О НОРМЕ БИКВАТЕРНИОНОВ И ИНЫХ АЛГЕБР С ЦЕНТРАЛЬНЫМ СОПРЯЖЕНИЕМ

А. А. Элиович

eliovich@mail.ru

В работе на примере алгебр бикватернионов и биоктав вводится понятие центрального сопряжения. Все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры являются алгебрами с центральным сопряжением. С помощью предложенного метода анализа допустимых алгеброй сопряжений вводится ряд новых результатов. Доказывается, что алгебры с центральным сопряжением моноассоциативны и монокомпозиционны. Доказывается, что альтернативные алгебры с центральным сопряжением обладают мультипликативной нормой 2 степени (вообще говоря, не вещественной). Как следствие, эти алгебры (в частности, бикватернионы и биоктавы) обладают мультипликативной вещественной нормой степени выше 2, которая может иметь несколько разных, но эквивалентных представлений. Вводится квадроскалярное и квадровекторное произведение. Для алгебр бикватернионов, дикватернионов и биоктав ряд результатов представлен в изотропных базисах. Полученный аппарат может оказаться полезным при использовании алгебр бикватернионов и биоктав в геометрии и физике.

Введение

Бикватернионы – перспективная гиперкомплексная алгебра, являющаяся довольно естественным языком для релятивистской физики. Многие, кто когда-то были очарованы красотой кватернионов, вслед за этим переоткрывали и бикватернионы. Хороший обзор известных возможностей применения бикватернионов дан в [1]. Изучая бикватернионы десять лет назад, в 1994 г., автор установил для своего использования ряд фактов и формул, сочтя их слишком элементарными для публикации. Недавно выяснилось, что некоторые их этих фактов, по-видимому, остаются неизвестными, в том числе и для тех, кто работает с бикватернионами. В связи с этим, ряд вопросов в отношении бикватернионов до сих пор освещается некорректно. Распространено мнение, что бикватернионы а) обладают вещественной нормой 2 степени и б) норма бикватернионов не является мультипликативной (т. е. норма произведения не равна произведению норм). Это утверждение встречается даже в энциклопедических обзорах, например, [2]. Однако, подобная норма (механически записываемая в виде суммы и разности квадратов) не согласована с таблицей умножения бикватернионов и является для них довольно искусственной. Правильное утверждение, что бикватернионы обладают комплексной нормой 2 степени (и, как следствие, вещественной нормой 4 степени), встречается довольно редко. И автор ни разу не нашел в литературе указание на мультипликативность этой нормы.

Возможно, невнимание к формам степени выше 2 объясняется тем, что все классические полупростые группы Ли есть группы инвариантности той или иной квадратичной формы. Поскольку геометрии согласно Эрлангенской программе Клейна связаны с теми или иными группами, формы степени выше 2 выглядят излишними.

Данная работа основывается на двух идеях: 1) рассмотрение набора сопряжений, заданных в алгебре, позволяет доказать многие факты более простым и более общим образом, чем с помощью непосредственных алгебраических выкладок; 2) правильнее изучать полинормы, естественно возникающие в алгебрах, чем приписывать им квадратичную норму.

Нормы и скалярные произведения степени выше 2 на гиперкомплексных алгебрах ввел в 1950-х годах Р. Д. Шафер (R. D. Schafer) [5] – [7], установив ряд основополагающих фактов в данной области. В последнее время в России идею применения полинорм гиперкомплексных чисел в физике активно пропагандирует Д. Г. Павлов [9], [10].

В данной статье для лучшего понимания вопроса изучаются параллельно бикватернионы и дикватернионы, а также биоктавы.

Алгебры кватернионов, бикватернионов и дикватернионов, биоктав

Кватернион (см., например, [3]) есть гиперкомплексное число

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3, \tag{1}$$

где a_i – вещественные числа, а орты $\mathbf{q}_i$ перемножаются согласно правилу умножения

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \qquad \mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk}1 + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n,$$

где δ_{jk} и ε_{jkn} – символы Кронекера и Леви-Чивиты $(j,k,n = 1,2,3)$.

Бикватернионы есть кватернионы, определенные над полем комплексных чисел ($\mathbf{i}_0^2 = -1$). *Дикватернионы* – это кватернионы, определенные над алгеброй двойных чисел ($\mathbf{i}_0^2 = +1$). В связи с этим, эти числа можно по-прежнему записывать в виде (1), имея в виду под коэффициентами a_i уже комплексные (двойные) числа. Однако, мы примем более свободную трактовку бикватернионов (дикватернионов) как 8-мерной алгебры над полем вещественных чисел, состоящей из двух блоков:

$$\mathbf{a} = a + k \cdot \mathbf{i}_0, \tag{2}$$

или, в развернутой записи,

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3, \tag{3}$$

где a, k – кватернионы с вещественными коэффициентами. $\mathbf{i}_0$ является внешней единицей, коммутирующей с кватернионами a, k; $\mathbf{i}_0^2 = -1$ для бикватернионов и $+1$ для дикватернионов, единицы $\mathbf{i}_j$ – результат внешнего (тензорного) произведения $\mathbf{i}_0 \otimes \mathbf{q}_j$. (Мы будем использовать для удобства изложения одинаковое обозначение $\mathbf{i}_0$ для обеих алгебр, поскольку перемешиваться в данной работе они не будут.) Отсюда вытекает правило умножения бикватернионов (дикватернионов, нижний знак) в блочном и табличном виде:

$$(a + k \cdot \mathbf{i}_0)(b + l \cdot \mathbf{i}_0) = ab \mp kl + (al + kb) \cdot \mathbf{i}_0. \tag{4}$$

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	∓ 1	$\mp\mathbf{q}_1$	$\mp\mathbf{q}_2$	$\mp\mathbf{q}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mp\mathbf{q}_1$	± 1	$\mp\mathbf{q}_3$	$\pm\mathbf{q}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mp\mathbf{q}_2$	$\pm\mathbf{q}_3$	± 1	$\mp\mathbf{q}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mp\mathbf{q}_3$	$\mp\mathbf{q}_2$	$\pm\mathbf{q}_1$	± 1

. $(Tab.\ 1)$

Дуокватернионы есть кватернионы, определенные над полем дуальных чисел ($\mathbf{i}_0^2 = 0$). Они в данной статье изучаться не будут.

Октонионы, или *октавы,* (см. [3] и [4]) есть гиперкомплексные числа вида

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + A_0\mathbf{e}_0 + A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3, \tag{5}$$

где правило умножения орт $\mathbf{q}_i, \mathbf{e}_j$ определяется на основании *формулы удвоения Кэли-Диксона* кватернионов:

$$(a + A\cdot\mathbf{e}_0)(b + B\cdot\mathbf{e}_0) = ab - \bar{B}A + (Ba + A\bar{b})\cdot\mathbf{e}_0, \tag{6}$$

(a, b, A, B – кватернионы, $\bar{b}$ – сопряженный кватернион b, об этом см. далее). Если снять различие между мнимыми элементами $\mathbf{q}_i$и $\mathbf{e}_j$ ($\mathbf{e}_j \equiv \mathbf{q}_{j+4}$), правило умножения может быть выражено следующим образом:

$$\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j \;=\; -\delta_{ij}\cdot 1 + C_{ijk}\mathbf{q}_k, \qquad i,j,k = 1,2,\ldots,7, \tag{7}$$

где полностью антисимметричные октонионные структурные константы C_{ijk} равны

$$C_{123} = C_{145} = C_{176} = C_{246} = C_{257} = C_{347} = C_{365} = 1 \tag{8}$$

(и обращаются в нуль в при других сочетаниях индексов).

Для удобства приведем таблицу умножения октав:

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	-1

. ($Tab.$ 2)

Наконец, *биоктавы (биоктонионы)* – это октавы, определенные над полем комплексных чисел. Из определения вытекает правило их умножения в блочном виде:

$$\begin{gathered}(a + A\cdot\mathbf{e}_0 + k\cdot\mathbf{i}_0 + K\cdot\mathbf{f}_0)(b + B\cdot\mathbf{e}_0 + l\cdot\mathbf{i}_0 + L\cdot\mathbf{f}_0) = ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K +\\ (Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l})\cdot\mathbf{e}_0 + (al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K)\cdot\mathbf{i}_0 + (La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l})\cdot\mathbf{f}_0,\end{gathered} \tag{9}$$

где $\mathbf{f}_0 \equiv \mathbf{i}_0\cdot\mathbf{e}_0$. Его можно записать в виде символической таблицы (для удобства таблица умножения приведена и в полном виде):

$\times$	b	$B\cdot\mathbf{e}_0$	$l\cdot\mathbf{i}_0$	$L\cdot\mathbf{f}_0$
a	ab	$Ba\cdot\mathbf{e}_0$	$al\cdot\mathbf{i}_0$	$La\cdot\mathbf{f}_0$
$A\cdot\mathbf{e}_0$	$A\bar{b}\cdot\mathbf{e}_0$	$-\bar{B}A$	$A\bar{l}\cdot\mathbf{f}_0$	$-\bar{L}A\cdot\mathbf{i}_0$
$k\cdot\mathbf{i}_0$	$kb\cdot\mathbf{i}_0$	$Bk\cdot\mathbf{f}_0$	$-kl$	$-Lk\cdot\mathbf{e}_0$
$K\cdot\mathbf{f}_0$	$K\bar{b}\cdot\mathbf{f}_0$	$-\bar{B}K\cdot\mathbf{i}_0$	$-K\bar{l}\cdot\mathbf{e}_0$	$\bar{L}K$

и ($Tab.$ 3)

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$
$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$
$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{q}_1$	1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

$(Tab.\ 4)$

Эта таблица содержит в качестве фрагментов таблицы умножения бикватернионов и октав.

Центральное сопряжение

Алгебры кватернионов, бикватернионов и дикватернионов обладают замечательными свойствами, которые вытекают из существования в этих алгебрах "очень хорошего" сопряжения.

Под сопряжениями принято понимать линейные инволюционные антиавтоморфизмы:

$$C(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \lambda C(\mathbf{a}) + \mu C(\mathbf{b}) \qquad (\lambda, \mu \text{ – вещественные числа, линейность}),$$
$$C(C(\mathbf{a})) = \mathbf{a} \qquad (\text{инволюция}),$$
$$C(\mathbf{ab}) = C(\mathbf{b}) \cdot C(\mathbf{a}) \qquad (\text{антиавтоморфизм}). \tag{10}$$

Благодаря этим свойствам, выражения

$$\Re(\mathbf{a}) = 1/2(\mathbf{a} + C(\mathbf{a})) \qquad (\textit{реальная часть } \mathbf{a}), \tag{11}$$
$$N_r = \mathbf{a} \cdot C(\mathbf{a}) \qquad (\textit{правая 2-норма } \mathbf{a}), \tag{12}$$
$$N_l = C(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \qquad (\textit{левая 2-норма } \mathbf{a}), \tag{13}$$

не изменяются при сопряжении (назовем их *инвариантными* или *реальными* для данного сопряжения):

$$C(\Re(\mathbf{a})) = \Re(\mathbf{a}), \qquad C(N(\mathbf{a})) = N(\mathbf{a}). \tag{14}$$

При этом

$$\Re(C(\mathbf{a})) = \Re(\mathbf{a}), \qquad \text{но вообще говоря} \quad N(C(\mathbf{a})) \neq N(\mathbf{a}). \tag{15}$$

Подчеркнем, что хотя инвариантные выражения вводятся по тем же формулам, что и для классических алгебр кватернионов и октав, они, вообще говоря, могут и не являться вещественными числами. Однако, если реальные выражения коммутируют со всеми элементами алгебры, подобная запись нормы выглядит все же более правомерной, чем вещественное выражение в виде суммы или разности квадратов, никак не укорененное в свойствах алгебры. Будем называть $\mathbf{a} \cdot C(\mathbf{a})$ и $C(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}$ *естественными 2-нормами* гиперкомплексной алгебры (правой и левой), подчеркивая их согласованность с таблицей умножения.

Отметим, что далеко не во всех гиперкомплексных алгебрах существует сопряжение, "плохих" гиперкомплексных алгебр без сопряжения несопоставимо больше.

Для кватернионов сопряжение $\bar{\mathbf{a}}$ можно ввести по следующему правилу:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3. \tag{16}$$

Это сопряжение может быть выражено через операции данной алгебры (будем называть такие сопряжения *согласованными с умножением алгебры*):

$$\bar{\mathbf{a}} = -1/2(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3), \tag{17}$$

и как следствие:

$$\Re(a) = 1/2(\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) = 1/4(\mathbf{a} - \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3). \tag{18}$$

В справедливости соотношения (17) легко убедиться, если учесть, что отображение $\mathbf{a} \to -\mathbf{q}_k\mathbf{a}\mathbf{q}_k$ меняет все компоненты, кроме $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_k$. Отметим, что сопряжение комплексных чисел не может быть выражено через умножение и сложение в силу коммутативности алгебры комплексных чисел; его приходится вводить "руками".

Учитывая, что бикватернионы и дикватернионы есть прямо удвоенные кватернионы, аналогичное *кватернионное сопряжение* $\bar{\mathbf{a}}$ для них можно ввести по очевидному правилу:

$$\begin{gathered}
\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3, \\
\text{(запись с комплексными коэффициентами)}, \\
\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3, \\
\text{(полная запись с вещественными коэффициентами)}, \\
\bar{\mathbf{a}} = \overline{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = \bar{a} + \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0 \qquad (19) \\
\text{(сокращенная запись)}.
\end{gathered}$$

Это сопряжение опять же согласовано с умножением. Для бикватернионов (верхний знак) и дикватернионов (нижний):

$$\bar{\mathbf{a}} = -1/4(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3) \pm 1/4(\mathbf{i}_0\mathbf{a}\mathbf{i}_0 - \mathbf{i}_1\mathbf{a}\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2\mathbf{a}\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3\mathbf{a}\mathbf{i}_3), \tag{20}$$

(Учитываем, что отображение $\mathbf{a} \to -\mathbf{q}_k\mathbf{a}\mathbf{q}_k$ меняет все компоненты, кроме $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_k$; отображение $\mathbf{a} \to -\mathbf{i}_k\mathbf{a}\mathbf{i}_k$ ведет себя точно так же для дикватернионов и обратным образом для бикватернионов).

Однако, для изучения 4-нормы и 4-скалярного произведения в алгебрах бикватернионов и дикватернионов этого сопряжения, как мы увидим ниже, недостаточно.

Введем поэтому второе, *дуальное кватернионное сопряжение* по следующему правилу (записи в той же последовательности):

$$\widetilde{\mathbf{a}} = a_0^* - a_1^*\mathbf{q}_1 - a_2^*\mathbf{q}_2 - a_3^*\mathbf{q}_3,$$
$$\widetilde{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3.$$
$$\widetilde{\mathbf{a}} = \widetilde{\alpha + k} \cdot \mathbf{i}_0 = \bar{\alpha} - \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0 \qquad (21)$$

Сопряжение $\widetilde{\mathbf{a}}$ (21) также является инволюционным антиавтоморфизмом и поэтому заслуживает название сопряжения. Однако, сопряжение $\widetilde{\mathbf{a}}$ не согласовано с умножением алгебры: из-за коммутативности орта $\mathbf{i}_0$ со всеми прочими ортами его невозможно подвергнуть отражению с помощью умножения и сложения.

Замечание 1. Рассмотрим комбинацию сопряжений $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$ (записи в прежней последовательности):

$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = a_0^* + a_1^*\mathbf{q}_1 + a_2^*\mathbf{q}_2 + a_3^*\mathbf{q}_3,$$
$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3,$$
$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = \overline{\widetilde{a + k} \cdot \mathbf{i}_0} = a - k \cdot \mathbf{i}_0. \qquad (22)$$

Иначе говоря, это преобразование $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$ есть *комплексное сопряжение*, внешнее для кватернионов a, k. Обозначим его $\mathbf{a}^*$. Оно является инволюцией и автоморфизмом (а не антиавтоморфизмом):

$$(\mathbf{a}^*)^* = \mathbf{a} \qquad \text{и} \qquad (\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^*\mathbf{b}^*. \qquad (23)$$

Как следствие, выражение $\mathbf{aa}^*$, вообще говоря, изменяется при сопряжении своего рода (иначе говоря, не является инвариантным, реальным для него):

$$(\mathbf{aa}^*)^* = \mathbf{a}^*\mathbf{a} \neq \mathbf{aa}^*. \qquad (24)$$

В связи с этим, комбинированное преобразование (комплексное сопряжение) $\mathbf{a}^*$, строго говоря, не является сопряжением данной алгебры. Кроме того, поскольку комплексное сопряжение $\mathbf{a}^*$ изменяет знак орта $\mathbf{i}_0$, коммутирующего со всеми остальными ортами би(ди)-кватернионов, оно не согласуется с умножением алгебры.

Самое важное преимущество базового сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ (19) перед дуальным сопряжением $\widetilde{\mathbf{a}}$ в том, что гиперкомплексные числа, реальные (инвариантные) относительно $\bar{\mathbf{a}}$, содержат в себе только орты 1 и $\mathbf{i_0}$ и поэтому, подобно вещественным числам, коммутируют с любыми числами алгебры. Данное свойство кватернионного сопряжения и является источником ряда хороших свойств алгебр кватернионов, бикватернионов и дикватернионов, а также октав и биоктав. Важно, что далеко не все алгебры располагают таким "хорошим" сопряжением.

Более строго, реальные (инвариантные) относительно базового сопряжения элементы $\mathbf{r}$:

1) алгебраически замкнуты;

2) коммутируют со всеми элементами алгебрами $\mathbf{ar} = \mathbf{ra}$;

3) ассоциативно умножаются на любые элементы алгебры $\mathbf{r} \cdot \mathbf{ab} = \mathbf{ra} \cdot \mathbf{b}$.

Иначе говоря, они принадлежат коммутативному и одновременно ассоциативному центрам алгебры, т. е. центру алгебры в его обычном понимании. Итак, введем

Определение. *Сопряжение, реальные (инвариантные) числа которого принадлежат центру алгебры будем называть* ***центральным.***

Далее алгебры, в которых существует центральное сопряжение, будем обозначать $\mathbb{A}_c$. Все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры (в частности, все алгебры бесконечной последовательности Кэли-Диксона), со всеми их комплексификациями и гиперболическими удвоениями, – алгебры с центральным сопряжением.

Замечание 2. Все квадратичные алгебры обладают естественной нормой 2 степени (т. е. нормой вида $\mathbf{a\bar{a}}$, согласованной с таблицей умножения алгебры). Каноническая инволюция $\mathbf{\bar{a}}$ при этом оставляет центр алгебры (сводящийся к вещественным числам) инвариантным. Если каноническая инволюция является антиавтоморфизмом (т. е., полноценным сопряжением), мы имеем алгебру $\mathbb{A}_c$. Поэтому все результаты для алгебр с центральным сопряжением есть вместе с тем и результаты для квадратичных алгебр с сопряжением, а в тех случаях, когда не используется свойство антиавтоморфизма, – для любых квадратичных алгебр.

Замечание 3. В силу того, что коммутативный центр алгебры $\mathbb{A}_c$ является (вообще говоря) подмножеством ассоциативного центра, справедливо

$$\mathbf{r}_i\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{r}_j\mathbf{q}_m = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{q}_n\mathbf{q}_m.$$

Это значит, что алгебра с центральным сопряжением $\mathbb{A}_c$ представляет собой внешнее (тензорное) произведение своего центра $\mathbb{Z}$ на некоторую (квадратичную) подалгебру $\mathbb{A}_0$, иначе говоря, является квадратичной алгеброй $\mathbb{A}_0$ над своим центром $\mathbb{Z}$.

В принципе, почти все рассуждения данной статьи справедливы при более слабом условии принадлежности реальных (инвариантных) элементов сопряжения не ассоциативному, а альтернативному центру алгебры. В этом случае алгебра $\mathbb{A}_c$ уже не сводится к тензорному произведению своего центра $\mathbb{Z}$ на подалгебру $\mathbb{A}_0$. Однако неясно, является ли такое расширение понятия действительно содержательным.

Везде в настоящей статье будет подразумеваться, что алгебры обладают единицей и что они заданы над полем характеристики 0.

Моноассоциативность алгебр с центральным сопряжением

Итак, для коммутатора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ элементов алгебр $\mathbb{A}_c$ с центральным сопряжением (и, в том числе, кватернионов, бикватернионов и дикватернионов) справедливо:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{r}] = 0, \quad \text{где} \quad \mathbf{r} = \mathbf{\bar{r}}, \tag{25}$$

($\mathbf{\bar{a}} \equiv C(a)$ – базовое сопряжение алгебры $\mathbb{A}_c$) и, в частности,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{\bar{b}}] = 0, \qquad [\mathbf{a}, \mathbf{b\bar{b}}] = 0 \tag{26}$$

Из (26) немедленно следует

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{\bar{b}}, \mathbf{a}], \qquad \text{и поэтому} \tag{27}$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{\bar{a}}] = [\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0, \qquad \text{то есть} \qquad \mathbf{a\bar{a}} = \mathbf{\bar{a}a}. \tag{28}$$

Это означает, что верна

Лемма 1. *В алгебрах с центральным сопряжением совпадают правая и левая 2-нормы:*

$$N_l(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{\bar{a}a} = N_r(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{a\bar{a}}. \tag{29}$$

Но тогда верно следующее:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{\bar{a}a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{\bar{a}a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a\bar{a}} \cdot \mathbf{a} \qquad (\mathbf{r} \equiv \mathbf{\bar{a}a} \in \text{центру алгебры}), \tag{30}$$

или, короче,

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}. \tag{31}$$

Поэтому прямым следствием Леммы 1 является степенная ассоциативность (моноассоциативность) алгебр $\mathbb{A}_c$ – ассоциативность подалгебры, состоящей из всех возможных произведений одного элемента ($\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{n+k}$). В самом деле, как известно, над полем характеристики 0 алгебра будет являться моноассоциативной, если в ней верны два тождества:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{aa} = \mathbf{aa} \cdot \mathbf{a} \qquad \text{и} \quad \mathbf{aa} \cdot \mathbf{aa} = (\mathbf{aa} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}. \tag{32}$$

Первое из этих свойств немедленно следует из (31), поскольку всякий элемент $\mathbf{a}$ алгебры $\mathbb{A}_c$ можно представить в виде суммы мнимой и реальной (инвариантной) относительно базового сопряжения алгебры частей $\mathbf{q}$ и $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{a} = 1/2(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}) + 1/2(\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{q} + \mathbf{s}; \quad C(\mathbf{q} + \mathbf{s}) = -\mathbf{q} + \mathbf{s}$$

и реальные элементы умножаются ассоциативно ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{sa} = \mathbf{as}\cdot\mathbf{a}$). Аналогичным образом легко видеть, что

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{aa} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{aa} = \mathbf{ra} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a},$$

откуда в силу принадлежности $\mathbf{s} = \Re(\mathbf{a})$ ассоциативному центру алгебры немедленно следует второе из свойств (32). Итак, доказана

Теорема 1. *Всякая алгебра с центральным сопряжением моноассоциативна.*

А вместе с ней, как частный случай, и

Теорема 1b. *Всякая квадратичная алгебра моноассоциативна.*

(антиавтоморфные свойства сопряжения при доказательстве не использовались).

Прочие ассоциативные свойства алгебр $\mathbb{A}_c$

Для упрощения дальнейших выкладок введем, как принято, ассоциатор

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \equiv (\mathbf{ab})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{bc}). \tag{33}$$

С очевидностью он линеен по каждому из элементов. В ассоциативных алгебрах ассоциатор тождественно равен нулю. В альтернативных он антисимметричен по всем переменным:

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = -\{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\} \qquad \text{(правая альтернативность)}, \tag{34}$$

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = -\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\} \qquad \text{(левая альтернативность)}. \tag{35}$$

Как следствие, ассоциатор в альтернативных алгебрах цикличен:

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = \{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}. \tag{36}$$

Альтернативные алгебры, с очевидностью, эластичны:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{ba} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{a}, \qquad \text{поскольку в них} \tag{37}$$

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\} = -\{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0.$$

Но обратное неверно: не всякая эластичная алгебра альтернативна. Отметим, что свойство эластичности с очевидностью эквивалентно

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = -\{\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}\}. \tag{38}$$

Легко показать, что всякая алгебра, полученная удвоением Кэли-Диксона (6) из эластичной алгебры $\mathbb{A}_c$, также эластична и также является алгеброй с центральным сопряжением. Таким образом, эластична вся бесконечная цепочка алгебр Кэли-Диксона, начинающаяся с вещественных чисел.

Во всякой альтернативной алгебре, как известно и как легко показать, справедливы тождества

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{bc}\} = \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}\mathbf{b}, \qquad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{cb}\} = \mathbf{b}\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}, \tag{39}$$

из которых следуют известные тождества Муфанг:

$$\begin{aligned} (\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} &= \mathbf{a}(\mathbf{bcb}) \quad &&– \text{ правое},\\ (\mathbf{aba})\mathbf{c} &= \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{ac}) \quad &&– \text{ левое},\\ \mathbf{ab}\cdot\mathbf{ca} &= \mathbf{a}(\mathbf{bc})\mathbf{a} \quad &&– \text{ центральное}. \end{aligned} \tag{40}$$

С помощью этих соотношений и их линеаризаций легко доказывается теорема Артина: в альтернативной алгебре любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. (При линеаризации тождества приводятся к линейным по каждому переменному. Для этого повторяющийся элемент $\mathbf{a}$ заменяется на, допустим, $\mathbf{a}+\mathbf{d}$, после чего сокращаются уже известные тождества с повторяющимися переменными.)

Можно показать, что для алгебр с центральным сопряжением эластичность эквивалентна важному для физических приложений свойству *йордановости*:

$$\mathbf{a}^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2\cdot\mathbf{ba} \qquad \text{или} \qquad \{\mathbf{a}^2,\mathbf{b},\mathbf{a}\} = 0, \tag{41}$$

но в общем случае алгебр с единицей йордановость сильнее (у́же) эластичности.

Для алгебр с центральным сопряжением альтернативность с очевидностью эквивалентна следующему полезному при выкладках свойству (назовем его *сопряженной альтернативностью*):

$$\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{b}}\mathbf{b} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{b} \qquad \text{и одновременно} \qquad \mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}, \tag{42}$$

а значит

$$\{\mathbf{a},\bar{\mathbf{b}},\mathbf{b}\} = 0 \qquad \text{и} \qquad \{\mathbf{a},\bar{\mathbf{a}},\mathbf{b}\} = 0, \tag{43}$$

или иначе

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = -\{\mathbf{a},\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}}\} \qquad \text{и} \qquad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = -\{\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}},\mathbf{c}\}. \tag{44}$$

Отметим, что в общем случае сопряженная альтернативность сильнее (у́же) альтернативности: если реальные элементы принадлежат коммутативному но не ассоциативному центру алгебры, из сопряженной альтернативности следует альтернативность, но не всегда обратно.

Подытожим все сказанное в виде иерархии уровней ассоциативных свойств (из верхних уровней вытекают нижние, но вообще говоря не наоборот):

ассоциативность:	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc} = \mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}$		$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = 0;$
альтернативность:	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{bb} = \mathbf{ab}\cdot\mathbf{b}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = -\{\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}\}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}\} = 0$
вместе с	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ab} = \mathbf{aa}\cdot\mathbf{b}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = -\{\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}\}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\} = 0;$
йордановость:	$\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{ba} = \mathbf{a}^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$		$\{\mathbf{a}^2,\mathbf{b},\mathbf{a}\} = 0;$
эластичность:	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ba} = \mathbf{ab}\cdot\mathbf{a}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = -\{\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}\}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\} = 0;$
моноассоциативность:	$\mathbf{a}^n\cdot\mathbf{a}^m = \mathbf{a}^{n+m}$	$\{\mathbf{a}^2,\mathbf{a},\mathbf{a}\} = 0$	$\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a}\} = 0;$

Наконец, для дальнейшего важно, что ассоциатор элемента центра алгебры (в алгебрах $\mathbb{A}_c$ – реального элемента) с любыми элементами равен нулю:

$$\{\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0. \tag{45}$$

Мультипликативность 2-нормы алгебр $\mathbb{A}_c$

Существование центрального сопряжения (свойство (25)) в алгебрах $\mathbb{A}_c$ вместе с дополнительным условием их альтернативности имеет своим следствием замечательное свойство мультипликативности (комплексной, двойной и т. п.) 2-нормы в этих алгебрах. (Норма произведения равна произведению норм.) Цепочка рассуждений здесь такова (используется свойство сопряженной альтернативности):

$$N_2(\mathbf{ab}) = \mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}). \tag{46}$$

Самое существенное в доказательстве – 1-е преобразование $\mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}})$. Оно, как легко видеть, образом выполняется в альтернативных (и потому сопряженно-альтернативных) алгебрах. В самом деле,

$$\mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}\}.$$

В силу сопряженной альтернативности это выражение равно

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}\} = -\{\mathbf{a}, \mathbf{ab}, \bar{\mathbf{b}}\} = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{ab})\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a}(\mathbf{ab} \cdot \bar{\mathbf{b}}) =$$
$$= -(\mathbf{aa} \cdot \mathbf{b})\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}) = -\mathbf{aa} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}) = -\{\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}\} = 0.$$

Итак, доказана

Теорема 2. *Всякая альтернативная алгебра с центральным сопряжением обладает мультипликативной (вообще говоря, не вещественной) 2-нормой* $N_2 = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}$.

Поскольку достаточно не ассоциативности, а альтернативности алгебры, мультипликативной 2-нормой (комплексной, двойной и т. п.) обладают не только алгебры кватернионов, бикватернионов и дикватернионов, вместе со всевозможными биби- биди- диди- и т. п. кватернионами, но и октавы, комплексные и двойные октавы (биоктавы и диоктавы) и прочие всевозможные биби- биди- диди- октавы.

А что можно сказать, если мы имеем произвольную, неальтернативную алгебру с центральным сопряжением? Легко доказать следующую теорему:

Теорема 3. *В любой алгебре с центральным сопряжением 2-норма квадрата элемента равна квадрату его 2-нормы (т. е. алгебра монокомпозиционна):*

$$N_2(\mathbf{aa}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}). \tag{47}$$

А значит, как частный случай, верна и

Теорема 3b. *Любая квадратичная алгебра монокомпозиционна, т. е. в ней норма квадрата элемента равна квадрату нормы этого элемента.*

В самом деле, используя лишь факт моноассоциативности алгебр $\mathbb{A}_c$:

$$N_2(\mathbf{aa}) = \mathbf{aa} \cdot \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})\mathbf{a} = (\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a})\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}). \ \square$$

Хотя результат получается на основе метода анализа сопряжений легко, он, по-видимому, является новым.

Несколько полезных фактов

Сначала докажем несколько важных вспомогательных результатов.

Лемма 2. *Для сопряжения ассоциатора справедливо:*

$$\overline{\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}} = -\{\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}\}. \tag{48}$$

В самом деле,

$$\overline{\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}} = C((\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc})) = \bar{\mathbf{c}}\cdot\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{b}}\cdot\bar{\mathbf{a}} = -\{\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}\}.$$

С помощью Леммы 2 легко доказываются две теоремы:

Теорема 4. *В эластичных алгебрах с центральным сопряжением ассоциатор чисто мним.*

В самом деле, согласно (45), ассоциатор элементов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ в алгебрах $\mathbb{A}_c$ сводится к ассоциатору чисто мнимых элементов $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{g}$ и тогда

$$C(\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}) = C(\{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{g}\}) = -\{\bar{\mathbf{g}},\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}}\} = +\{\mathbf{g},\mathbf{q},\mathbf{p}\} = -\{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{g}\} = -\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}. \ \Box$$

Теорема 5. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением произведение трех элементов под знаком реальной части ассоциативно*:

$$\Re(\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}) = \Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}). \tag{49}$$

(Заметим, что для произведения произвольного числа элементов это не так.)

В самом деле, это равенство есть ничто иное, как

$$\Re(\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}) = 0, \qquad \text{т. е.} \quad \Re(\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}) = 0,$$

а это для эластичных алгебр выполняется согласно Теореме 4. $\Box$

Далее, применяя (27) два раза, получим

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]. \tag{50}$$

Это означает, что верна

Лемма 3. *Коммутатор двух элементов алгебры $\mathbb{A}_c$ является чисто мнимым относительно центрального сопряжения этой алгебры:*

$$\overline{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \overline{(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}} = -(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}) = -[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}] = -[\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

Однако, антикоммутатор $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} = \mathbf{ab}+\mathbf{ba}$ реальным, вообще говоря, не является.

Из (50) вытекает

Теорема 6. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением возможна циклическая перестановка сомножителей под знаком реальной части.*

В самом деле,

$$\mathbf{ab}-\mathbf{ba} = \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ab}+\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}+\mathbf{ba}, \qquad \text{то есть}$$

$$\Re(\mathbf{ab}) = \Re(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}) = \Re(\overline{\mathbf{ba}}) = \Re(\mathbf{ba}), \tag{51}$$

и, как следствие, в силу Теоремы 5

$$\Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}) = \Re(\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}) = \Re(\mathbf{c}\cdot\mathbf{ab}) = \Re(\mathbf{ca}\cdot\mathbf{b}) = \Re(\mathbf{b}\cdot\mathbf{ca}). \ \Box \tag{52}$$

2-скалярное и 2-векторное произведения в алгебрах $\mathbb{A}_c$

Введем теперь по тем же формулам, что и для кватернионов и октав, *правое и левое 2-скалярное произведение*. Подчеркнем, что оно теперь может и не быть вещественным числом (но обладает преимуществом согласованности с алгеброй):

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a},\mathbf{b})_p &\equiv \Re(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}+\mathbf{b}\bar{\mathbf{a}})\\
(\mathbf{a},\mathbf{b})_l &\equiv \Re(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}).
\end{aligned}
\tag{53}
$$

С очевидностью,

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a}) \qquad \text{и} \qquad (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})_p = (\mathbf{a},\mathbf{b})_l.$$

Из (51) следует

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})_p = \Re(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = \Re(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})_p = (\mathbf{a},\mathbf{b})_l.$$

Иначе говоря, *для алгебр $\mathbb{A}_c$ правое и левое 2-скалярные произведения совпадают,* а кроме того

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}). \tag{54}$$

2-норма и 2-скалярное произведение связаны очевидной формулой:

$$N(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = N(\mathbf{a}) + N(\mathbf{b}) + 2(\mathbf{a},\mathbf{b}), \tag{55}$$

и следовательно

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big(N(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - N(\mathbf{a}) - N(\mathbf{b})\big), \tag{56}$$

и, в частности,

$$(\mathbf{a},\mathbf{a}) = N(\mathbf{a}), \tag{57}$$

поэтому совпадение правых и левых 2-норм и совпадение правых и левых 2-скалярных произведений связаны непосредственно.

Лемма 4. В альтернативных алгебрах с центральным сопряжением выполняется:

$$(\mathbf{ab},\mathbf{cd}) + (\mathbf{ad},\mathbf{cb}) = 2(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d}), \tag{58}$$

$$(\mathbf{ab},\mathbf{cb}) = (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{c})N_2(\mathbf{b}). \tag{59}$$

Эти формулы являются более общим выражением свойства мультипликативности нормы алгебр $\mathbb{A}_c$ и могут быть получены из него линеаризацией. (В равенство

$$N_2(\mathbf{ab}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}), \qquad \text{то есть} \qquad (\mathbf{ab},\mathbf{ab}) = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}),$$

вместо $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ подставляются $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}+\mathbf{d}$, после чего сокращаются тождества мультипликативности нормы по каждому из переменных.)

Введем теперь, как это принято, *левое и правое векторные произведения*:

$$
\begin{aligned}
\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_l &\equiv \Im(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}-\bar{\mathbf{b}}\mathbf{a})\\
\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p &\equiv \Im(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}-\mathbf{b}\bar{\mathbf{a}})
\end{aligned}
\tag{60}
$$

С очевидностью, выполняется:

$$\langle\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle = -\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle, \qquad \langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle = 0, \quad \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p = \langle\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle_l. \tag{61}$$

Отметим, что для векторных произведений

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle \neq \langle\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle \qquad \text{или} \qquad \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p \neq \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_l.$$

Вместо этого, в силу свойства (45), в эластичных алгебрах с центральным сопряжением выполняется:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2 = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}\rangle^2, \qquad \text{т. е.} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_p^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_l^2, \tag{62}$$

однако, не является верным равенство

$$(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle)^2 \neq (\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}\rangle + \langle \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{d}}\rangle)^2.$$

Для векторных произведений в альтернативных алгебрах $\mathbb{A}_c$, как несложно показать, справедлива формула, связанная с их мультипликативностью и сходная с (59):

$$\langle \mathbf{ca}, \mathbf{da}\rangle^2 = N_2^2(\mathbf{a})\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle^2 = \langle \mathbf{ac}, \mathbf{ad}\rangle^2. \tag{63}$$

В ассоциативных алгебрах $\mathbb{A}_c$ эту формулу, с очевидностью, можно усилить до:

$$\langle \mathbf{ca}, \mathbf{da}\rangle_p = N_2(\mathbf{a})\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle_p \qquad \text{и} \qquad \langle \mathbf{ac}, \mathbf{ad}\rangle_l = N_2(\mathbf{a})\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle_l. \tag{64}$$

В эластичных алгебрах $\mathbb{A}_c$ выполняется:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle_p\, \mathbf{a} = \mathbf{a}\langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}\rangle_p \qquad \text{и} \qquad \mathbf{a}\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle_l = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}\rangle_l\, \mathbf{a}. \tag{65}$$

В альтернативных алгебрах $\mathbb{A}_c$ верно тождество

$$N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2. \tag{66}$$

Далее, если не указан индекс p или l, будет иметься в виду правое векторное произведение.

Геометрический аспект ассоциативных свойств: об алгебре, напрямую связанной с нормой Минковского

Значение ассоциативных свойств для геометрии, естественно порождаемой алгеброй, можно проиллюстрировать на одном довольно простом и наглядном примере.

Зададимся вопросом, какая гиперкомплексная алгебра соответствует напрямую метрике Минковского:

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{67}$$

Таких алгебр можно сконструировать, отталкиваясь от алгебры кватернионов, несколько, они будут распадаться на два класса с заметно разными свойствами. Рассмотрим, к примеру, две таблицы умножения:

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

. (*Tab.* 5*a*)

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

. (*Tab.* 5*b*)

Сопряжение в таких алгебрах задается обычным образом (все орты, кроме 1, полагаются мнимыми) и является антиавтоморфизмом:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 \cdot 1 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3\,; \qquad \overline{\mathbf{ab}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}\,.$$

Поскольку реальная часть элемента алгебр есть просто вещественное число, перед нами алгебры с центральным сопряжением. Естественная квадратичная норма также является вещественным числом и совпадает с метрикой Минковского:

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2.$$

Рассматриваемые алгебры неассоциативны и, более того, неальтернативны:

$$\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1, \qquad \text{но} \quad \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_3\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3(-\mathbf{q}_2) = -\mathbf{q}_1.$$

Вторая из алгебр даже не эластична (хотя согласно Теореме 1b, она, как и все алгебры с естественной квадратичной нормой, моноассоциативна). Убедиться в этом не так просто, как в случае неальтернативности: произведения орт будут всегда удовлетворять свойству эластичности (это связано с тем, что квадрат орта равен вещественному числу ± 1). С помощью (45), эластичность можно свести к эластичности произведения мнимых частей $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{ba} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{pq} - \mathbf{qp} \cdot \mathbf{q} = 0 \qquad \text{или}$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq} + \overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq}} = 2\Re(\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq}) = 0. \tag{68}$$

Таким образом, получается удобный для практики критерий эластичности:

Алгебра с центральным сопряжением эластична, если в ней выражение из мнимых элементов $\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq}$ *не содержит реальных членов.*

В данной же алгебре, как несложно убедиться,

$$\Re(\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq}) = 2a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0.$$

Наконец, как и во всех алгебрах с квадратичной нормой, в обеих алгебрах норма квадрата элемента равна квадрату его нормы (алгебры монокомпозиционны):

$$N_2(\mathbf{aa}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}).$$

Это тождество можно проверить и напрямую. Поскольку норма

$$\mathbf{aa} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot 1 + 2a_0a_1\mathbf{q}_1 + 2a_0a_2\mathbf{q}_2 + 2a_0a_3\mathbf{q}_3,$$

тождество записывается как

$$(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - 4a_0a_1^2 - 4a_0a_2^2 - 4a_0a_3^2.$$

Теперь рассмотрим непосредственные геометрические последствия всех этих алгебраических свойств.

1) Поскольку алгебры *неассоциативны,* движения в них нельзя задать посредством внутренних автоморфизмов:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{au}^{-1}, \tag{69}$$

поскольку не проходит то, что проходит в ассоциативных алгебрах:

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{au}^{-1}) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{bu}^{-1}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{bu}^{-1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathbf{u}^{-1} = (\mathbf{ab})'.$$

2) Поскольку алгебры *неальтернативны,* движения в них нельзя задать посредством умножения на элемент (элементы) единичной нормы $\mathbf{e}$. Ведь в неальтернативных алгебрах норма произведения не равна произведению норм, а значит норма образа элемента не будет равна норме прообраза:

$$N_2(\mathbf{ea}) \neq N_2(\mathbf{e})N_2(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a}).$$

3) Поскольку вторая из алгебр *неэластична,* возникают проблемы с ортогональностью чисто мнимых элементов (по идее, соответствующих векторам обычного 3-мерного пространства). В самом деле, в эластичных алгебрах согласно (51) и (68)

$$\Re(\mathbf{qp}\cdot\mathbf{q})=\Re(\mathbf{q}\cdot\mathbf{qp})=0.$$

Следовательно,

$$0=\Re(\mathbf{qp}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{qp})=\mathbf{qp}\cdot\mathbf{q}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{pq}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{qp}-\mathbf{pq}\cdot\mathbf{q}=$$
$$=\mathbf{q}(\mathbf{qp}-\mathbf{pq})+(\mathbf{qp}-\mathbf{pq})\mathbf{q}=\mathbf{q}<\mathbf{p},\mathbf{q}>+<\mathbf{p},\mathbf{q}>\mathbf{q}=(\mathbf{q},<\mathbf{q},\mathbf{p}>).$$

Итак, справедлива

Теорема 7. *В эластичных алгебрах с центральным сопряжением векторное произведение произвольных мнимых векторов ортогонально каждому из них:*

$$(\mathbf{q},<\mathbf{q},\mathbf{p}>)=0. \tag{70}$$

Во второй из рассматриваемых алгебр это не так, а значит затруднительно алгебраическим образом ввести понятие ортогональности трехмерных векторов.

Все это показывает, что требование порождать "хорошие" геометрии является довольно жестким ограничением для гиперкомплексных алгебр. Чрезмерное удаление от ассоциативности приводит к малосодержательным, по-видимому, геометриям.

2-норма, 2-скалярное и 2-векторное произведение для алгебр бикватернионов, дикватернионов и биоктав

2-скалярное произведение алгебр бикватернионов (верхний знак) и дикватернионов (нижний знак) рассчитывается легко. Для орт оно равно

$$(\mathbf{q}_k,\mathbf{q}_s)=\delta_{ks}\quad(\mathbf{q}_k,\mathbf{i}_s)=\mathbf{i}_0\delta_{ks},\quad(\mathbf{i}_k,\mathbf{i}_s)=\mp\delta_{ks}. \tag{71}$$

В покомпонентном и в сокращенном виде скалярное произведение элементов равно:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\mp(k_0l_0+k_1l_1+k_2l_2+k_3l_3)+$$
$$+(a_0l_0+a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+k_0b_0+k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3)\cdot\mathbf{i}_0, \tag{72}$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(a,b)\mp(k,l)+\big((a,l)+(k,b)\big)\cdot\mathbf{i}_0. \tag{73}$$

Отсюда или на основании (19) легко рассчитывается 2-норма $N_2(\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{a})$ алгебр бикватернионов и дикватернионов в кратком:

$$N_2(\mathbf{a})=\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=(a+k\cdot\mathbf{i}_0)(\bar a+\bar k\cdot\mathbf{i}_0)=a\bar a\mp k\bar k+(a\bar k+k\bar a)\cdot\mathbf{i}_0,\quad\text{или}$$

$$N_2(\mathbf{a})=N_2(a)\mp N_2(k)+2(a,k)\cdot\mathbf{i}_0, \tag{74}$$

и в покомпонентном виде:

$$N_2(\mathbf{a})=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2\ \mp(k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2)\ +2(a_0k_0+a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3)\cdot\mathbf{i}_0 \tag{75}$$

Аналогично, 2-скалярное произведение для орт алгебры биоктав равно

$$(\mathbf{q}_k,\mathbf{q}_s)=(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_s)=\delta_{ks}\quad(\mathbf{i}_k,\mathbf{i}_s)=(\mathbf{f}_k,\mathbf{f}_s)=-\delta_{ks},\quad(\mathbf{q}_k,\mathbf{i}_s)=(\mathbf{e}_k,\mathbf{f}_s)=\mathbf{i}_0\delta_{ks}. \tag{76}$$

Все остальные пары орт дают 0. Отсюда 2-норма для алгебры биоктав в кратком:

$$\begin{aligned}N_2(\mathbf{a}) = (a + A\cdot\mathbf{e}_0 + k\cdot\mathbf{i}_0 + K\cdot\mathbf{f}_0)(\bar a - A\cdot\mathbf{e}_0 + \bar k\cdot\mathbf{i}_0 - K\cdot\mathbf{f}_0) =\\ = a\bar a + \bar A A - k\bar k - \bar K K + (a\bar k + k\bar a + \bar K A + \bar A K)\cdot\mathbf{i}_0 + 0\cdot\mathbf{e}_0 + 0\cdot\mathbf{f}_0 =\\ = N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K) + 2((a,k) + (A,K))\cdot\mathbf{i}_0,\end{aligned} \tag{77}$$

и покомпонентном виде:

$$\begin{aligned}N_2(\mathbf{a}) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\ + A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2\ - K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2\\ + 2(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3\ + A_0K_0 + A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)\cdot\mathbf{i}_0\end{aligned} \tag{78}$$

Приведем также 2-векторное произведение для алгебр бикватернионов и дикватернионов в кратком виде:

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \langle a + \mathbf{i}_0k, b + \mathbf{i}_0l\rangle = \langle a,b\rangle \mp \langle k,l\rangle + (\langle a,l\rangle + \langle k,b\rangle)\mathbf{i}_0, \tag{79}$$

и в покомпонентном виде:

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \big(-a_0b_1 + a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2\ \mp(-k_0l_1 + k_1l_0 - k_2l_3 + k_3l_2)\big)\cdot\mathbf{q}_1 +\\ \big(-a_0b_2 + a_1b_3 + a_2b_0 - a_3b_1\ \mp(-k_0l_2 + k_1l_3 + k_2l_0 - k_3l_1)\big)\cdot\mathbf{q}_2 +\\ \big(-a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0\ \mp(-k_0l_3 - k_1l_2 + k_2l_1 + k_3l_0)\big)\cdot\mathbf{q}_3 +\\ + \big(-a_0l_1 + a_1l_0 - a_2l_3 + a_3l_2\ - k_0b_1 + k_1b_0 - k_2b_3 + k_3b_2\big)\cdot\mathbf{i}_1 +\\ + \big(-a_0l_2 + a_1l_3 + a_2l_0 - a_3l_1\ - k_0b_2 + k_1b_3 + k_2b_0 - k_3b_1\big)\cdot\mathbf{i}_2 +\\ + \big(-a_0l_3 - a_1l_2 + a_2l_1 + a_3l_0\ - k_0b_3 - k_1b_2 + k_2b_1 + k_3b_0\big)\cdot\mathbf{i}_3.\end{aligned} \tag{80}$$

Мультинорма и мультискалярное произведение для алгебр $\mathbb{A}_c$

Вопрос о том, какие алгебры обладают мультипликативной нормой второй степени, был всесторонне рассмотрен и решен еще в XIX веке (см. [3], [11], [12]).

Согласно теореме Гурвица, любая алгебра с единицей, обладающая мультипликативной положительно определенной нормой, изоморфна либо действительным числам, либо комплексным числам, кватернионам или октавам.

Обобщенная теорема Фробениуса утверждает, что любая альтернативная алгебра с делением изоморфна опять же одной из алгебр этого списка.

Согласно теореме Алберта, альтернативными алгебрами с единицей, реальные элементы в которых суть вещественные числа, и которые обладают невырожденной мультипликативной квадратичной формой, являются только алгебры комплексных и двойных чисел, кватернионы и антикватернионы, октавы и антиоктавы.

Согласно обобщенной теореме Понтрягина, только вещественные, комплексные числа, кватернионы и октавы являются связными локально компактными альтернативными топологическими телами. Вследствие этого, пространства бикватернионов, дикватернионов и биоктав односвязными не являются.

Наконец, из теоремы Цорна вытекает, что единственными простыми альтернативными неассоциативными алгебрами являются октавы, антиоктавы и биоктавы.

В 50-60-х гг. XX века вопрос о мультипликативности форм степени выше 2 поставил и решил Р. Д. Шафер [5]–[7] (с дополнениями Кевина МакКриммона [8]). Под формами n-степени понимается следующее. Пусть V – векторное пространство, возможно бесконечномерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$ (вещественные и комплексные числа имеют характеристику 0). Тогда отображение $\mathbf{u} \to N(\mathbf{u})$ V на F называется *формой степени* n на V в случае

$$N(\lambda\mathbf{u}) = \lambda^n N(\mathbf{u}) \qquad \text{для любых} \quad \lambda \in F,\ \mathbf{u} \in V.$$

Результатом исследований того времени стала следующая теорема.

Теорема Шафера. *Пусть $\mathbb{U}$ – алгебра с единицей, вообще говоря бесконечномерная, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Необходимое и достаточное условие для существования на $\mathbb{U}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей композицию, состоит в том, что $\mathbb{U}$ является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{U}_r$, $\mathbb{U}_i$ – простые алгебры степени m_i, где*

$$n = m_1 f_1 + \ldots + m_r f_r, \tag{81}$$

удовлетворяется для положительных целых чисел $f_i (i = 1, \ldots, r)$. Более того, форма N на $\mathbb{U}$ задается посредством

$$N(\mathbf{u}) = [n_1(u_1)]^{f_1} \cdots [n_r(u_r)]^{f_r}, \tag{82}$$

где $n_j(u_j)$ – форма, заданная на простой алгебре $\mathbb{U}_j$.

В теореме существенным является понятие *невырожденности* нормы степени n. Имеется в виду следующее. С каждой n-нормой естественным образом связывается n-линейная форма *n-скалярного произведения* от n гиперкомплексных чисел по формуле Шафера:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \frac{1}{n!}\big[N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n) - \sum_{i=1}^{n} N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \check{\mathbf{u}}_i + \ldots + \mathbf{u}_n)\\ + \sum_{i<j} N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \check{\mathbf{u}}_i + \ldots + \check{\mathbf{u}}_j + \ldots + \mathbf{u}_n) - \ldots + (-1)^{n-1} \sum N(\mathbf{u}_i)\big],\end{aligned} \tag{83}$$

где запись $\check{\mathbf{u}}_i$ означает, что $\mathbf{u}_i$ опущен. Легко видеть, что

$$N_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}), \qquad \text{поскольку} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$$

С очевидностью, форма $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ имеет все свойства, которые естественно ожидать от обобщения понятия скалярного произведения. Она вещественна, симметрична относительно любых перестановок входящих в него векторов, линейна по каждому из них (и, в частности, обращается в нуль, если один из векторов равен нулю).

По определению Шафера, формы степени n называются *невырожденными* в случае, если из $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = 0$ для всех $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ вытекает $\mathbf{u}_1 = 0$.

С очевидностью, альтернативные алгебры с центральным сопряжением удовлетворяют условию теоремы Шафера (если в них невырождена исходная 2-норма). Поэтому в них существует вещественная невырожденная мультипликативная норма степени n. В общем случае, теорема Шафера не дает явного алгоритма построения такой нормы. Для алгебр с центральным сопряжением этот алгоритм достаточно ясен, поскольку мы уже знаем 2-норму, мультипликативную согласно доказанному выше. Особенно легко построить n-норму, если алгебра может быть получена цепочкой тех или иных удвоений (не обязательно по Кэли-Диксону) из вещественных чисел, т. е. является последовательно градуированной и имеет размерность 2^p

(таковы все или почти все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры). Нужно, используя набор сопряжений, заданных в алгебре, каждый раз, удваивая степень нормы, избавляться от половины членов центра алгебры. Используется тождество $(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$ (a и b коммутируют меж собой, принадлежа центру алгебры). Процесс повторяется, пока не останется лишь вещественное число. В результате, если центр алгебры (инвариантный относительно базового сопряжения) состоит из $r=2^k$ элементов, то норма алгебры будет иметь степень $n=2r=2^{k+1}$.

Мультипликативность полученной n-нормы будет вытекать из мультипликативности 2-нормы. Докажем это с помощью метода индукции. В самом деле, верно, что

$$N_2(\mathbf{uv})=N_2(\mathbf{u})N_2(\mathbf{v}),$$

и пусть это же верно для степени $m=2^k$:

$$N_m(\mathbf{uv})=N_m(\mathbf{u})N_m(\mathbf{v}).$$

Но $N_m(\mathbf{u})$ в алгебрах $\mathbb{A}_c$ принадлежит замкнутой ассоциативной коммутативной алгебре с единицей, являющейся подмножеством центра алгебры. Если эта алгебра (обозначим ее A_z) совпадает с 1, доказательство завершено. Если нет, рассмотрим алгебру, порожденную 1 и некоторым элементом r_1 из A_z. Если мы опять не получим всю алгебру A_z, добавим элемент r_2 из A_z и рассмотрим алгебру, образованную всеми произведениями $1, r_1, r_2$ (с любыми вещественными коэффициентами) и т. д. В конце концов, набор $\{1, r_1, \ldots, r_z\}$ даст всю алгебру A_z, а набор $\{1, r_1, \ldots, r_{z-1}\}$ даст ее "половинную" подалгебру A_{z-1}. Всякий элемент алгебры A_z можно записать в виде

$$\mathbf{t}=\mathbf{s}+\mathbf{r}_z\mathbf{S},$$

где $\mathbf{s}, \mathbf{S}$ принадлежат подалгебре A_{z-1}. Введем теперь инволюцию по формуле

$$C[\mathbf{s}+\mathbf{r}_z\mathbf{S}]=\mathbf{s}-\mathbf{r}_z\mathbf{S}, \qquad \text{и в частности} \quad C(\mathbf{r}_z)=-C(\mathbf{r}_z).$$

Тогда $C[\mathbf{r}_z^2]=\mathbf{r}_z^2$ и, учитывая коммутативность алгебры A_z, получаем:

$$C[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]=C[(\mathbf{s}_1+\mathbf{r}_z\mathbf{S}_1)(\mathbf{s}_2+\mathbf{r}_z\mathbf{S}_2)]=C[\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2+\mathbf{r}_z^2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2+(\mathbf{s}_1\mathbf{S}_2+\mathbf{s}_2\mathbf{S}_1)\mathbf{r}_z]=$$
$$\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2+\mathbf{r}_z^2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2-(\mathbf{s}_1\mathbf{S}_2+\mathbf{s}_2\mathbf{S}_1)\mathbf{r}_z=(\mathbf{s}_1-\mathbf{r}_z\mathbf{S}_1)(\mathbf{s}_2-\mathbf{r}_z\mathbf{S}_2)=C[\mathbf{r}_1]C[\mathbf{r}_2].$$

Теперь мы можем ввести норму степени $2k$ по правилу:

$$N_{2k}(\mathbf{u})=N_k(\mathbf{u})C[N_k(\mathbf{u})]$$

и доказать ее мультипликативность:

$$N_{2k}(\mathbf{uv})=N_k(\mathbf{uv})C[N_k(\mathbf{uv})]=N_k(\mathbf{u})N_k(\mathbf{v})C[N_k(\mathbf{u})N_k(\mathbf{v})]=$$
$$N_k(\mathbf{u})N_k(\mathbf{v})C[N_k(\mathbf{u})]C[N_k(\mathbf{v})]=N_k(\mathbf{u})C[N_k(\mathbf{u})]N_k(\mathbf{v})C[N_k(\mathbf{v})]=N_{2k}(\mathbf{u})N_{2k}(\mathbf{v}).$$

Итак, описанный метод построения вещественной n-нормы вместе с тем доказывает

Теорема 8. *Всякая альтернативная последовательно градуированная алгебра с центральным сопряжением и невырожденной 2-нормой обладает вещественной невырожденной мультипликативной нормой степени n, выражающейся с помощью набора сопряжений через исходную 2-норму. При этом степень нормы вдвое выше размерности центра алгебры (инвариантного относительно базового сопряжения) $n=2r$.*

Поскольку посредством данного алгоритма n-норма строится на основе 2-нормы, многие ее свойства в альтернативных алгебрах с центральным сопряжением автоматически переносятся на n-норму и порождаемую ею n-скалярное произведение. Так,

$$\begin{gathered} N_n(\bar{\mathbf{u}}) = N_n(\mathbf{u}), \\ (\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{u}}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n), \\ (\mathbf{v}\mathbf{u}_1, \mathbf{v}\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{v}\mathbf{u}_n) = N_n(\mathbf{v})(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n). \end{gathered} \tag{84}$$

Четырехнорма для бикватернионов, дикватернионов и биоктав

Особенно легко получить вещественную норму алгебр бикватернионов, дикватернионов и биоктав, она будет иметь степень 4. Алгоритм очевиден: 2-норма является здесь комплексным или двойным числом; умножив его на сопряженное, получим вещественное число.

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^* \tag{85}$$

Учитывая (23), получим:

$$N_4(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^* = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}^*) = N_2(\bar{\mathbf{a}})N_2(\bar{\mathbf{a}}^*) = N_4(\bar{\mathbf{a}}). \tag{86}$$

В блочном виде 4-норма для алгебр бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) \mp N_2(k))^2 \pm 4(a, k)^2, \tag{87}$$

а для биоктав:

$$N_4(a + A\cdot\mathbf{e}_0 + k\cdot\mathbf{i}_0 + K\cdot\mathbf{f}_0) = (N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K))^2 + 4((a, k) + (A, K))^2. \tag{88}$$

В покомпонентном виде 4-норма бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ \mp (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2))^2 \ \pm 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)^2, \tag{89}$$

для биоктав:

$$\begin{aligned} N_4(\mathbf{a}) = (&a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ + A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \ - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \ - K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2)^2 \\ &+ 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 \ + A_0K_0 + A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)^2. \end{aligned} \tag{90}$$

С очевидностью, все нормы неотрицательны. Но они не являются положительно определенными (и не могут являться в силу теоремы Фробениуса): из факта $N_4(\mathbf{a}) = 0$ не следует $\mathbf{a} = 0$. В самом деле, для дикватернионов достаточно просто взять $a = A$, и 4-норма будет равна 0:

$$N_4(a + a \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) + N_2(a))^2 - 4(a, a)^2 = 4N_2(a)^2 - 4N_2(a)^2 = 0.$$

Для бикватернионов ситуация несколько хитрее. Как легко видеть, чтобы занулить 4-норму, нужно взять A равным по 2-норме a, и при этом перпендикулярным ему: $(a, A) = 0$. Например, $a = 3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_3$, $A = 2\mathbf{i}_0 + 3\mathbf{i}_2$.

Формула мультипликативности 4-нормы биоктав в кватернионной записи выглядит так (с помощью довольно длинных преобразований ее несложно доказать и напрямую):

$$
\begin{gathered}
\big(N_2(a)+N_2(A)-N_2(k)-N_2(K)\big)^2+4\big((a,k)+(A,K)\big)^2\cdot \\
\big(N_2(b)+N_2(B)-N_2(l)-N_2(L)\big)^2+4\big((b,l)+(B,L)\big)^2= \\
\big(N_2(ab-\bar{B}A-kl+\bar{L}K)+N_2(Ba+A\bar{b}-Lk-K\bar{l}) \\
-N_2(al-\bar{L}A+kb-\bar{B}K)-N_2(La+K\bar{b}+Bk+A\bar{l})\big)^2 \\
+4\big((ab-\bar{B}A-kl+\bar{L}K,\ al-\bar{L}A+kb-\bar{B}K) \\
+(Ba+A\bar{b}-Lk-K\bar{l},\ La+K\bar{b}+Bk+A\bar{l})\big)^2
\end{gathered}
\tag{91}
$$

Для иллюстративных целей покажем, как выглядит в вещественных числах тождество, выражающее мультипликативность 4-нормы алгебры биоктав.

$$
\begin{gathered}
\Big[(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2\ +A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2\ -k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2\ -K_0^2-K_1^2-K_2^2-K_3^2)^2 \\
+\ 4(a_0k_0+a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3\ +A_0K_0+A_1K_1+A_2K_2+A_3K_3)^2\Big]\cdot \\
\Big[(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2\ +B_0^2+B_1^2+B_2^2+B_3^2\ -l_0^2-l_1^2-l_2^2-l_3^2\ -L_0^2-L_1^2-L_2^2-L_3^2)^2 \\
+\ 4(b_0l_0+b_1l_1+b_2l_2+b_3l_3\ +B_0L_0+B_1L_1+B_2L_2+B_3L_3)^2\Big]= \\
\Big[(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-A_0B_0-A_1B_1-A_2B_2-A_3B_3-k_0l_0+k_1l_1+k_2l_2+k_3l_3+K_0L_0+K_1L_1+K_2L_2+K_3L_3)^2 \\
+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2+A_0B_1-A_1B_0-A_2B_3+A_3B_2-k_0l_1-k_1l_0-k_2l_3+k_3k_2-K_0L_1+K_1L_0+K_2L_3-K_3L_2)^2 \\
+(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1-k_0l_2+k_1l_3-k_2B_0-k_3B_1+A_0B_2+A_1B_3-A_2B_0-A_3B_1-K_0L_2-K_1L_3+K_2L_0+K_3L_1)^2 \\
+(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0-k_0l_3-k_1l_2+k_2l_1-k_3l_0+A_0B_3-A_1B_2+A_2B_1-A_3B_0-K_0L_3+K_1L_2-K_2L_1+K_3L_0)^2 \\
+(a_0B_0-a_1B_1-a_2B_2-a_3B_3+A_0b_0+A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3-k_0L_0+k_1L_1+k_2L_2+k_3L_3-K_0l_0-K_1l_1-K_2l_2-K_3l_3)^2 \\
+(a_0B_1+a_1B_0-a_2B_3+a_3B_2-A_0b_1+A_1b_0-A_2b_3+A_3b_2-k_0L_1-k_1L_0+k_2L_3-k_3L_2+K_0l_1-K_1l_0+K_2l_3-K_3l_2)^2 \\
+(a_0B_2+a_1B_3+a_2B_0-a_3B_1-A_0b_2+A_1b_3+A_2b_0-A_3b_1-k_0L_2-k_1L_3-k_2L_0+k_3L_1+K_0l_2-K_1l_3-K_2l_0+K_3l_1)^2 \\
+(a_0B_3-a_1B_2+a_2B_1+a_3B_0-A_0b_3-A_1b_2+A_2b_1+A_3b_0-k_0L_3+k_1L_2-k_2L_1-k_3L_0+K_0l_3+K_1l_2-K_2l_1-K_3l_0)^2 \\
-(a_0l_0-a_1l_1-a_2l_2-a_3l_3+k_0b_0-k_1b_1-k_2b_2-k_3b_3-A_0L_0-A_1L_1-A_2L_2-A_3L_3-K_0B_0-K_1B_1-K_2B_2-K_3B_3)^2 \\
-(a_0l_1+a_1l_0+a_2l_3-a_3l_2+k_0b_1+k_1b_0+k_2b_3-k_3b_2+A_0L_1-A_1L_0-A_2L_3+A_3L_2+K_0B_1-K_1B_0-K_2B_3+K_3B_2)^2 \\
-(a_0l_2-a_1l_3+a_2l_0+a_3l_1+k_0b_2-k_1b_3+k_2b_0+k_3b_1+A_0L_2+A_1L_3-A_2L_0-A_3L_1+K_0B_2+K_1B_3-K_2B_0-K_3B_1)^2 \\
-(a_0l_3+a_1l_2-a_2l_1+a_3l_0+k_0b_3+k_1b_2-k_2b_1+k_3b_0+A_0L_3-A_1L_2+A_2L_1-A_3L_0+K_0B_3-K_1B_2+K_2B_1-K_3B_0)^2 \\
-(a_0L_0-a_1L_1-a_2L_2-a_3L_3+A_0l_0+A_1l_1+A_2l_2+A_3l_3+k_0B_0-k_1B_1-k_2B_2-k_3B_3+K_0b_0+K_1b_1+K_2b_2+K_3b_3)^2 \\
-(a_0L_1+a_1L_0-a_2L_3+a_3L_2-A_0l_1+A_1l_0-A_2l_3+A_3l_2+k_0B_1+k_1B_0-k_2B_3+k_3B_2-K_0b_1+K_1b_0-K_2b_3+K_3b_2)^2 \\
-(a_0L_2+a_1L_3+a_2L_0-a_3L_1-A_0l_2+A_1l_3+A_2l_0-A_3l_1+k_0B_2+k_1B_3+k_2B_0-k_3B_1-K_0b_2+K_1b_3+K_2b_0-K_3b_1)^2 \\
-(a_0L_3-a_1L_2+a_2L_1+a_3L_0-A_0l_3-A_1l_2+A_2l_1+A_3l_0+k_0B_3-k_1B_2+k_2B_1+k_3B_0-K_0b_3-K_1b_2+K_2b_1+K_3b_0)^2\Big]^2 \\[1em]
+4\Big[(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3\ -A_0B_0-A_1B_1-A_2B_2-A_3B_3-k_0l_0+k_1l_1+k_2l_2+k_3l_3\ +K_0L_0+K_1L_1+K_2L_2+K_3L_3)\cdot \\
(a_0l_0-a_1l_1-a_2l_2-a_3l_3\ +k_0b_0-k_1b_1-k_2b_2-k_3b_3-A_0L_0-A_1L_1-A_2L_2-A_3L_3\ -K_0B_0-K_1B_1-K_2B_2-K_3B_3) \\
+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2\ +A_0B_1-A_1B_0-A_2B_3+A_3B_2-k_0l_1-k_1l_0-k_2l_3+k_3k_2\ -K_0L_1+K_1L_0+K_2L_3-K_3L_2\ )\cdot \\
(a_0l_1+a_1l_0+a_2l_3-a_3l_2\ +k_0b_1+k_1b_0+k_2b_3-k_3b_2+A_0L_1-A_1L_0-A_2L_3+A_3L_2\ +K_0B_1-K_1B_0-K_2B_3+K_3B_2) \\
+(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1\ -k_0l_2+k_1l_3-k_2B_0-k_3B_1+A_0B_2+A_1B_3-A_2B_0-A_3B_1\ -K_0L_2-K_1L_3+K_2L_0+K_3L_1)\cdot \\
(a_0l_2-a_1l_3+a_2l_0+a_3l_1\ +k_0b_2-k_1b_3+k_2b_0+k_3b_1+A_0L_2+A_1L_3-A_2L_0-A_3L_1\ +K_0B_2+K_1B_3-K_2B_0-K_3B_1) \\
+(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0\ -k_0l_3-k_1l_2+k_2l_1-k_3l_0+A_0B_3-A_1B_2+A_2B_1-A_3B_0\ -K_0L_3+K_1L_2-K_2L_1+K_3L_0)\cdot \\
(a_0l_3+a_1l_2-a_2l_1+a_3l_0\ +k_0b_3+k_1b_2-k_2b_1+k_3b_0+A_0L_3-A_1L_2+A_2L_1-A_3L_0\ +K_0B_3-K_1B_2+K_2B_1-K_3B_0) \\
+(a_0B_0-a_1B_1-a_2B_2-a_3B_3+A_0b_0+A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3-k_0L_0+k_1L_1+k_2L_2+k_3L_3-K_0l_0-K_1l_1-K_2l_2-K_3l_3)\cdot \\
(a_0L_0-a_1L_1-a_2L_2-a_3L_3+A_0l_0+A_1l_1+A_2l_2+A_3l_3+k_0B_0-k_1B_1-k_2B_2-k_3B_3+K_0b_0+K_1b_1+K_2b_2+K_3b_3) \\
+(a_0B_1+a_1B_0-a_2B_3+a_3B_2-A_0b_1+A_1b_0-A_2b_3+A_3b_2-k_0L_1-k_1L_0+k_2L_3-k_3L_2+K_0l_1-K_1l_0+K_2l_3-K_3l_2)\cdot \\
(a_0L_1+a_1L_0-a_2L_3+a_3L_2-A_0l_1+A_1l_0-A_2l_3+A_3l_2+k_0B_1+k_1B_0-k_2B_3+k_3B_2-K_0b_1+K_1b_0-K_2b_3+K_3b_2) \\
+(a_0B_2+a_1B_3+a_2B_0-a_3B_1-A_0b_2+A_1b_3+A_2b_0-A_3b_1-k_0L_2-k_1L_3-k_2L_0+k_3L_1+K_0l_2-K_1l_3-K_2l_0+K_3l_1)\cdot \\
(a_0L_2+a_1L_3+a_2L_0-a_3L_1-A_0l_2+A_1l_3+A_2l_0-A_3l_1+k_0B_2+k_1B_3+k_2B_0-k_3B_1-K_0b_2+K_1b_3+K_2b_0-K_3b_1) \\
+(a_0B_3-a_1B_2+a_2B_1+a_3B_0-A_0b_3-A_1b_2+A_2b_1+A_3b_0-k_0L_3+k_1L_2-k_2L_1-k_3L_0+K_0l_3+K_1l_2-K_2l_1-K_3l_0)\cdot \\
(a_0L_3-a_1L_2+a_2L_1+a_3L_0-A_0l_3-A_1l_2+A_2l_1+A_3l_0+k_0B_3-k_1B_2+k_2B_1+k_3B_0-K_0b_3-K_1b_2+K_2b_1+K_3b_0)\Big]^2.
\end{gathered}
\tag{92}
$$

Это слоноподобное тождество является непосредственным обобщением знаменитого тождества восьми квадратов. Более того, это тождество можно считать максимальным и исключительным. Поскольку по теореме Цорна биоктавы – максимальная простая альтернативная (неассоциативная) алгебра, то все тождества большей размерности, связанные с неассоциативными алгебрами, так или иначе сведутся к данному или его фрагментам. Подобно формулам суммы квадратов, это тождество, случайное с позиций вещественных чисел, является отражением существования алгебр биоктав.

Знание 4-нормы позволяет ввести *обратный элемент* для алгебр би(ди)кватернионов и биоктав (и вообще для любой алгебры с центральным сопряжением и нормой 4 порядка). Поскольку

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}N_2^*(\bar{\mathbf{a}}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = N_4(\mathbf{a}),$$

то ясно, как ввести правый и левый обратный элемент, если $N_4(\mathbf{a}) \neq 0$:

$$\mathbf{a}_p^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a})}{N_4(\mathbf{a})} = \frac{\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^*}{N_4(\mathbf{a})}, \quad \mathbf{a}_l^{-1} = \frac{N_2^*(\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}}}{N_4(\mathbf{a})} \equiv \mathbf{a}_p^{-1}. \tag{93}$$

Поскольку $N_2(\bar{\mathbf{a}}) = N_2(\mathbf{a})$, то *правый и левый обратные элементы с очевидностью совпадают в любой алгебре с центральным сопряжением* – с любой степенью нормы, поскольку рассуждение легко обобщается. То, что формулы (93) действительно дают обратный элемент:

$$\mathbf{a}\mathbf{a}_p^{-1} = \mathbf{a}_l^{-1}\mathbf{a} = 1. \tag{94}$$

вытекает из ассоциативности произведений реальной 2-нормы с любыми элементами алгебры (свойство (45)). Таким образом, обратный элемент существует для каждого элемента с ненулевой 4-нормой алгебры $\mathbb{A}_c$.

Дуальная четырехнорма для бикватернионов и дикватернионов

Неожиданным фактом является то, что есть и совершенно другой способ получения 4-нормы для алгебр бикватернионов и дикватернионов, иначе говоря, получения вещественного числа для произвольного элемента этих алгебр с помощью умножения и сопряжений. Если вместо $\bar{\mathbf{a}}$ взять как базовое сопряжение дуальное сопряжение $\widetilde{\mathbf{a}}$ (21) то в произведении $\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}$ останутся лишь инвариантные (реальные) относительно него члены, пропорциональные ортам $1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Поскольку орты $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ антикоммутируют меж собой, можно умножить $\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}$ на его комплексное сопряжение $(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}})^*$ (все члены с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ изменят знак) и получить вещественное число. Итак, вторую 4-норму для алгебр би(ди)кватернионов можно ввести как:

$$N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}})^*. \tag{95}$$

Поскольку дуальное сопряжение равно $\widetilde{\mathbf{a}} = \bar{a} - \mathbf{i}_0\bar{k}$ (21), то в блочном виде альтернативная 2-норма для алгебр бикватернионов и дикватернионов ($\mathbf{i}_0^2 = \mp 1$) равна

$$N_2^{\circledast}(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (a + k \cdot \mathbf{i}_0)(\bar{a} - \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0) = N_2(a) \pm N_2(k) + 2\langle k, a\rangle\mathbf{i}_0. \tag{96}$$

Далее, $N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = N_2^{\circledast}(\mathbf{a})[N_2^{\circledast}(\mathbf{a})]^*$. Но поскольку

$$(m + \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_0)(m - \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_0) = m^2 \pm \mathbf{q}^2$$

для вещественного m и чисто мнимого кватерниона $\mathbf{q}$, то в блочном виде вторая 4-норма для алгебр бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4^{\circledast}(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) \pm N_2(k))^2 \pm 4\langle k, a\rangle^2. \tag{97}$$

Вместо скалярного произведения кватернионов в альтернативную норму входит их векторное произведение.

Так как для чисто мнимого кватерниона $\mathbf{q}^2 = -\sum_k \mathbf{q}_k^2$, то в покомпонентном виде альтернативная 4-норма бикватернионов и дикватернионов ($\mathbf{i}_0^2 = -1, +1$) равна:

$$N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = \big(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ \pm (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)\big)^2 \ \mp 4\big(a_1k_0 - a_0k_1 + a_3k_2 - a_2k_3\big)^2 \\ \mp 4\big(a_2k_0 - a_0k_2 + a_1k_3 - a_3k_1\big)^2 \mp 4\big(a_3k_0 - a_0k_3 + a_2k_1 - a_1k_2\big)^2. \quad (98)$$

Дуальная 4-норма совершенно не похожа на первую 4-норму. Тем не менее, докажем их эквивалентность. Учитывая (23) и то, что $\widetilde{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}^*$, получим:

$$N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{a}}^* = \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^*\bar{\mathbf{a}}.$$

Но $\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}$, как и его модификация $(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^*$, принадлежат центру алгебры. Следовательно,

$$N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^*\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^* = N_4(\mathbf{a}).$$

Итак, мы доказали, что в алгебрах би(ди)кватернионов оба вида 4-нормы совпадают. Этот факт в кватернионной записи для бикватернионов (дикватернионы дают то же самое в другом порядке):

$$(N_2(a) - N_2(k))^2 + 4(a,k)^2 = (N_2(a) + N_2(k))^2 + 4\langle k,a\rangle^2 \qquad (\,\langle k,a\rangle^2 \leqslant 0\,), \quad (99)$$

и после очевидных преобразований сводится к тождеству (66)

$$N_2(a)N_2(k) = (a,k)^2 - \langle k,a\rangle^2.$$

В вещественных числах это тождество довольно красиво:

$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = \\ (a_0A_0 + a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)^2 + (a_1A_0 - a_0A_1 + a_3A_2 - a_2A_3)^2 \\ + (a_2A_0 - a_0A_2 + a_1A_3 - a_3A_1)^2 + (a_3A_0 - a_0A_3 + a_2A_1 - a_1A_2)^2. \quad (100)$$

Четырехскалярное произведение для бикватернионов, дикватернионов и биоктав

Для случая $n = 4$ формула Шафера (83) выглядит так:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{24}\big[N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) \ - N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) \\ - N_4(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) \ + N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + N_4(\mathbf{a}+\mathbf{c}) + N_4(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + N_4(\mathbf{a}+\mathbf{d}) \\ + N_4(\mathbf{b}+\mathbf{d}) + N_4(\mathbf{c}+\mathbf{d}) \ - N_4(\mathbf{a}) - N_4(\mathbf{b}) - N_4(\mathbf{c}) - N_4(\mathbf{d})\big]. \quad (101)$$

Учтя теперь формулу, выражающую для алгебр бикватернионов и дикватернионов 4-норму через 2-норму (85), и выражая 2-норму суммы через 2-скалярное произведение согласно (55), получаем после ряда преобразований и упрощений формулу 4-скалярное произведения в алгебрах $\mathbb{A}_c$ с нормой 4 степени:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{6}\big[(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{c},\mathbf{d})^* + (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d})^* + (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c})^* + \\ + (\mathbf{c},\mathbf{d})(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + (\mathbf{b},\mathbf{d})(\mathbf{a},\mathbf{c})^* + (\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{a},\mathbf{d})^*\big], \qquad \text{или} \quad (102)$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{6}\big[(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{c}^*,\mathbf{d}^*) + (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b}^*,\mathbf{d}^*) + (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b}^*,\mathbf{c}^*) + \\ + (\mathbf{c},\mathbf{d})(\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*) + (\mathbf{b},\mathbf{d})(\mathbf{a}^*,\mathbf{c}^*) + (\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{a}^*,\mathbf{d}^*)\big]. \quad (103)$$

Несложно вывести ряд полезных следствий из этой формулы. Так, при решении геометрических вопросов важны вещественные 4-формы от двух векторов. На основании 4-формы от 4 векторов их можно ввести две:

$$(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}) = \frac{1}{6}\big[N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + 4(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})\big], \quad (104)$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big[N_2(\mathbf{a})(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + (\mathbf{a},\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})\big], \quad (105)$$

а кроме того полезно иметь в виду третью

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} = (\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{a},\mathbf{b})^*. \quad (106)$$

Отметим также симметризованную форму:

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = (\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big[(N_2(\mathbf{a})+N_2(\mathbf{b}))(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + (\mathbf{a},\mathbf{b})(N_2^*(\mathbf{a})+N_2^*(\mathbf{b}))\big] \quad (107)$$

С ее использованием формула 4-нормы суммы

$$N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \\ = N_4(\mathbf{a}) + 4(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) + 6(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}) + 4(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{b}) + N_4(\mathbf{b}) \quad (108)$$

выглядит так:

$$N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = N_4(\mathbf{a}) + N_4(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a}) + 4\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} + 4\mathbf{a}\circ\mathbf{b} \quad (109)$$

Свойства форм $(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b})$ и $(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b})$ весьма различны. В самом деле, как несложно подсчитать, симметричная форма $(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q,\mathbf{j}_q)$ для биоктав (и значит, в том числе, для октав, бикватернионов и в равной степени для дикватернионов) равна

$$(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q,\mathbf{j}_q) = 1 \qquad \text{при} \quad p = q, \\ (\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q,\mathbf{j}_q) = \pm 1/3 \qquad \text{при} \quad p \neq q. \quad (110)$$

Напротив, $\mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q$ равен нулю не только тогда, когда 2-скалярное произведение $(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q) = 0$, но и во всех случаях, когда орты $\mathbf{j}_p$ и $\mathbf{j}_q$ различны:

$$(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q) = 0 \qquad \text{если} \quad p \neq q, \quad (111)$$

и поэтому

$$\mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q = \delta_{pq}, \quad (112)$$

Таким образом, *отношение* $\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = 0$ *можно рассматривать как обобщение ортогональности векторов на случай форм 4 степени.*

При проведении расчетов полезно иметь в виду, что

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^*\mathbf{a} \qquad \text{и поэтому} \quad \mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{b}\mathbf{a}^* = \mathbf{b}^*\mathbf{a} + \mathbf{a}^*\mathbf{b}. \quad (113)$$

Четырехвекторное произведение для бикватернионов и биоктав

Имеет смысл пойти дальше результатов Шафера и обобщить не только скалярное, но и векторное произведение. Для алгебр бикватернионов, биоктав и им подобным четырехвекторное произведение можно предложить на основе следующей формулы:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{6}\big[\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle^* + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{d}, \mathbf{b}\rangle^* + \langle \mathbf{a}, \mathbf{d}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle^* + \\ + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^* + \langle \mathbf{d}, \mathbf{b}\rangle\langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle^* + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{a}, \mathbf{d}\rangle^*\big], \qquad \text{или} \qquad (114)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{6}\big[\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle\langle \mathbf{c}^*, \mathbf{d}^*\rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{d}^*, \mathbf{b}^*\rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{d}\rangle\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*\rangle + \\ + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle\langle \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*\rangle + \langle \mathbf{d}, \mathbf{b}\rangle\langle \mathbf{a}^*, \mathbf{c}^*\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*\rangle\big]. \qquad (115)$$

Как легко видеть, 4-векторное произведение полностью антисимметрично относительно перестановок в любой паре векторов. Как и 2-векторное произведение, это не вещественное число, а гиперкомплексный вектор. Любопытно, что в отличие от чисто мнимого 2-векторного произведения, 4-векторное произведение реально относительно базового сопряжения $\bar{\mathbf{r}}$ (и содержит поэтому только орты 1 и $\mathbf{i}_0$). Можно показать, что если половина степени нормы $n/2$ – четное число, то n-векторное произведение будет реальным, при нечетным $n/2$ – мнимым (так, мнимо 2-векторное произведение кватернионов).

Если формально образовать 4-векторное произведение из кватернионов (алгебры с нормой степени 2, а не 4), получится вещественное число с ясным геометрическим смыслом. Для кватернионов, как легко показать, 4-векторное произведение равно детерминанту матрицы, составленной из координат входящих в него векторов:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}. \qquad (116)$$

Т. о. 4-векторное произведение для кватернионов равно 4-объему параллелепипеда, натянутого на четыре вектора, т. е. совпадает с смешанным произведением 4 порядка (скаляром).

Норма и скалярное произведение бикватернионов в изотропном базисе

Структурные свойства алгебры, как правило, хорошо видны не в обычном базисе, а в базисах, образованных элементами с нулевой нормой. Как известно, в полупростых ассоциативных кольцах идеалы порождаются идемпотентами. Взяв в алгебре бикватернионов два изотропных идемпотента ($e^2 = e$) $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{v}_0$, получим с их помощью изотропный базис $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_k\}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_0 = 1 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{q}_1(1 + \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{q}_2(1 + \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{q}_3(1 + \mathbf{i}_3), \\ &\mathbf{v}_0 = 1 - \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1(1 - \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_2(1 - \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{q}_3(1 - \mathbf{i}_3), \end{aligned} \qquad (117)$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_0 = 1 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{q}_1 - \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{i}_0, \\ &\mathbf{v}_0 = 1 - \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{i}_0. \end{aligned} \qquad (118)$$

Таблица умножения алгебры бикватернионов в изотропном базисе:

$\times$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_0$	0	0	$\mathbf{u}_3$	0	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	0
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_1$	0	0	$-\mathbf{u}_2$	0	$-\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_3$	0
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_2$	0	0	$\mathbf{u}_1$	0	$-\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_0$	0
$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_1$	0	0	$-\mathbf{u}_0$	0	$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_1$	0
$\mathbf{v}_0$	0	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	0	$\mathbf{v}_0$	0	0	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	$-\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_3$	0	$\mathbf{v}_1$	0	0	$-\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_2$	0	$-\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_0$	0	$\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	0	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$	0	$\mathbf{v}_3$	0	0	$-\mathbf{v}_0$

. $(Tab.\ 6)$

Мы видим, что наборы векторов $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$ образуют левые идеалы по умножению в алгебре бикватернионов. (Умножение слева любого элемента алгебры на произвольный элемент набора дает снова элемент этого набора). Идеалы не могут быть двусторонними в силу простоты алгебры бикватернионов.

Таблица 2-скалярных произведений бикватернионов в изотропном базисе:

$(\times)$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{u}_0$	0	0	0	0	1	0	0	$\mathbf{i}_0$
$\mathbf{u}_1$	0	0	0	0	0	1	$-\mathbf{i}_0$	0
$\mathbf{u}_2$	0	0	0	0	0	$\mathbf{i}_0$	1	0
$\mathbf{u}_3$	0	0	0	0	$-\mathbf{i}_0$	0	0	1
$\mathbf{v}_0$	1	0	0	$-\mathbf{i}_0$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_1$	0	1	$\mathbf{i}_0$	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_2$	0	$-\mathbf{i}_0$	1	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{i}_0$	0	0	1	0	0	0	0

. $(Tab.\ 7)$

Отсюда вытекает вид 2-нормы алгебры бикватернионов в изотропном базисе $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$. Запишем $\mathbf{a}$ в изотропном базисе:

$$\begin{gathered}\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3,\\ \mathbf{a} = r_0\mathbf{u}_0 + r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + r_3\mathbf{u}_3 + s_0\mathbf{v}_0 + s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + s_3\mathbf{v}_3,\end{gathered} \tag{119}$$

где вещественные числа r_k, s_k:

$$\begin{gathered}r_0 = 1/2(a_0 + k_3),\ r_1 = 1/2(a_1 - k_2),\ r_2 = 1/2(a_2 + k_1),\ r_3 = 1/2(a_3 - k_0),\\ s_0 = 1/2(a_0 - k_3),\ s_1 = 1/2(a_1 + k_2),\ s_2 = 1/2(a_2 - k_1),\ s_3 = 1/2(a_3 + k_0).\end{gathered} \tag{120}$$

Тогда 2-норма в изотропном базисе равна:

$$N_2(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = r_0s_0 + r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3 + \mathbf{i}_0(r_0s_3 - r_3s_0 + r_2s_1 - r_1s_2) \tag{121}$$

Отсюда получается 4-норма бикватернионов в изотропном базисе:

$$N_4(\mathbf{a}) = (r_0s_0 + r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3)^2 + (r_0s_3 - r_1s_2 + r_2s_1 - r_3s_0)^2. \tag{122}$$

Норма и скалярное произведение дикватернионов в изотропном базисе

Для дикватернионов ситуация с изотропным базисом несколько хитрее, но результат проще. Как легко видеть из таблицы 5, на квадратичном уровне двойная норма обратиться в нуль не может. Однако, ситуация меняется на уровне нормы 4 степени, которую можно занулить очевидным образом. Опять же взяв два идемпотента, выберем 4-изотропный базис в виде:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_0 = 1 + \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{q}_1(1 + \mathbf{i}_0), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{q}_2(1 + \mathbf{i}_0), \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{q}_3(1 + \mathbf{i}_0), \\ &\mathbf{v}_0 = 1 - \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1(1 - \mathbf{i}_0), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_2(1 - \mathbf{i}_0), \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{q}_3(1 - \mathbf{i}_0), \end{aligned} \tag{123}$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_0 = 1 + \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{i}_3, \\ &\mathbf{v}_0 = 1 - \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1 - \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{i}_3. \end{aligned} \tag{124}$$

Таблица умножения алгебры дикватернионов в изотропном базисе:

$\times$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_1$	$-\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_2$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$	$-\mathbf{u}_0$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_0$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_2$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_0$

. (*Tab.* 8)

Наборы векторов $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$ образуют двусторонние идеалы в алгебре дикватернионов, которая разлагается в их прямую сумму. Иначе говоря, алгебра дикватернионов является не простой, но лишь полупростой.

Поэтому скалярное произведение дикватернионов в изотропном базисе устроено очень просто:

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \delta_{ik}\mathbf{u}_0, \quad (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k) = \delta_{ik}\mathbf{v}_0, \quad (\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_k) = 0, \tag{125}$$

Записав число $\mathbf{a}$ в изотропном базисе:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3, \\ \mathbf{a} &= r_0\mathbf{u}_0 + r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + r_3\mathbf{u}_3 + s_0\mathbf{v}_0 + s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + s_3\mathbf{v}_3, \end{aligned} \tag{126}$$

где вещественные числа r_k, s_k:

$$\begin{aligned} &r_0 = 1/2(a_0 + k_0),\ r_1 = 1/2(a_1 + k_1),\ r_2 = 1/2(a_2 + k_2),\ r_3 = 1/2(a_3 + k_3), \\ &s_0 = 1/2(a_0 - k_0),\ s_1 = 1/2(a_1 - k_1),\ s_2 = 1/2(a_2 - k_2),\ s_3 = 1/2(a_3 - k_3). \end{aligned} \tag{127}$$

получим вид 2-нормы в изотропном базисе:

$$N_2(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (1 + \mathbf{i}_0)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + (1 - \mathbf{i}_0)(s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \tag{128}$$

Поскольку для двойных чисел $(1+\mathbf{i}_0)(1-\mathbf{i}_0)=0$, то

$$\big(\mathbf{r}(1+\mathbf{i}_0)+\mathbf{s}(1-\mathbf{i}_0)\big)\big(\mathbf{r}(1-\mathbf{i}_0)+\mathbf{s}(1+\mathbf{i}_0)\big)=2\mathbf{rs}.$$

Поэтому 4-норма дикватернионов в изотропном базисе распадается на произведение двух 2-норм

$$N_4(\mathbf{a})=N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^*=(r_0^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2)(s_0^2+s_1^2+s_2^2+s_3^2). \tag{129}$$

Выводы

Метод изучения алгебры на основе анализа допускаемых ею сопряжений позволяет не только получить простым образом уже известные результаты, но и некоторые интересные новые. В частности, упрощается работа с формами степени выше квадратичной.

Однако, поскольку уже 2-норма для алгебр бикватернионов и биоктав является мультипликативной и поскольку 4-норма однозначно выражается через нее, неясно, создает ли переход от комплексной (или двойной) 2-нормы к вещественной 4-норме какие-либо новые возможности. Точно так же неясно, дадут ли что-то принципиально новое 4-скалярное и 4-векторное произведения, поскольку и они выражаются через свои прототипы 2 степени. В любом случае, представляются интересными попытки придать этим квадраобъектам какой-либо геометрический и физический смысл.

Благодарности

Автору приятно выразить свою признательность Г. И. Гарасько, к. т. н. Д. Г. Павлову, проф. В. И. Санюку и А. В. Чалыку за ценное обсуждение.

Литература

[1] А. П. Ефремов. *Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004, см. также arXiv:math-ph/0501055.

[2] В. В. Сильвестров. *Системы чисел*, Соросовский образовательный журнал. № 8, 1998, 121–127.

[3] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.

[4] John C. Baez. *The Octonions.* ArXiv: math-RA/0105155

[5] R. D. Schafer. *On forms of degree n permitting composition*, J. Math. Mech. **12** (1963), 777–792. В русском переводе: Шафер Р. Д., *О формах степени n, допускающих композицию,* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004, 140–154.

[6] R. D. Schafer. *Forms permitting composition*, Advances in Mathematics **4**, 111–148 (1970).

[7] R. D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1 изд. 1967, 2 изд. 1991.

[8] K. McCrimmon. *Generically algebraic algebras*, Trans. Amer. math. Soc. **127** (1967), 527–551.

[9] Д. Г. Павлов. *Обобщение аксиом скалярного произведения*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[10] D. G. Pavlov. *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, arXiv:gr-qc/0206004.

[11] Б. А. Розенфельд: *Многомерные пространства*, Наука, М. 1966.

[12] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский: *Геометрия групп Ли*, МЦНМО, М. 2003.

[13] "Общая алгебра", том 1. Справочная математическая библиотека. М., "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.