamma_{[\mu\nu]}\right)_{ab} Z^{[\mu\nu]} + \; \left(A\Gamma_{[\mu_1 \ldots \mu_5]}\right)_{ab} Z^{[\mu_1 \cdots \mu_5]}. \tag{15}$$

Действительно, $k = 1, 2, 5$ секторов r.h.s. доставляют $11+55+462 = 528$ общих компонент. Помимо сдвигов P^μ, в r.h.s. возникают антисимметричные абелевы тензорные центральные заряды ранга-2 и ранга-5 $Z^{[\mu\nu]}$ и $Z^{[\mu_1 \cdots \mu_5]}$ соответственно.

Насыщенная M-алгебра (15) допускает конечное число подалгебр, которые согласуются с лоренцевыми свойствами одиннадцати измерений сигнатуры Минковского. Существует 6 таких подалгебр, которые восстанавливаются обнулением одного или двух среди трех тензорных центральных зарядов P^μ, $Z^{[\mu\nu]}$, $Z^{[\mu_1 \cdots \mu_5]}$ (полностью вырожденная подалгебра получается посредством обнуления r.h.s. целиком).

То, что фундаментальные спиноры в $(10, 2)$-пространстве-времени также допускают 32 компоненты, следует из существования проекции Вейля. Из этого вытекает, что насыщенная M-алгебра допускает $(10, 2)$ пространственно-временное представление, так называемую F-алгебру, в терминах $(10, 2)$ майорано-вейлевских спиноров $\tilde{Q}_{\tilde{a}}$, $\tilde{a} = 1, 2, \ldots, 32$.

В случае вейль-спроецированных спиноров, r.h.s. необходимо перестроить с помощью оператора проекции, который выбирает верхний левый блок в 2×2 блочном разложении. Более точно, если $\mathcal{M}$ матрично разложена на 2×2 блоки как $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 & \mathcal{M}_4 \end{pmatrix}$, мы можем определить

$$P(\mathcal{M}) \;\equiv\; \mathcal{M}_1. \tag{16}$$

Насыщенная M-алгебра (15) может, следовательно, быть переписана как

$$\left\{\tilde{Q}_{\tilde{a}}, \tilde{Q}_{\tilde{b}}\right\} \;=\; P\left(\tilde{A}\tilde{\Gamma}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)_{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{Z}^{[\tilde{\mu}\tilde{\nu}]} + P\left(\tilde{A}\tilde{\Gamma}_{[\tilde{\mu}_1 \ldots \tilde{\mu}_6]}\right)_{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{Z}^{[\tilde{\mu}_1 \cdots \tilde{\mu}_6]}, \tag{17}$$

где все тильды ссылаются к соответствующим $(10, 2)$ величинам. Матрицы в r.h.s. симметричны при замене $\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{b}$. В этот момент возникают ранга-2 и самодуальные ранга-6 антисимметричные абелевы тензорные заряды, $\tilde{Z}^{[\tilde{\mu}\tilde{\nu}]}$ и соответственно $\tilde{Z}^{[\tilde{\mu}_1 \cdots \tilde{\mu}_6]}$. Общее число их компонент $66 + 462 = 528$, что доказывает насыщенность r.h.s. Уравнение насыщения (17) называется F-алгеброй.

[5] r.h.s. – right hand side – правая сторона, например, мир правых спиноров.

Вещественные, комплексные и кватернионные обобщенные суперсимметрии

Для вещественных n-компонентных спиноров Q_a, наиболее общая алгебра суперсимметрий представима как

$$\{Q_a, Q_b\} \;=\; \mathcal{Z}_{ab}, \tag{18}$$

где матрица $\mathcal{Z}$ возникающая в r.h.s., является наиболее общей $n\times n$ симметричной матрицей с общим числом компонент $\frac{n(n+1)}{2}$. Для любого заданного пространства-времени, мы легко можем посчитать соответствующее разложение $\mathcal{Z}$ в терминах антисимметризованных произведений k-гамма-матриц, а именно

$$\mathcal{Z}_{ab} \;=\; \sum_k (A\Gamma_{[\mu_1\ldots\mu_k]})_{ab} Z^{[\mu_1\ldots\mu_k]}, \tag{19}$$

где значения k, входящие в сумму r.h.s., ограничены требованием симметрии при замене $a \leftrightarrow b$ и специфичны для данного пространства-времени. Коэффициенты $Z^{[\mu_1\ldots\mu_k]}$ являются абелевыми тензорными центральными зарядами ранга k.

В случае, когда фундаментальные спиноры комплексные или кватернионные, они могут быть объединены в комплексные (для **C** и **H** случаев) и кватернионные (для **H** случая) мультиплеты, элементы которых являются комплексные числа и кватернионы соответственно.

Вещественная обобщенная алгебра суперсимметрии (18) теперь может быть заменена на более общие комплексную или кватернионную алгебры суперсимметрии, задаваемые антикоммутаторами среди фундаментальных спиноров Q_a и их сопряженных ${Q^*}_{\dot a}$ (где сопряжение использует главное сопряжение в данной алгебре с делением, см. (13)). В этом случае, имеем

$$\{Q_a, Q_b\} = \mathcal{Z}_{ab}, \qquad \{{Q^*}_{\dot a}, {Q^*}_{\dot b}\} = {\mathcal{Z}^*}_{\dot a\dot b}, \tag{20}$$

вместе с

$$\{Q_a, {Q^*}_{\dot b}\} \;=\; \mathcal{W}_{a\dot b}, \tag{21}$$

где матрица $\mathcal{Z}_{ab}$ (${\mathcal{Z}^*}_{\dot a\dot b}$ является ее сопряженной и не содержит новых степеней свободы) симметрична поскольку $\mathcal{W}_{a\dot b}$ эрмитова.

Максимальное число допустимых компонент в r.h.s. задается для комплексных фундаментальных спиноров с n комплексными компонентами посредством:
ia) $n(n+1)$ (вещественных) бозонных компонент, входящих в симметричную $n\times n$ комплексную матрицу $\mathcal{Z}_{ab}$ плюс
iia) n^2 (вещественных) бозонных компонент, входящих в эрмитову $n\times n$ комплексную матрицу $\mathcal{W}_{a\dot b}$.

Аналогично, максимальное число допустимых компонент в r.h.s. для кватернионных фундаментальных спиноров с n кватернионными компонентами, задается как
ib) $2n(n+1)$ (вещественных) бозонных компонент, входящих в симметричную $n\times n$ кватернионную матрицу $\mathcal{Z}_{ab}$ плюс
iib) $2n^2-n$ (вещественных) бозонных компонент, входящих в эрмитову $n\times n$ кватернионную матрицу $\mathcal{W}_{a\dot b}$.

Приведенные числа не обязательно означают, что соответствующая обобщенная суперсимметрия действительно насыщена. Это верно, в частности, в кватернионном случае, см. [15].

Любая вещественная обобщенная суперсимметрия, допускающая комплексную структуру, может быть переписана в комплексном формализме с n-компонентными комплексными спинорами и общим числом $n(2n+1)$ (вещественных) бозонных компонент, разбитых на $n(n+1)$ компонент, входящих в симметричную матрицу $\mathcal{Z}$ и n^2 компонент, входящих в эрмитову матрицу $\mathcal{W}$. По иному обстоит дело в кватернионном случае. Кватернионная структура требует ограничения общего числа бозонных порождающих. n-компонентные кватернионные спиноры могут быть описаны как $4n$-компонентные вещественные спиноры. Однако, r.h.s. кватернионной (20) и (21) супералгебры допускает не более чем $4n^2+n$ бозонных компонент, вместо $8n^2+2n$ в случае наиболее общей суперсимметричной вещественной алгебры. Лоренц-ковариантность далее ограничивает число бозонных порождающих в кватернионной алгебре суперсимметрии.

Мы завершаем эту часть упоминанием о двух больших классах подалгебр, отвечающих лоренц-инвариантности, которые могут быть получены из (20) и (21) как в комплексном, так и в кватернионном случае. Они получаются посредством обнуления либо $\mathcal{Z}$, либо $\mathcal{W}$, а именно,

I) $\mathcal{Z}_{ab}\equiv {\mathcal{Z}^*}_{\dot a\dot b}\equiv 0$, так что лишь бозонные степени свободы входят в эрмитову матрицу $\mathcal{W}_{a\dot b}$ или, обратно,

II) $\mathcal{W}_{a\dot b}\equiv 0$, так что лишь бозонные степени свободы входят в $\mathcal{Z}_{ab}$ и сопряженную матрицу ${\mathcal{Z}^*}_{\dot a\dot b}$.

Соответственно, в будущем мы будем ссылаться на (комплексные или кватернионные) обобщенные суперсимметрии, удовлетворяющие ограничению *I)*, как на "эрмитовы" (или "типа I") обобщенные суперсимметрии, в то время как на (комплексные или кватернионные) обобщенные суперсимметрии, удовлетворяющие ограничению *II)*, будем ссылаться, как на "голоморфные" (или "типа II") обобщенные суперсимметрии.

Обобщенные суперсимметрии и октонионная M-супералгебра

Как уже отмечалось, в $D=11$ пространстве-времени Минковского, где должна быть найдена M-теория, спиноры вещественны и имеют 32 компоненты. Так как наиболее общая симметричная 32×32 матрица допускает 528 компонент, легко доказать, что наиболее общая алгебра суперсимметрии в $D=11$ может быть представлена как

$$\{Q_a,Q_b\}=(C\Gamma_\mu)_{ab}P^\mu+(C\Gamma_{[\mu\nu]})_{ab}Z^{[\mu\nu]}+(C\Gamma_{[\mu_1\dots\mu_5]})_{ab}Z^{[\mu_1\dots\mu_5]} \qquad (22)$$

(где C – матрица зарядового сопряжения), $Z^{[\mu\nu]}$ и $Z^{[\mu_1\dots\mu_5]}$ – полностью антисимметричные тензорные центральные заряды, ранга 2 и 5 соответственно, которые соответствуют расширенным объектам [21, 22], p-бранам. Отметим, что общее число 528 получено в r.h.s. как сумма трех различных секторов, т. е.

$$528\ =\ 11+66+462. \qquad (23)$$

Алгебра (15) называется M-алгеброй. Она дает обобщение обычной алгебры суперсимметрии, восстанавливаемой посредством отождествления $Z^{[\mu\nu]}\equiv Z^{[\mu_1\dots\mu_5]}\equiv 0$.

Октонионная M-супералгебра вводится в предположении октонионной структуры спиноров, которые в $D=11$ пространстве-времени Минковского представляют собой октонионнозначные 4-компонентные векторы. Алгебра, заменяющая (15), задается как

$$\{Q_a,Q_b\}=\{{Q^*}_a,{Q^*}_b\}=0,\qquad \{Q_a,{Q^*}_b\}=Z_{ab}, \qquad (24)$$

где $*$ обозначает главное сопряжение в октонионной алгебре с делением и, как результат, бозонная абелева алгебра на r.h.s. ограничивается до эрмитовой

$$Z_{ab} \;=\; Z_{ba}{}^{*}, \tag{25}$$

оставляющей лишь 52 независимые компоненты.

Матрица Z_{ab} может быть представлена либо как $11 + 41$ бозонных генераторов, входящих в

$$Z_{ab} = P^{\mu}(C\Gamma_{\mu})_{ab} + Z_{\mathbf{O}}^{\mu\nu}(C\Gamma_{\mu\nu})_{ab}, \tag{26}$$

либо как 52 бозонных генератора, входящих в

$$Z_{ab} = Z_{\mathbf{O}}^{[\mu_1\ldots\mu_5]}(C\Gamma_{\mu_1\ldots\mu_5})_{ab}\,. \tag{27}$$

Вследствие неассоциативности октонионов, в отличие от вещественного случая, сектора, определенные через (26) и (27), не являются зависимыми. Более того, как мы уже видели для $k = 2$, в антисимметричных произведениях k октонионнозначных матриц, некоторое их количество является излишним (для $k = 2$ из-за автоморфизмов G_2 14 таких произведений должны быть аннулированы). В общем случае [14], можно составить таблицу, выражающую число независимых компонент в D нечетно-мерном пространстве-времени октонионной реализации алгебры Клиффорда, принимая во внимание, что среди D гамма-матриц, 7 из них являются октонионнозначными, в то время как остальные $D - 7$ чисто вещественными. Мы получаем следующую таблицу, в которой столбцы отмечены числами k – количеством антисимметричных гамма-матриц, а строки нумеруются посредством размерности D (до $D = 13$)

$D \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	1	7	7	1	1	7	7	1						
9	1	9	22	22	10	10	22	22	9	1				
11	1	11	41	75	76	52	52	76	75	41	11	1		
13	1	13	64	168	267	279	232	232	279	267	168	64	13	1

(28)

Октонионная эквивалентность различных секторов может быть символически выражена для различных нечетных размерностей пространства-времени таблицей

$D = 7$	$M0 \equiv M3$
$D = 9$	$M0 + M1 \equiv M4$
$D = 11$	$M1 + M2 \equiv M5$
$D = 13$	$M2 + M3 \equiv M6$
$D = 15$	$M3 + M4 \equiv M0 + M7$

(29)

В $D = 11$ размерности соотношение между $M1 + M2$ и $M5$ может быть получено явно следующим образом. 11 векторных индексов μ разбиваются на 4 вещественных индекса, обозначаемых $a, b, c, \ldots$, и 7 октонионных индексов, обозначаемых $i, j, k, \ldots$. 52 независимые компоненты восстанавливаются из $52 = 4 + 2 \times 7 + 6 + 28$, в соответствии с

4	$M1_a$	$M5_{[aijkl]} \equiv M5_a$
7	$M1_i$, $M2_{[ij]} \equiv M2_i$	$M5_{[abcdi]} \equiv M5_i$,$M5_{[ijklm]} \equiv \widetilde{M}5_i$
6	$M2_{[ab]}$	$M5_{[abijk]} \equiv M5_{[ab]}$
$4 \times 7 = 28$	$M2_{[ai]}$	$M5_{[abcij]} \equiv M5_{[ai]}$

(30)

Октонионная суперконформная M-алгебра

Конформная алгебра октонионной М-теории может быть введена [12] адаптированием к одиннадцатимерию процедуры, обсуждаемой в [5] для 10-ти мерного случая. Это требует отождествления конформной алгебры октонионной $D = 11$ M-алгебры с обобщенной алгеброй Лоренца в $(11,2)$-мерном пространстве-времени. В таком пространстве-времени октонионные гамма-матрицы Клиффорда являются 8-мерными. Базис эрмитовых генераторов задается 64-мя антисимметричными два-тензорами $C\Gamma_{[\mu_1\mu_2]}\mathcal{Z}^{\mu_1\mu_2}$ и 168 антисимметричными три-тензорами $C\Gamma_{[\mu_1\mu_2\mu_3]}\mathcal{Z}^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ (или, эквивалентно, 232 антисимметричными шесть-тензорами $C\Gamma_{[\mu_1\dots\mu_6]}\mathcal{Z}^{\mu_1\cdots\mu_6}$). Это подсказывает, что общее число генераторов в конформной алгебре равно 232. Мы покажем, что это так.

В соответствии с [5], конформная алгебра может быть введена как алгебра преобразований, оставляющих инвариантным скалярное произведение дираковских спиноров. В $(11,2)$ оно задается посредством $\psi^\dagger C\eta$, где матрица C, аналог Γ^0, задаваемая как произведение двух пространственно-подобных гамма-матриц Клиффорда, является вещественнозначной и полностью антисимметричной. Следовательно, конформные преобразования реализуются как октонионнозначные 8-мерные матрицы $\mathcal{M}$, оставляющие C инвариантным, т. е. удовлетворяющие

$$\mathcal{M}^\dagger C + C\mathcal{M} \;=\; 0. \tag{31}$$

Это позволяет отождествить (квази)-группу конформных преобразований с (квази)-группой симплектических преобразований. Действительно, после простой замены переменных, C может быть приведена к форме

$$\Omega \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_4 \\ -\mathbf{1}_4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Наиболее общая октонионнозначная матрица, оставляющая инвариантным Ω, может быть представлена через

$$\mathbf{M} \;=\; \begin{pmatrix} D & B \\ C & -D^\dagger \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где 4×4 октонионные матрицы B, C эрмитовы

$$B = B^\dagger, \qquad C = C^\dagger. \tag{34}$$

Легко видеть, что общее число независимых компонент в (33) есть в точности 232, как и ожидалось, исходя из предыдущих рассмотрений.

Стоит отметить, что множество матриц $\mathbf{M}$ типа (33) образуют замкнутую алгебраическую структуру посредством обычного матричного коммутирования. Действительно, $[\mathbf{M},\mathbf{M}] \subset \mathbf{M}$ обеспечивает структуру $Sp(8|\mathbf{O})$ на $\mathbf{M}$. Для суперсимметричного расширения суперконформной алгебры, мы должны поместить 64-вещественно-компонентные (или 8-октонионно) спиноры из $(11,2)$ в суперматрицу расширенной $Sp(8|\mathbf{O})$. Это может быть достигнуто следующим образом. Два 4-рядных октонионных спинора α и β могут быть помещены в суперматрицу следующей формы

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & -\beta^\dagger & \alpha^\dagger \\ \hline \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{35}$$

После антикоммутирования, нижний бозонный диагональный блок редуцируется к $Sp(8|\mathbf{O})$. С другой стороны, дополнительные семь генераторов, соответствующие 1-мерной антиэрмитовой матрице A

$$A^{\dagger} = -A, \tag{36}$$

т. е. представляющие семь мнимых октонионов, получаются в верхнем бозонном диагональном блоке. Следовательно, общий (generic) бозонный элемент принимает форму

$$\left(\begin{array}{c|cc} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & D & B \\ 0 & C & -D^{\dagger} \end{array}\right), \tag{37}$$

где A, B и C удовлетворяют (36) и (34).

Замкнутая супер態алгебраическая структура с (35) как общим (generic) фермионным элементом и (37) как общим бозонным элементом, будет обозначаться $OSp(1, 8|\mathbf{O})$. Это суперконформная алгебра M-теории, которая допускает общее число 239 бозонных генераторов.

Выводы

Мы увидели, что, вопреки общепринятому убеждению, может быть последовательно введена альтернативная формулировка M супералгебры и M суперконформной алгебры, на основе неассоциативной максимальной делимой алгеброй октонионов. При этом возникают необычные свойства, такие как отсутствие независимости различных октонионных секторов бран, что является отражением антисимметричных октонионных тензорных тождеств высокого ранга, обсуждаемых в части **5**. Существование такого второго варианта M алгебры озадачивает. В конечном счете, это может быть связано с появлением исключительных структур (исключительных алгебр Ли и йордановых алгебр) в "Теории Всего" [19].

Так как мнимые октонионы допускают геометрическое описание в терминах семимерной сферы S^7, вполне можно предположить, что высокоразмерные октонионные структуры, в том числе и одиннадцатимерные, соответствуют компактификациям одиннадцатимерной M теории на $AdS_4 \times S^7$. Эта компактификация соответствует естественному решению для 11-мерной супергравитации, см. [20].

Октонионная суперконформная алгебра $OSp(1, 8|\mathbf{O})$ была получена явно. Она соответствует суперсимметричному расширению бозонной конформной алгебры, которая интересна с математической точки, ввиду того, что она связана с замкнутой алгебраической структурой, которая выходит за рамки стандартного понимания конформной алгебры заданной йордановой алгебры, см. [12].

Помимо этого аспекта, было представлено понятие эрмитовой (комплексной или кватернионной) и голоморфной (комплексной и кватернионной) суперсимметрии, как последовательного делимо-алгебраического ограничения обобщенной суперсимметрии.

Физические следствия этих математических структур вполне очевидны. Классификация обобщенных суперсимметрий позволяет понять паутину взаимосвязанных дуальностей различных классов теорий, которые могут быть либо аналитически продолжены (скажем, на евклидовый случай), либо восстановлены посредством размерной редукции.

Как пример, мы можем упомянуть, что аналитическое продолжение M алгебры, как было доказано в [23], соответствует одиннадцатимерной комплексной голоморфной суперсимметрии. Более того, в [15] показано, что эта же алгебра допускает 12-мерное евклидово представление в терминах вейль-проективных спиноров. Эти два примера евклидовых суперсимметрий могут найти свои приложения в функционально-интегральных формулировках многомерных суперсимметричных моделей.

Существует интересный класс моделей, который хорошо вписывается в изложенную здесь схему и подвергается активному изучению. Это класс суперчастичных моделей, впервые введенных в [24] и изучавшихся в [25], бозонные координаты которых соответствуют тензорным центральным зарядам. В работе [26] было показано, что 4-мерная теория подобного рода приводит к башне безмассовых состояний высшего спина, конкретно осуществляя предложение Фронсдала [27] по введению бозонных тензорных координат для описания теорий безмассовых высших спинов (допускающих гелевость больше двойки). Это область активных исследований, основная мотивация которых – изучение пределов теории суперструн без напряжений, соответствующих башне безмассовых частиц высокой гелевости (см. [28]).

В каком-нибудь "ортогональном" направлении, класс теорий, которые могут быть изучены на данном пути, является классом суперсимметричных расширений супергравитаций Черна-Саймонса в высших размерностях, требующих в качестве базисной составляющей супералгебры Ли, допускающей оператор Казимира подходящего порядка, см. [29].

Литература

[1] E. Bergshoeff and A. Van Proeyen, Class. Quant. Grav. **17**, 3277 (2000).

[2] R. Haag, J. Łopuszański and M. Sohnius, Nucl. Phys. **B 88**, 257 (1975).

[3] T. Kugo and P. Townsend, Nucl. Phys. **B 221**, 357 (1983).

[4] D. B. Fairlie and A. C. Manogue, Phys. Rev. **D 34**, 1832 (1986).

[5] K. W. Chung and A. Sudbery, Phys. Lett. **B 198**, 161 (1987).

[6] C. A. Barton and A. Sudbery, math.RA/0203010.

[7] E. Witten, "Quest For Unification", hep-ph/0207124.

[8] P. Ramond, "Algebraic Dreams", hep-th/0112261.

[9] M. Günaydin, C. Piron and H. Ruegg, *Comm. Math. Phys.* **61** (1978), 69.

[10] L. Smolin, hep-th/0104050.

[11] J. Lukierski and F. Toppan, Phys. Lett. **B 539**, (2002), 266.

[12] J. Lukierski and F. Toppan, Phys. Lett. **B 567**, 125 (2003).

[13] S. Okubo, J. Math. Phys. **32**, 1657 (1991); *ibid.* **32**, 1669 (1991).

[14] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, JHEP04 (2003) 040.

[15] F. Toppan, JHEP09 (2004) 016.

[16] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, Mod. Phys. Lett. **A 18**, 787 (2003).

[17] J. Baez, "The Octonions", math.RA/0105155.

[18] R. D'Auria, S. Ferrara, M.A. Lledo and V.S. Varadarajan, J. Geom. Phys. **40** 101 (2001); R. D'Auria, S. Ferrara and M. A. Lledo, Lett. Math. Phys. **57**, 123 (2001); S. Ferrara and M. A. Lledo, Rev. Math. Phys. **14**, 519 (2002).

[19] L. Boya, "Octonions and M-theory", hep-th/0301037.

[20] M. J. Duff and C. N. Pope, "Kaluza-Klein supergravity and the seven-sphere" in Supersymmetry and Supergravity 82, Trieste proceedings; M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, *Phys. Rep.* **130** (1986), 1.

[21] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P, Townsend, *Ann. Phys.* **18**, 330 (1987).

[22] M. J. Duff. R. R. Khuri, J. X. Lu, *Phys. Rep.* **259**, 213 (1995).

[23] J. Lukierski and F. Toppan, Phys. Lett. **B 584**, 315 (2004).

[24] E. Sezgin and I. Rudychev, "Superparticles, p-form coordinates and the BPS condition", hep-th/9711128.

[25] I. Bandos and J. Lukierski, Mod. Phys. Lett. **A 14** 1257 (1999).

[26] I. Bandos, J. Lukierski, C. Preitschopf and D. Sorokin, Phys. Rev. **D 61** (2000) 065009.

[27] C. Fronsdal, "Massless Particles, Ortosymplectic Symmetry and Another Type of Kaluza-Klein Theory", in "Essays on Supersymmetry", Reidel (1986) (Math. Phys. Studies, v. 8).

[28] D. Sorokin, "Introduction to the Classical Theory of Higher Spin", hep-th/0405069.

[29] M. Hassaine, R. Troncoso and J. Zanelli, "Eleven-dimensional supergravity as a gauge-theory for the M-algebra", hep-th/0306258.