О НЕКОТОРЫХ ДИСТРИБУТИВНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ

Соловей Л. Г.

Рассматриваются множества, не обязательно являющиеся кольцами, но в определенном смысле близкие к ним. Эти множества, названные гиперкольцами, состоят из нескольких аддитивных групп, пересекающихся только в нуле, и в то же время являются мультипликативными группоидами (или группами, исключая нуль). Выполняются дистрибутивные законы.

Кольца (и, в частности. тела или поля) представляют собой частный случай рассматриваемых множеств. Приводятся примеры, свидетельствующие о распространенности рассматриваемых множеств. Так, представление о том, что действительные физические величины "укладываются" в кольцо, неверно, так как они являются подмножеством гиперкольца.

Действительные гиперкольца с единицей (не сводящиеся к кольцам), аддитивные группы которых являются векторными пространствами, можно рассматривать как обобщенные гиперкомплексные системы, если в эти системы включить действительные бинарные (со сложением и умножением) дистрибутивные алгебраические структуры с единицей, где количество входящих в них векторных пространств больше единицы и конечно.

Примером гиперколец, наводящим на мысль о целесообразности их изучения, могут служить матрицы второго порядка, подобные ортогональным или унитарным, но нормированные не на единицу, а на произвольное неотрицательное число. Комплексные числа и кватернионы могут быть представлены такими матрицами, являясь их подмножествами.

§1. Гипертело (гиперполе, гиперкольцо) k-го порядка по аддитивным группам

В алгебре наряду с телами, полями, кольцами существуют и объекты более общего типа – универсальные алгебры [1]. В статье рассматривается один класс универсальных алгебр, включающий тела, поля и кольца.

Назовем *гипертелом* (соответственно, *гиперкольцом*) k-го порядка по аддитивным группам множество M, которое обладает следующими свойствами:

1) составляет k ненулевых аддитивных групп, единственной точкой пересечения которых является нуль;

2) составляет, кроме нуля, мультипликативную группу или лупу [1] (соответственно, мультипликативный группоид [1], включая нуль);

3) среди произведений элементов a_i, a_k из фиксированных аддитивных групп A_i и A_k есть отличные от нуля для любых i и k;

4) два элемента из каких-либо двух (возможно, и совпадающих) аддитивных групп, будучи умножены друг на друга, дают элемент из фиксированной аддитивной группы, определяемой только аддитивными группами, к которым принадлежат сомножители, и, возможно. порядком расположения этих сомножителей; следовательно, аддитивные группы A_i и A_k суть элементы группоида, причем

$$A_iA_k = A_l$$

при фиксированных i и k l также фиксирован; назовем этот группоид *фактор-группоидом* множества M по аддитивным группам;

5) при этом становятся возможными левый и правый дистрибутивные законы, которые и выполняются.

Гипертело k-го порядка по аддитивным группам с коммутативным умножением назовем гиперполем k-го порядка по аддитивным группам. Гиперкольца, аддитивные группы которых являются n-мерными векторными пространствами над полем P [2], причем n одинаково для всех аддитивных групп, назовем *гипералгебрами k-го порядка n-го ранга* над полем P при выполнении соотношений:

$$(\alpha a)\cdot b = a\cdot(\alpha b) = \alpha(a\cdot b),$$

где α – элемент поля P, а a, b – элементы гиперкольца. Такие же гипералгебры, элементы которых (кроме нуля) составляют мультипликативную группу или лупу, назовем *гипералгебрами k-го порядка n-го ранга с делением* над полем P. Обычные тела (поля, кольца) являются, таким образом. гипертелами (гиперполями, гиперкольцами) первого порядка по всему множеству M, являющемуся в данном случае единственной аддитивной группой.

Среди аддитивных групп гипертела может быть не более одного тела (поля), так как единица, согласно пункту 1, может принадлежать не более, чем одной аддитивной группе. Если рассматриваемое множество является гипертелом или гиперполем, то аддитивная группа с единицей сама является телом или полем. Действительно, произведение единицы e на элемент из этой аддитивной группы представляет собой тот же элемент и принадлежит, следовательно, той же аддитивной группе. Но тогда, согласно пункту 4, произведение любых двух элементов этой аддитивной группы есть элемент. принадлежащий той же аддитивной группе. Далее, любому элементу a рассматриваемой аддитивной группы (кроме нуля) соответствует обратный элемент, принадлежащий той же аддитивной группе. В самом деле, если бы обратный элемент a^{-1} принадлежал другой аддитивной группе, то, согласно пункту 4, $a^{-1}a$ должно было бы принадлежать аддитивной группе, содержащей a^{-1}; но тогда $a^{-1}a$ не могло бы равняться e. Таким образом, аддитивная группа, содержащая единицу, является также (кроме нуля) мультипликативной группой или лупой и, следовательно, мультипликативной группой или лупой тела или поля[1]. Рассматриваемая аддитивная группа (кроме нуля) в случае ассоциативного гипертела (в частности, гиперполя), будучи мультипликативной подгруппой всей мультипликативной группы, является ее нормальным делителем [1,3]. Действительно, для любого элемента b множества M, кроме нуля, выполняется соотношение:

$$b^{-1}eb = e.$$

Следовательно, согласно пункту 4, если $h_1 \neq 0$ принадлежит аддитивной группе с единицей, то

$$b^{-1}h_1b = h_2,$$

где h_2 также принадлежит этой аддитивной группе, что и требовалось доказать. Любая аддитивная группа ассоциативного гипертела (гиперполя), кроме нуля, является смежным классом по нормальному делителю. В самом деле, элемент $a \neq 0$ какой-либо аддитивной группы A_1 удовлетворяет соотношению $ae = a$; поэтому, согласно пункту 4, $ah_1 = b$, где h_1 – любой элемент нормального делителя H, а b

---

[1] Аддитивная группа с единицей ассоциативной гипералгебры с делением конечного ранга над полем действительных чисел, являющаяся ассоциативной алгеброй конечного ранга с делением над полем действительных чисел, согласно теореме Фробениуса изоморфна либо действительным числам, либо комплексным числам, либо кватернионам [1].

– элемент той же аддитивной группы, что и a. Это означает, что весь левый смежный класс, соответствующий элементу a, принадлежит рассматриваемой аддитивной группе A_1. Возьмем теперь произвольный элемент $a' \neq a$, $a' \in A_1$, причем $a' \neq 0$. Для a', как и для a, справедливо соотношение $a'H \in A_1$. Если h_i – произвольный элемент H, то

$$a'h_i = aa^{-1}a'h_i.$$

Но

$$a^{-1}a = e \in H.$$

Следовательно, согласно пункту 4, $a^{-1}a' \in H$; пусть $a^{-1}a' = h_3$. Тогда $a'h_i = ah_3h_i = ah_4$, где $h_4 = h_3h_i \in H$, т. е. a' принадлежит тому же классу смежности, что и a, что и требовалось доказать.

Напомним теперь, что правые смежные классы по нормальному делителю совпадают с левыми [1, 3]. Все аддитивные группы ассоциативного гипертела (без нуля), следовательно, составляют фактор-группу его мультипликативной группы [1, 3] по аддитивной группе, содержащей единицу (без нуля).

Отметим еще некоторые свойства гиперколец (и, в частности, гипертел и гиперполей).

a) Так же, как и для колец [1], доказывается, что произведение (слева и справа) нуля на любой элемент гиперкольца равно нулю.

b) Мы видели, что аддитивные группы гиперкольца составляют мультипликативный группоид – его фактор-группоид по этим аддитивным группам. Легко также видеть, что аддитивные группы A_i сами являются единственными элементами аддитивных групп с законом сложения

$$A_i + A_i = A_i,$$

причем A_i является как нулем 0_i такой аддитивной группы, так и, следовательно, ее противоположным элементом, но не общим нулем всех таких аддитивных групп.

Наконец, отметим, что гипертела (гиперполя, гиперкольца) по аддитивным группам вообще говоря не являются телами (полями, кольцами), но могут и быть ими. Гипертела (гиперполя, гиперкольца) по аддитивным группам могут быть как конечного, так и бесконечного порядка.

§2. Ненормированные на единицу унитарные и ортогональные матрицы

Прежде чем перейти к примерам, рассмотрим необходимые для дальнейшего изложения ненормированные на единицу унитарные и ортогональные матрицы. Как известно, комплексная матрица n-го порядка A называется унитарной, если

$$AA^+ = A^+A = 1, \tag{1}$$

где A^+ – матрица, эрмитово-сопряженная матрице A. Матрица A называется ортогональной, если

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = 1, \tag{2}$$

где $\widetilde{A}$ – матрица, транспонированная матрице A (в вещественной области унитарная матрица ортогональна [4]).

Рассмотрим теперь комплексную матрицу A n-го порядка, удовлетворяющую условию

$$AA^+ = \lambda I, \tag{3}$$

где λ– некоторое число, а I – единичная матрица. Число λ вещественно и неотрицательно. В самом деле, для любого индекса i

$$\lambda = (AA^+)_{ii} = \sum_k A_{ik}(A^+)_{ki} = \sum_k A_{ik}A^*_{ik} = \sum_k |A_{ik}|^2 \geq 0. \tag{4}$$

(знак равенства имеет место при $A = 0$).

Отметим также, что при выполнении условия (3)

$$AA^+ = A^+A = \lambda I. \tag{5}$$

Действительно, при $\lambda \neq 0$

$$A(A^+/\lambda) = I, \tag{6}$$

т. е. $A^+/\lambda = A^{-1}$ – матрица, обратная A. Но для обратных матриц, как известно,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I, \qquad \text{т. е.} \quad (A^+/\lambda)A = A(A^+/\lambda) = I.$$

Следовательно, верно (5). Для нулевой матрицы соотношение (5) также выполняется (при $\lambda = 0$).

Матрицу A, удовлетворяющую условию (3) и, как следствие, условиям (4), (5), назовем ненормированной на единицу унитарной, или *квазиунитарной*. Если A – вещественная матрица n-го порядка, то точно так же, наряду с ортогональными матрицами, удовлетворяющими условиям (2), можно рассматривать матрицы, удовлетворяющие условию

$$A\widetilde{A} = \lambda I. \tag{7}$$

Матрицу, удовлетворяющую условию (7), назовем ненормированной на единицу ортогональной, или *квазиортогональной*. Очевидно, что λ – вещественное число. Оно неотрицательно, что следует из того, что квазиортогональные матрицы в вещественной области квазиунитарны. Как и для квазиунитарных матриц, доказывается соотношение

$$\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = \lambda I. \tag{8}$$

Легко показать, что вещественные матрицы второго и четвертого порядка, изоморфные соответственно комплексным числам и кватернионам, являются квазиортогональными, а комплексная матрица второго порядка, также изоморфная кватернионам, является квазиунитарной.

Покажем теперь. что квазиунитарные матрицы n-го порядка (за исключением нуля) составляют мультипликативную группу.

В самом деле, единичная матрица является квазиунитарной и представляет собой единицу системы. Далее, как мы видели, каждой квазиунитарной матрице A (за исключением нулевой) соответствует квазиунитарная обратная матрица

$$A^{-1} = A^+/\lambda.$$

Рассмотрим теперь произведение AB квазиунитарных матриц A и B. Имеем:

$$AB \cdot (AB)^+ = ABB^+A^+ = \lambda_B(AA^+) = \lambda_B\lambda_A, \qquad \text{где} \quad \lambda_A = AA^+,\ \lambda_B = BB^+. \tag{9}$$

Следовательно, AB – также квазиунитарная матрица. Таким образом, все условия, превращающие квазиунитарные матрицы n-го порядка, кроме нуля, в группу по умножению, выполнены. Назовем произведение

$$AA^+ = \lambda_A = |A|^2 \tag{10}$$

квадратом модуля квазиунитарной матрицы, а, следовательно,

$$|A| = \sqrt{AA^{+}} \tag{11}$$

– ее *модулем* или *абсолютной величиной.*

Из формулы (10) следует, что для детерминанта A имеем:

$$|det\, A|^2 = |A|^{2n},$$

откуда

$$|det\, A| = |A|^n \tag{10$'$}$$

(n – порядок матрицы).

В вещественной области квазиортогональные матрицы n-го порядка, за исключением нуля, точно так же составляют мультипликативную группу. Модулем, или абсолютной величиной, квазиортогональной матрицы является величина

$$|A| = \sqrt{A\widetilde{A}}. \tag{12}$$

Формула (10$'$) верна, разумеется, и для вещественной квазиортогональной матрицы n-го порядка. Согласно (9) – (12) модуль произведения квазиунитарных (квазиортогональных) матриц равен произведению модулей сомножителей.

Группу (по умножению) квазиунитарных матриц n-го порядка (кроме нуля) обозначим символом $QU(n)$, а группу (по умножению) квазиортогональных матриц n-го порядка (кроме нуля) – символом $QO(n)$. Группу квазиунитарных матриц n-го порядка с положительным детерминантом обозначим через $QSU(n)$, а такую же группу квазиортогональных матриц – через $QO^{+}(n)$.

Подчеркнем, что совокупность квазиортогональных и квазиунитарных матриц n-го порядка содержит нулевую матрицу, что не имеет места для ортогональных и унитарных матриц.

§3. Примеры гипертел, гиперполей и гиперколец

1) Квазиортогональные вещественные матрицы второго порядка, образующие (кроме нуля) мультипликативную группу $QO(2)$.

Рассмотрим вещественную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Транспонируя A, получим:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} x & a_{21} \\ y & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Нас интересуют квазиортогональные матрицы. Условия квазиортогональности (7) дают:

$$(A\widetilde{A})_{11} = x^2 + y^2, \tag{15}$$

$$(A\widetilde{A})_{12} = xa_{21} + ya_{22} = 0, \tag{16}$$

$$(A\widetilde{A})_{21} = a_{21}x + a_{22}y = 0, \tag{16$'$}$$

$$(A\widetilde{A})_{22} = (A\widetilde{A})_{11} = a_{21}^2 + a_{22}^2 = x^2 + y^2. \tag{17}$$

Поскольку уравнения (16) и (16′) совпадают, имеем систему уравнений (16), (17) относительно a_{21}, a_{22}:

$$xa_{21} + ya_{22} = 0, \qquad (16)$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = x^2 + y^2. \qquad (17)$$

Уравнение (16) дает

$$a_{21} = -\frac{y}{x}\, a_{22}. \qquad (16'')$$

Подставляя (16″) в (17), получим:

$$\frac{(x^2 + y^2)a_{22}^2}{x^2} = x^2 + y^2. \qquad (17')$$

При $x \neq 0$ имеем:

$$a_{22}^2 = x^2$$

откуда

$$a_{22} = \pm x. \qquad (17'')$$

Подставляя (17″) в (16″), получим:

$$a_{21} = \mp y. \qquad (18)$$

Следовательно, имеем два решения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

При $x = 0, y \neq 0$ уравнения (16) и (17) дают:

$$a_{22} = 0, \qquad (21)$$

$$a_{21} = \mp y. \qquad (22)$$

Для матрицы A имеем:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}, \qquad (19')$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & y' \\ y' & 0 \end{pmatrix}. \qquad (20')$$

Матрицы (19′) и (20′) являются частными случаями матриц A_1 и A_2 ((19) и (20)). Наконец, при $x = y = 0$ имеем, согласно (17):

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 0, \qquad (23)$$

откуда

$$a_{21} = a_{22} = 0, \qquad (24)$$

и мы получим нулевую матрицу

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Но матрицы (25) также являются частными случаями матриц A_1 и A_2 ((19) и (20)).

Таким образом, квазиортогональные матрицы второго порядка в общем случае сводятся к матрицам A_1 и A_2, определяемым формулами (19) и (20). Матрицы A_1 и A_2 определяются независимыми переменными $x, y; x', y'$.

Как известно [2], матрицы A_1, определяемые формулой (19), изоморфны комплексным числам, причем модуль матрицы равен модулю комплексного числа. Легко видеть, что матрицы A_1 (комплексные числа) образуют (кроме нуля) мультипликативную группу $QO^+(2)$.

Как известно, придавая x и y различные значения и складывая матрицы типа A_1 (комплексные числа), получим:

$$A_1|_{x_1,y_1} + A_1|_{x_2,y_2} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ -y_1-y_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

т. е. снова матрицы типа A_1 – квазиортогональные матрицы (комплексные числа). Точно так же сложение матриц типа A_2 дает снова матрицы типа A_2. Сумма же A_1+A_2 матриц A_1 и A_2 есть, вообще говоря, матрица, не принадлежащая ни к одному из указанных типов, т. е. не является квазиортогональной матрицей. Совокупности матриц A_1 и A_2 нигде, кроме нулевой матрицы, не пересекаются и, следовательно, являются двумя аддитивными группами, пересекающимися только в нуле.

Произведение двух матриц типа A_1 (комплексных чисел), как известно, есть снова матрица типа A_1 (т. е. комплексное число).

Далее, имеем:

$$A_3 = (A_2|_{x=x_1',\,y=y_1'}) \cdot (A_2|_{x=x_2',\,y=y_2'}) = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ y_1' & -x_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2' & y_2' \\ y_2' & -x_2' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1'x_2' + y_1'y_2' & x_1'y_2' - y_1'x_2' \\ y_1'x_2' - x_1'y_2' & y_1'y_2' + x_1'x_2' \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Мы видим, что A_3 – матрица типа A_1, т. е. комплексное число, хотя и зависит от порядка сомножителей.

Наконец,

$$A_4 = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yy' & xy' - yx' \\ -yx' + xy' & -yy' - xx' \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$A_5 = A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'x - y'y & x'y + y'x \\ y'x + x'y & y'y - x'x \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Таким образом, $A_1A_2 \neq A_2A_1$, но как $A_4 = A_1A_2$, так и $A_5 = A_2A_1$ являются матрицами типа A_2. Мы убедились в том, что:

a) квазиортогональные матрицы второго порядка не являются ни телом, ни даже кольцом, но представляют собой гипертело второго порядка;

b) матрицы типа A_1 (кроме нулевой матрицы) представляют собой нормальный делитель всей мультипликативной группы, причем аддитивная группа A_2 (без нуля) – класс смежности по нормальному делителю A_1;

c) поскольку, как легко видеть, аддитивные группы A_1 и A_2 – векторные двухмерные пространства над полем действительных чисел, то квазиортогональные матрицы второго порядка представляют собой гипералгебру второго порядка второго ранга с делением по аддитивным группам над полем действительных чисел.

2) Квазиунитарные матрицы второго порядка, образующие (кроме нуля) мультипликативную группу $QU(2)$.

а) Пусть теперь A – комплексная матрица второго порядка. Как и в предыдущем примере, положим

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Определим матричные элементы a_{21} и a_{22} для квазиунитарной матрицы. Для A^+ получим:

$$A^+ = \begin{pmatrix} x^* & a_{21^*} \\ y^* & a_{22}^* \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Выпишем условия квазиунитарности:

$$(AA^+)_{11} = |x|^2 + |y|^2, \tag{31}$$

$$(AA^+)_{12} = xa_{21}^* + ya_{22}^* = 0, \tag{32}$$

$$(AA^+)_{21} = a_{21}x^* + a_{22}y^* = 0, \tag{33}$$

$$(AA^+)_{22} = |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 = |x|^2 + |y|^2. \tag{34}$$

Решая систему уравнений(33), (34), получим:

$$a_{21} = -\frac{a_{22}y^*}{x^*}, \tag{35}$$

$$|a_{22}|^2 \frac{(|y|^2 + |x|^2)}{|x|^2} = |x|^2 + |y|^2. \tag{36}$$

При $x \neq 0$ формула (36) дает:

$$|a_{22}| = |x|. \tag{37}$$

Не нарушая общности, запишем:

$$a_{22} = x^* e^{i\varphi}. \tag{38}$$

Подставляя (38) в (35), имеем:

$$a_{21} = -y^* e^{i\varphi}. \tag{39}$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* e^{i\varphi} & x^* e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

При $x = 0$, $y \neq 0$ получим, согласно (33), (34):

$$a_{22} = 0, \tag{41}$$

$$|a_{21}| = |y|, \tag{42}$$

откуда, не нарушая общности,

$$a_{21} = -y^* e^{i\varphi}. \tag{39$'$}$$

При $x = 0$, $y = 0$ получим, согласно (34):

$$a_{21} = a_{22} = 0. \tag{43}$$

Таким образом, общий вид квазиунитарной матрицы дается формулой (40).

Назовем φ в формуле (40) угловым параметром квазиунитарной матрицы второго порядка. Легко видеть, что все матрицы A с одним и тем же угловым параметром φ составляют аддитивную группу.

Рассмотрим теперь две квазиунитарные матрицы с угловыми параметрами φ_1 и φ_2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^* e^{i\varphi_1} & x_1^* e^{i\varphi_1} \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2^* e^{i\varphi_2} & x_2^* e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}, \tag{45}$$

$$A_{12} = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} x_{12} & y_{12} \\ -y_{12}^* e^{i\varphi_{12}} & x_{12}^* e^{i\varphi_{12}} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где

$$x_{12} = x_1 x_2 - y_1 y_2^* e^{i\varphi_2}, \tag{47}$$

$$y_{12} = x_1 y_2 + y_1 x_2^* e^{i\varphi_2}, \tag{48}$$

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi \qquad (k \text{ – целое}). \tag{49}$$

Произведение A_{12}, как и должно быть, описывается формулой (46), однотипной с формулой (40), причем его угловой параметр (с точностью до $2k\pi$) равен сумме угловых параметров сомножителей. Легко видеть из формулы (40), что:

$$det\, A = |det\, A| e^{i\varphi}. \tag{40$'$}$$

В общем случае для матриц n-го порядка, очевидно, также выполняется равенство (40′), где φ – некоторый угол. Назовем φ в формуле (40′) угловым параметром квазиунитарной матрицы n-го порядка. Очевидно, что и в общем случае квазиунитарной матрицы n-го порядка выполняется соотношение (49).

При $\varphi = 0$ квазиунитарные матрицы n-го порядка (кроме нуля) образуют мультипликативную группу $QSU(n)$ – подгруппу группы $QU(n)$.

Матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix} \tag{50}$$

с нулевым угловым параметром, как известно [4], изоморфны кватернионам. Они представляют собой (без нуля) нормальный делитель всей мультипликативной группы, поскольку содержат единичную матрицу.

Таким образом, из формул (44)–(50) следует, что квазиунитарные матрицы второго порядка представляют собой гипертело бесконечного порядка.

b) Рассмотрим теперь в качестве частного случая матрицы типа

$$A_{1,0} = A_1|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^* & x_1^* \end{pmatrix}, \tag{44$'$}$$

$$A_{2,0} = A_2|_{\varphi=\pi} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2^* & -x_2^* \end{pmatrix}. \tag{45$'$}$$

Матрицы $A_{1,0}$ типа A_0 (см. (50)) и, следовательно, изоморфны кватернионам. Матрицы типа $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ представляют собой, согласно предыдущему, две аддитивные группы. Имеем:

$$A_{10,10'} = A_{1,0}A'_{1,0} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^* & x_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \\ -y_1'^* & x_1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x'_1 - y_1y_1'^* & x_1y'_1 + y_1x_1'^* \\ -x_1^*y_1'^* - y_1^*x'_1 & x_1^*x_1'^* - y_1^*y'_1 \end{pmatrix} \tag{51}$$

– матрицы типа $A_{1,0}$;

$$A_{20,20'} = A_{2,0}A'_{2,0} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2^* & -x_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 & y'_2 \\ y_2'^* & -x_2'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2x'_2 + y_2y_2'^* & x_2y'_2 - x_2'^*y_2 \\ y_2^*x'_2 - x_2^*y_2'^* & y_2^*y'_2 + x_2^*x_2'^* \end{pmatrix} \tag{52}$$

– матрицы типа $A_{1,0}$;

$$A_{10,20} = A_{1,0}A_{2,0} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1y_2^* & x_1y_2 - y_1x_2^* \\ -y_1^*x_2 + x_1^*y_2^* & -y_1^*y_2 - x_1^*x_2^* \end{pmatrix} \tag{53}$$

– матрицы типа $A_{2,0}$;

$$A_{20,10} = A_{2,0}A_{1,0} = \begin{pmatrix} x_2x_1 - y_2y_1^* & x_2y_1 + y_2x_1^* \\ y_2^*x_1 + x_2^*y_1^* & y_2^*y_1 - x_1^*x_2^* \end{pmatrix} \tag{54}$$

– матрицы типа $A_{2,0}$; легко показать, что матрицы, обратные матрицам $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$, также являются матрицами типа $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ соответственно. Матрицы $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ составляют, таким образом, гипертело второго порядка, причем матрицы $A_{1,0}$ (без нуля) – нормальный делитель мультипликативной группы.

3) Квазиунитарные матрицы второго порядка с кватернионными матричными элементами и измененными законами умножения.

Рассмотрим произведение матриц n-го порядка $A_{(1)}$ и $A_{(2)}$ с измененным законом умножения:

$$D_{ik} = (A_{(1)} \circ A_{(2)})_{ik} = \sum_l A_{(1)il} P_{il,\,lk} A_{(2)lk}, \tag{55}$$

где $P_{il,\,lk}$ – оператор,

$$P_{il,\,lk} = \begin{cases} 1 \text{ для } A_{(1)il} \text{ и } A_{(2)lk}, \text{ которые не переставляются,} \\ p \text{ для } A_{(1)il} \text{ и } A_{(2)lk}, \text{ которые переставляются,} \end{cases} \tag{56}$$

т. е.

$$A_{(1)il} p A_{(2)lk} = A_{(2)lk} A_{(1)il}. \tag{57}$$

Нетрудно показать, что рассматриваемое изменение закона умножения матриц не нарушает дистрибутивных законов. Получим также условия, при которых выполняется правило сопряжения произведения матриц:

$$D^+ = (A_{(1)} \circ A_{(2)})^+ = A^+_{(2)} \circ A^+_{(1)}, \quad (D = A_{(1)} \circ A_{(2)}). \tag{a}$$

Имеем:

$$D_{ik} = (A_{(1)} \circ A_{(2)})_{ik} = \sum_l A_{(1)il} P_{il,lk} A_{(2)lk}, \quad D_{ki} = \sum_l A_{(1)kl} P_{kl,li} A_{(2)li}.$$

Поскольку $(D^+)_{ik} = D^+_{ki}$, получим:

$$(D^+)_{ik} = ((A_{(1)} \circ A_{(2)})^+)_{ik} = \sum_l (A_{(2)li})^+ P_{kl,li} (A_{(1)kl})^+. \tag{58$'$}$$

С другой стороны,

$$((A^+_{(2)} \circ A_{(1)})^+)_{ik} = \sum_l (A^+_{(2)})_{il} P_{il,lk} (A^+_{(1)})_{lk} = \sum_l (A_{(2)li})^+ P_{il,lk} (A_{(1)kl})^+. \tag{58$''$}$$

Приравнивая правые части (58$'$) и (58$''$), получаем условия выполнения соотношения (a):

$$P_{il,lk} = P_{kl,li}. \tag{58}$$

Рассмотрим теперь матрицы второго порядка вида (40), но теперь x, y – кватернионы. Если потребовать, чтобы $-y^+e^{i\varphi}, x^+e^{i\varphi}$ также были кватернионами, то $e^{i\varphi}$ должно быть действительным числом, что возможно только при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Таким образом, будем считать, что φ принимает только два значения, причем $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$. При этом $e^{i\varphi}$ перестановочно с кватернионами. Для A^+_φ имеем:

$$A^+_\varphi = \begin{pmatrix} x^+ & -ye^{-i\varphi} \\ y^+ & xe^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Далее,

$$A_\varphi A^+_\varphi = \begin{pmatrix} |x|^2 + |y|^2 & (-xy + yx)e^{-i\varphi} \\ (-y^+x^+ + x^+y^+)e^{i\varphi} & |y|^2 + |x|^2 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

В силу некоммутативности x и y, а также x^+, y^+ недиагональные элементы матрицы $A_\varphi A^+_\varphi$ не обращаются в нуль, поэтому A_φ не квазиунитарна при обычном законе умножения матриц. Введем теперь операторы $P_{il,lk}$ в закон умножения матриц вида (40), подобрав их таким образом, чтобы матрицы A_φ стали квазиунитарными. Выпишем коэффициенты $P_{il,lk}$ в виде матрицы

$$P = \begin{pmatrix} P_{11,11} & P_{12,21} & P_{11,12} & P_{12,22} \\ P_{21,11} & P_{22,21} & P_{21,12} & P_{22,22} \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Существует восемь значений матрицы P, при которых матрицы A квазиунитарны и составляют квазиунитарные группоид. Для этих вариантов матрицы P равны:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & p & p & p \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & 1 \\ p & 1 & p & p \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & p \\ 1 & p & p & 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} p & 1 & p & 1 \\ p & 1 & p & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 1 & p & 1 & p \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & p & p & 1 \\ p & 1 & 1 & p \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} p & p & 1 & p \\ 1 & p & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_8 = \begin{pmatrix} p & p & p & 1 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Во всех вариантах, как следует из формул, которые приведены в дополнении, квазиунитарные матрицы представляют собой гиперкольца. Эти гиперкольца, как можно показать, состоят из двух аддитивных векторных пространств, представляемых матрицами $A\big|_{\varphi=0}$ и $A\big|_{\varphi=\pi}$, и являются гипералгебрами второго порядка восьмого ранга над полем действительных чисел. Легко проверяется выполнение условия

$$(A_{\varphi 1} \circ A_{\varphi 2})^+ = A^+_{\varphi 2} A^+_{\varphi 1} \tag{63}$$

для всех вариантов. В шестом варианте матрицы $A\big|_{\varphi=0}$ представляют собой алгебру Кэли [1] (матрицы $A\big|_{\varphi=0}$, как известно и легко показать, альтернативны [1], однако этого нельзя сказать о всех матрицах второго порядка с кватернионными матричными элементами и законом умножения (55)). Матрицы A_φ в данном случае представляют собой гипералгебру второго порядка восьмого ранга над полем действительных чисел с делением. Нетрудно показать, что не только для алгебры Кэли, но и для всей гипералгебры матриц A_φ выполняется соотношение

$$|A_{\varphi 1}\circ A_{\varphi 2}| = |A_{\varphi 1}|\cdot|A_{\varphi 1}|. \tag{64}$$

В остальных семи вариантах $|A_{\varphi 1}\circ A_{\varphi 2}| \neq |A_{\varphi 1}|\cdot|A_{\varphi 1}|$.

4) а. Квазиортогональные вещественные матрицы третьего порядка вида

$$A_{00} = \begin{pmatrix} x & y & 0\\ -y & x & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{x^2+y^2}\end{pmatrix}\ (a), \qquad A_{10} = \begin{pmatrix} x' & y' & 0\\ y' & -x' & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{x'^2+y'^2}\end{pmatrix}\ (b), \tag{65}$$

$$A_{01} = \begin{pmatrix} x'' & y'' & 0\\ -y'' & x'' & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{x''^2+y''^2}\end{pmatrix}\ (a), \quad A_{11} = \begin{pmatrix} x''' & y''' & 0\\ y''' & -x''' & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{x'''^2+y'''^2}\end{pmatrix}\ (b). \tag{66}$$

Сами по себе матрицы (65) – (66) квазиортогональны, но квазиортогональность теряется, если складывать друг с другом эти матрицы даже одного типа по обычным правилам. Это положение может быть исправлено, если изменить правила сложения.

Для сокращения выкладок запишем матрицы (65) – (66) в компактном виде

$$A^l_{ik} = \begin{pmatrix} x_l & y_l & 0\\ (-1)^{i+1}y_l & (-1)^i x_l & 0\\ 0 & 0 & (-1)^k\sqrt{x_l^2+y_l^2}\end{pmatrix}, \quad (i,k=0,1). \tag{67}$$

Определим теперь сумму двух матриц одного типа A^1_{ik} и A^2_{ik} следующим образом:

$$A^0_{ik} = A^1_{ik}(+)A^2_{ik} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & 0\\ (-1)^{i+1}(y_1+y_2) & (-1)^i(x_1+x_2) & 0\\ 0 & 0 & (-1)^k\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\end{pmatrix}. \tag{68}$$

Из формулы (68) видно, что определенный ею закон сложения является ассоциативным. Также очевидно, что определенная формулой (68) суммарная матрица остается квазиортогональной. Матрицам (65) – (66), как квазиортогональным, соответствуют обратные матрицы. При умножении матриц типа (65) – (66), или (67), получаются матрицы тех же типов со следующей таблицей умножения

$-$	A''_{00}	A''_{10}	A''_{01}	A''_{11}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{10}$	$\tilde{A}_{01}$	$\tilde{A}_{11}$
A'_{10}	$\tilde{A}_{10}{}'$	$\tilde{A}_{00}{}'$	$\tilde{A}_{11}{}'$	$\tilde{A}_{01}{}'$
A'_{01}	$\tilde{A}_{01}$	$\tilde{A}_{11}$	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{10}$
A'_{11}	$\tilde{A}_{11}{}'$	$\tilde{A}_{01}{}'$	$\tilde{A}_{10}{}'$	$\tilde{A}_{00}{}'$

Таблица № 1

(*Ремарка.* Первый множитель берется в первом столбце, второй – в верхней строке, произведение – на пересечении соответствующих строк и столбцов; например, $A'_{10} \cdot A''_{01} = \tilde{A}_{11}$ и т. д.)

Следовательно, матрицы типа (65) – (66), или (67) (кроме нуля) составляют группу, матрицы типа (65a) (кроме нуля) – нормальный делитель этой группы (как содержащие единичную матрицу); матрицы типа (65b) – (66b) (кроме нуля) – смежные классы по нормальному делителю. Они, как совокупности, вместе с нормальным делителем, но без нуля, являются (см. таблицу 1) элементами коммутативной факторгруппы [1,3]. Таблица 1 дает закон умножения факторгруппы – нормального делителя типа A_{00} и классов смежности типа A_{10}, A_{01} и A_{11}. Матрицы типа (67) представляют собой аддитивные группы согласно правилу сложения (68), поскольку сумма двух матриц одного типа – матрица того же типа; имеется 0 (нулевая матрица) и есть противоположная матрица

$$-A^l_{ik}(x, y) = A^l_{ik}(-x, -y.)$$

Покажем, что для матриц типа (67) с правилом сложения (68) выполняются законы дистрибутивности. Действительно,

$$A^1_{ik} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ (-1)^{i+1} y_1 & (-1)^i x_1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \end{pmatrix}, \tag{69}$$

$$A^2_{ik} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 0 \\ (-1)^{i+1} y_2 & (-1)^i x_2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \end{pmatrix}, \tag{70}$$

$$A^1_{ik}(+)A^2_{ik} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & 0 \\ (-1)^{i+1}(y_1 + y_2) & (-1)^i (x_1 + x_2) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \end{pmatrix}. \tag{71}$$

$$A^3_{lm} = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 & 0 \\ (-1)^{l+1} y_3 & (-1)^l x_3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m \sqrt{x_3^2 + y_3^2} \end{pmatrix}, \tag{72}$$

$$\left(A^1_{ik}(+)A^2_{ik}\right) A^3_{lm} =$$

$$\begin{pmatrix} (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3(-1)^{l+1} & (x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3(-1)^l & 0 \\ (-1)^{i+1}(y_1 + y_2)x_3 + (-1)^{i+l+1}(x_1 + x_2)y_3 & (-1)^{i+1}(y_1 + y_2)y_3 + (x_1 + x_2)x_3(-1)^{i+l} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k+m} \sqrt{[(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2](x_3^2 + y_3^2)} \end{pmatrix}. \tag{73}$$

Далее,

$$A^r_{ik}A^3_{lm} = \begin{pmatrix} (x_rx_3 + y_ry_3(-1)^{l+1} & x_ry_3 + y_rx_3(-1)^l & 0 \\ (-1)^{i+1}y_rx_3 + (-1)^{i+l+1}y_3x_r & (-1)^{i+1}y_3y_r + (-1)^{i+l}x_rx_3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k+m}\sqrt{(x_r^2+y_r^2)(x_3^2+y_3^2)} \end{pmatrix}. \tag{74}$$

$(r = 1, 2)$. В результате несложных вычислений получим:

$$A^1_{ik}A^3_{lm}(+)A^2_{ik}A^3_{lm} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)x_3 + (y_1+y_2)y_3(-1)^{l+1} & (x_1+x_2)y_3 + (y_1+y_2)x_3(-1)^l & 0 \\ (x_1+x_2)y_3(-1)^{i+l+1} + (y_1+y_2)x_3(-1)^{i+1} & (x_1+x_2)x_3(-1)^{i+l} + (y_1+y_2)y_3(-1)^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k+m}\sqrt{[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2](x_3^2+y_3^2)} \end{pmatrix}. \tag{75}$$

Из (73) и (75) следует:

$$A^1_{ik}A^3_{lm}(+)A^2_{ik}A^3_{lm} = \big(A^1_{ik}(+)A^2_{ik}\big)A^3_{lm}, \tag{76}$$

т. е. правое правило дистрибутивности. Левое правило дистрибутивности доказывается аналогично.

Мы видим, что квазиортогональные матрицы A_{ik} при фиксированных i, k являются аддитивными группами, а их совокупность (кроме нуля) представляет собой мультипликативную группу. При этом, матрицы A_{00}, как легко показать, изоморфны комплексным числам, если при суммировании использовать знак $(+)$, но не знак $+$. Матрицы A_{ik}, взятые в отдельности при фиксированных i, k, как легко показать, представляют собой векторные двухмерные пространства над полем действительных чисел. Таким образом, совокупность матриц третьего порядка A_{ik} представляет собой гиперalgебру четвертого порядка второго ранга с делением над полем действительных чисел, если сложение производить согласно формуле (68).

b. Легко показать с помощью таблицы 1, что каждая из совокупностей матриц $A_{00}, A_{10}; A_{00}, A_{01}; A_{00}, A_{11}$ представляет собой гиперподалгебру второго порядка второго ранга с делением. (Таблицы 2,3,4 – таблицы умножения для этих совокупностей, причем факторгруппы мультипликативных групп всех трех гиперподалгебр изоморфны.)

$-$	A''_{00}	A''_{10}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{10}$
A'_{10}	$\tilde{A}_{10}{}'$	$\tilde{A}_{00}{}'$

$-$	A''_{00}	A''_{01}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{01}$
A'_{01}	$\tilde{A}_{01}$	$\tilde{A}_{00}$

$-$	A''_{00}	A''_{11}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{11}$
A'_{11}	$\tilde{A}_{11}{}'$	$\tilde{A}_{00}{}'$

Таблицы 2 − 4

Отметим в связи со сказанным изоморфизм всех конечных групп заданного простого порядка [1].

Если индексы i, k в A_{ik} считать элементами конечного поля Z_2 [2], принимающими значения $0, 1$, причем $0+0 = 0,\ 0+1 = 1+0 = 1,\ 1+1 = 0\ (mod\, 2)$, то совокупность

i,k представляет собой двухмерный вектор над этим полем. Из таблицы 1 и таблиц 2,3,4 видно, что всегда выполняется условие

$$A_{i,k}A_{l,m} = A_{i+l,\,k+m}. \tag{77}$$

Следовательно, если составить из совокупностей матриц $A_{i,k}$ прямую сумму

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_{00} \oplus \widetilde{A}_{10} \oplus \widetilde{A}_{01} \oplus \widetilde{A}_{11},$$

а умножение ее элементов A производить согласно дистрибутивному закону и формуле (77), то получим стандартную градуированную алгебру [5].

5) Гипералгебра с делением над полем действительных чисел, соответствующая кольцу формальных действительных степенных рядов.

Рассмотрим кольцо формальных действительных степенных рядов M [1]:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{78}$$

где a_k – действительные числа.

Совокупность аддитивных групп A_k с элементами $a_k x^k$ представляет собой, очевидно, гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел.

6) Гипералгебра с делением над полем комплексных чисел, соответствующая кольцу формальных комплексных рядов Фурье вида

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}, \tag{79}$$

где f_k – комплексные числа, k – целые числа, x – действительный аргумент. Совокупность аддитивных групп F_k с элементами $f_k e^{ikx}$ представляет собой гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем комплексных чисел.

7) Действительная и мнимая оси в стандартной групповой гиперкомплексной системе n-ранга является гипералгеброй n порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел по этим осям.

8) а) *Прямые на комплексной плоскости, проходящие через начало координат.*

Рассмотрим совокупность прямых:

$$z = x + iy = \rho e^{i(\varphi + k\pi)}, \tag{80}$$

k – целое, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

При четном k имеем луч

$$z_1 = \rho e^{i\varphi,} \tag{81}$$

при нечетном – луч

$$z_2 = -\rho e^{i\varphi,}. \tag{80$'$}$$

Каждая прямая (φ задано) представляет собой аддитивную группу, действительная ось

$$z = \rho e^{ik\pi} \tag{82}$$

представляет собой поле действительных чисел, являясь (кроме нуля) нормальным делителем всех прямых комплексной плоскости, содержащих нуль, кроме нуля. Таким образом, легко видеть, что комплексная плоскость представляет собой гиперал-гебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел по прямым, проходящим через начало координат (и, разумеется, алгебру второго ранга с делением над полем действительных чисел).

b) *Действительная и мнимая оси комплексной плоскости.*

Уравнения этих прямых запишутся соответственно

$$z_1 = \rho_1 e^{ik_1\pi} - \tag{83}$$

действительные числа,

$$z_2 = \rho_2 e^{i(\pi/2+k_2\pi)} - \tag{84}$$

мнимые числа (k_1 и k_2 – целые числа).

Каждая из этих прямых – аддитивная группа.

Далее, имеем:

$$z_1 \cdot z_1' = \rho_1\rho_1' e^{i(k_1+k_1')\pi} - \tag{85}$$

действительные числа,

$$z_2 \cdot z_2' = \rho_2\rho_2' e^{i[\pi+(k_2+k_2')\pi]} = \rho_2\rho_2' e^{i(k_2+k_2'+1)\pi} - \tag{86}$$

действительные числа,

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = \rho_1\rho_2 e^{[\pi/2+i(k_1+k_2)\pi]} - \tag{87}$$

мнимые числа. Кроме того, обратные действительным числам суть

$$1/z_1 = 1/\rho_1 e^{-ik_1\pi} - \tag{88}$$

действительные числа; обратные мнимым числам –

$$1/z_2 = 1/\rho_2 e^{i(-\pi/2-k_2\pi)} = 1/\rho_2 e^{i[\pi/2-(k_2+1)\pi]} - \tag{89}$$

мнимые числа.

Чисто действительные и чисто мнимые числа (кроме нуля) представляют собой мультипликативную группу, действительные числа – нормальный делитель этой группы.

Таким образом, действительная и мнимая оси совместно являются гипералгеброй второго порядка первого ранга (по этим осям) с делением над полем действительных чисел.

9) *Действительная и мнимая оси кватернионов* являются гипералгеброй 4-го порядка 1-го ранга с делением над полем действительных чисел.

10) *Множество именованных (размерных) действительных чисел, применяемых в физике и геометрии.*

Числа, не имеющие размерности, являются частным случаем таких чисел. Как известно, суммируются только числа, имеющие одинаковую размерность, и, в частности, числа, не имеющие размерности. Таким образом, числа с одинаковой размерностью (в том числе числа, не имеющие размерности), представляют собой пересекающиеся только в нуле аддитивные группы, а вся совокупность действительных чисел, кроме нуля, представляет собой мультипликативную группу. Безразмерные действительные числа (кроме нуля) представляют собой нормальный делитель всей мультипликативной группы. Следовательно, размерные и безразмерные действительные числа в совокупности представляет собой гиперsucc гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем безразмерных действительных чисел. Таким образом, физические величины "не укладываются" в кольцо.

11) Совокупность размерных и безразмерных целых чисел представляет собой гиперкольцо бесконечного порядка, поскольку указанная совокупность представляет собой только мультипликативную полугруппу [1] (целые числа не всегда можно делить друг на друга).

12) Трехмерное вещественное векторное пространство, в котором в качестве произведения векторов берется их векторное произведение [1]. Аддитивными группами множества M являются векторные пространства полярных и аксиальных векторов. Поскольку аксиальные и полярные векторы друг с другом обычно напрямую не складываются, сумма полярных и аксиальных векторов, как правило, не является кольцом. Произведение двух полярных векторов является аксиальным вектором; произведение двух аксиальных векторов – также аксиальный вектор, а произведение полярного вектора на аксиальный (в любом порядке) – полярный вектор. Следовательно, рассматриваемое множество является гипералгеброй второго порядка третьего ранга над полем действительных чисел. Пространство аксиальных векторов, как легко видеть, является кольцом. Таким образом, представление о векторном умножении как об умножении в кольце неполно.

Заметим, что во всех приведенных примерах фактор-группоиды и фактор-группы были коммутативными. Отметим также, что фактор-группы в примерах 1, 2b, 7b как группы простого (второго) порядка изоморфны.

Список примеров гипертел (гиперполей, гиперколец) можно было бы продолжить. Как известно, гиперкомплексные системы представляют собой действительные алгебры n-го ранга с единицей, $n > 2$ и конечно. Если включить в гиперкомплексные системы бинарные (со сложением и умножением) дистрибутивные алгебраические структуры с единицей над полем действительных чисел, содержащие более чем одно векторное пространство, то действительные гиперкольца с единицей также являются обобщенными гиперкомплексными системами, если они не сводятся к кольцам.

Заключение

Понятия гиперкольца, гипертела, гиперполя, гипералгебры являются непосредственным обобщением понятий кольца, тела, поля, алгебры, где определены две бинарные операции – сложение и умножение, связанные левым и правым дистрибутивными законами.

Для нужд физики имеет смысл подчеркнуть важность того, что:

1) физические величины не являются подмножеством кольца;

2) операция векторного умножения в множестве полярных и аксиальных векторов, вообще говоря, не является умножением в кольце.

Дополнение

Произведение квазиунитарных матриц второго порядка $A_{\varphi 1} \cdot A_{\varphi 2}$ с кватернионными матричными элементами и измененными законами умножения.

$$A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^+ e^{i\varphi_1} & x_1^+ e^{i\varphi_1} \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2^+ e^{i\varphi_2} & x_2^+ e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

$$1)\ P_1,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2^+ e^{i\varphi_2} & x_1y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$2)\ P_2,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2^+ e^{i\varphi_2} & y_2x_1 + y_1x_2^+ e^{i\varphi_2} \\ -x_2y_1^+ e^{i\varphi_1} - x_1^+ y_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$3)\ P_3,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2x_1 - y_1y_2^+ e^{i\varphi_2} & x_1y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_1^+ x_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$4)\ P_4,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2x_1 - y_1y_2^+ e^{i\varphi_2} & y_2x_1 + y_1x_2^+ e^{i\varphi_2} \\ -x_2y_1^+ e^{i\varphi_1} - x_1^+ y_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_1^+ x_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$5)\ P_5,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} & x_1y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+ y_2 e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$6)\ P_6,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} & y_2x_1 + y_1x_2^+ e^{i\varphi_2} \\ -x_2y_1^+ e^{i\varphi_1} - x_1^+ y_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+ y_2 e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$7)\ P_7,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2x_1 - y_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} & x_1y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+ y_2 e^{i\varphi_1} + x_1^+ x_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$8)\ P_8,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2x_1 - y_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} & y_2x_1 + y_1x_2^+ e^{i\varphi_2} \\ -x_2y_1^+ e^{i\varphi_1} - x_1^+ y_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+ y_2 e^{i\varphi_1} + x_1^+ x_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

Литература

[1] Курош А. Г. "Лекции по общей алгебре", ГИФМЛ, М., 1962 г.

[2] Курош А. Г. "Курс высшей алгебры", 2-е изд., ГИТТЛ, М.-Л., 1949 г.

[3] М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов. "Применение теории групп в квантовой механике". "Наука", ГРФМЛ, М., 1967 г.

[4] Э. Маделунг. "Математический аппарат физики". Справочное руководство. Пер. с 6-го немецкого издания под ред. В. И. Левина. 2-е изд., "Наука", ГРФМЛ, М., 1968.

[5] С. Ленг. "Алгебра". Пер. с англ. под ред. А. И. Кострикина. "Мир", М., 1968.