ОБОБЩЕННО–АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И КОНГРУЕНЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт
gri9z@mail.ru

В данной работе изучаются некоторые свойства обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной. Классу $\{f^i; \Gamma^i_{kj}\}$ таких функций можно сопоставить множество пространств аффинной связности, в каждом из которых определяется конгруенция геодезических, ассоциированная с данным классом обобщенно-аналитических функций. Если векторное поле f^i в каждой точке такого пространства касательно одной из геодезических конгруенции, то такое свойство накладывает некоторые ограничений на саму обобщенно-аналитическую функцию.

Введение

Впечатляющие успехи теории функций комплексной переменной и ее приложений при решении физических задач побуждает искать обобщение такой теории для пространств размерности больше, чем два. Одним из таких возможных обобщений является построение теории обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной [1] с рядом дополнительных условий, выполнение которых позволяло бы автоматически применять такие функции при построении теоретико-физических моделей и решении конкретных физических задач.

Обобщенно-аналитическая функция (подробнее см. [1]) – это пара $\{f^i; \gamma^i_k\}$:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma^i_k = p^i_{kj}\dot{f}^j, \quad \text{или} \quad \tilde{\nabla}_k f^i = p^i_{kj}\dot{f}^j, \tag{1}$$

где f^i, $\dot{f}^i$ – одноковариантные векторные поля в пространстве $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$, $\mathbf{M_n}$ – n-мерное элементарное многообразие, допускающее взаимно однозначное отображение $\mathbf{M_n} \leftrightarrow \mathbf{P_n}$ на n-мерное пространство поличисел $\mathbf{P_n}$, а объекты γ^i_k при переходе от одной системы координат к другой преобразуются как объекты $(\Gamma^i_{kj} f^i)$, где Γ^i_{kj} – объекты аффинной связности. Одним из необходимых свойств пространства $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$ постулируется изоморфность касательного пространства в любой точке $X \in \{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$ пространству ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел) $\mathbf{P_n}$. Наличие взаимно однозначного отображения $\mathbf{M_n} \leftrightarrow \mathbf{P_n}$ позволяет вводить в пространстве $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$ специальные системы координат, в которых тензорное поле p^i_{kj}, определяющее правила поличислового умножения, не зависит от точки пространства; если $\mathbf{P_n} \ni e_1, e_2, ..., e_n$ – базис, то

$$e_i e_j = p^k_{ij} e_k. \tag{2}$$

Пусть ε^i – координаты разложения единицы, тогда

$$\varepsilon^i p^k_{ij} = \delta^k_j. \tag{3}$$

Используя эту формулу и формулу (1), получим явное инвариантное выражение обобщенной производной

$$\dot{f}^i = \varepsilon^k \tilde{\nabla}_k f^i \tag{4}$$

и соотношений Коши-Римана

$$\tilde{\nabla}_k f^i - p^i_{kj}\varepsilon^m\tilde{\nabla}_m f^j = 0. \tag{5}$$

Каждой обобщенно-аналитической функции $\{f^i;\gamma^i_k\}$ можно сопоставить множество пространств аффинной связности $\mathbf{L_n}(\Gamma^i_{kj})$ с объектами аффинной связности Γ^i_{kj}, являющимися решениями системы уравнений

$$\Gamma^i_{kj}f^j = \gamma^i_j. \tag{6}$$

Множество всех функций с одним и тем же объектом связности, определяемым таким образом, образуют некоторое множество (класс функций), которое обозначается $\{f^i;\Gamma^i_{kj}\}$. В пространстве аффинной связности всегда найдется такой параметр τ, что система уравнений для определений геодезических $x^i = x^i(\tau)$ принимает [2] вид

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{kj}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = 0. \tag{7}$$

Если заменить объект связности Γ^i_{kj} на другой

$$\tilde{\Gamma}^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} + \frac{1}{2}(p_k\delta^i_j + p_j\delta^i_k) + S^i_{kj}, \tag{8}$$

где p_i – произвольное одноковариантное поле, а S^i_{kj} – произвольный тензор, антисимметричный по нижним индексам, то есть тензор кручения, то геодезические останутся теми же (см., например, [2]).

Конгруенция геодезических, соответствующая обобщенно-аналитической функции

Пусть $\{f^i;\gamma^i_k\}$ – обобщенно-аналитическая функция, и векторное поле f^i определяет конгруенцию геодезических с объектом связности (8), где объект Γ^i_{kj} связан с данной обобщенно-аналитической функцией соотношением (6), причем касательный вектор вдоль геодезической $x^i = x^i(\tau)$ есть

$$\frac{dx^i}{d\tau} = f^i. \tag{9}$$

Тогда дифференциальные уравнения (7) с заменой Γ^i_{kj} на $\tilde{\Gamma}^i_{kj}$ для определения геодезических превратятся в соотношения для обобщенно-аналитической функции

$$f^k\tilde{\nabla}_k f^i + (p_m f^m)f^i = 0, \tag{10}$$

или

$$f^k p^i_{kj}\dot{f}^i + (p_m f^m)f^i = 0. \tag{11}$$

Итак, для того чтобы обобщенно-аналитическая функция определяла конгруенцию геодезических, предложенным выше способом, или, как мы будем говорить в дальнейшем, обладала X-свойством, она должна удовлетворять соотношениям (10), (11). Для краткости обобщенно-аналитические функции, обладающие X-свойством, будем называть *X-функциями.*

Система уравнений (11), рассматриваемая как система линейных уравнений относительно n неизвестных компонент $\dot{f}^i$, совместна, так как одно решение заведомо имеется

$$\dot{f}^i = -(p_m f^m)\varepsilon^i. \tag{12}$$

Если матрица

$$(a_{ij}) = f^k p^i_{kj} \tag{13}$$

невырожденна в некоторой области, то (12) – единственное решение системы (11) в этой области пространства $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$.

В пространстве поличисел $X \in P_n$ n-ная степень "нормы" выражается через форму

$$\Omega(X) = det(x^k p^i_{kj}). \tag{14}$$

Значение этой формы не зависит от базиса;

$$\Omega(YX) = \Omega(Y)\Omega(X) \tag{15}$$

при любых X, $Y \in P_n$; наконец $\Omega(1) = 1$. Таким образом, можно определить n-ную степень "нормы" формулой

$$|\,X|^n = \Omega(X) \tag{16}$$

или формулой

$$|\,X|^n = |\Omega(X)|. \tag{17}$$

В силу выше сказанного, можно ожидать, что решения уравнения (10) будут существенно зависеть от неравенства или равенства нулю нормы X-функции.

Покажем, что для произвольных поличисел аналитическая функция

$$F(X) = \omega X + V_0 \tag{18}$$

(ω – произвольное действительное число, а V_0 – произвольное поличисло) является именно функцией, определяющей конгруенцию геодезических, то есть является X-функцией. Если $\omega \neq 0$, то ее можно записать в виде

$$F(X) = \omega(X - X_0), \tag{19}$$

где X_0 – произвольное поличисло. Подставим (18) в (10) и, учитывая, что для аналитических функций $\gamma^i_k = 0$, получим

$$f^i[\omega + (p_m f^m)] = 0. \tag{20}$$

Так как $p_m - m$ произвольных функций-компонент, то всегда можно построить такие m компонент, что $(p_m f^m) = -\omega$. Что и требовалось показать.

Выясним вид кривых, которые определяются функцией (18). Для этого надо найти общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \omega x^i + v^i_0. \tag{21}$$

Оно имеет вид

$$x^i = v^i_0 \tau + a^i e^{\omega\tau}. \tag{22}$$

Под конгруенцией кривых в некоторой области n-мерного пространства будем понимать $(n-1)$-параметрическое семейство кривых, причем через каждую точку этой n-мерной области должна проходить одна и только одна кривая. В общем решении (22) имеется $(2n+1)$ независимый действительный параметр плюс параметр вдоль кривой, поэтому для того, чтобы уравнения (22) определяли конгруенцию, параметры v^i_0, a^i, ω должны выражаться через $(n-1)$ независимый параметр, а область изменения параметра τ также может быть ограничена в зависимости от значений этих $(n-1)$ независимого параметра. Если мы фиксируем направление изменения параметра τ, например, от меньших к большим значениям, то каждая кривая получает еще и направление, то есть имеет вид линии тока или "силовой линии". Несмотря на простейший вид общего решения (22), эти формулы дают большое разнообразие конгруенций кривых, не все из них будут прямыми, а значит геодезическими. Таким образом, множество решений системы уравнений (10) включает в себя как подмножество X-функции. То есть выполнение уравнений (10) является необходимым, но не достаточным условием наличия у обобщенно-аналитической функции X-свойства.

В физике часто встречается условие $\nabla_i f^i = 0$. Так, например, выражается закон сохранения заряда, а также калибровка четырехвектора потенциала электромагнитного поля. Вычислим аналогичную свертку для обобщенно-аналитической функции, получим

$$\tilde{\nabla}_i f^i = p^i_{ij} \dot{f}^j. \tag{23}$$

Для X-функции при выполнении условия (12) имеем

$$\tilde{\nabla}_i f^i = -(p_m f^m), \tag{24}$$

а для X-функции (18), (19)

$$\tilde{\nabla}_i f^i = n\omega. \tag{25}$$

Примеры аналитических X-функций

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим аналитическую функцию

$$F(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{26}$$

комплексной переменной

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1. \tag{27}$$

Выпишем вначале матрицу (13)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \tag{28}$$

и найдем ее определитель

$$det(a_{ij}) = u^2 + v^2. \tag{29}$$

Таким образом, для комплексных чисел справедлива формула (16)

$$det(a_{ij}) = |F(z)|^2. \tag{30}$$

Решим систему уравнений (10). В данном случае они принимают вид

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + (p_1 u + p_2 v)u = 0, \\ \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + (p_1 u + p_2 v)v = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Используя соотношения Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{32}$$

из этой системы уравнений получим две системы:

$$\begin{cases} (u^2+v^2)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+(p_1u+p_2v)\right]=0, \\ \\ (u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial y}=0, \end{cases} \tag{33}$$

и

$$\begin{cases} (u^2+v^2)\frac{\partial v}{\partial x}=0, \\ \\ (u^2+v^2)\left[\frac{\partial u}{\partial y}+(p_1u+p_2v)\right]=0. \end{cases} \tag{34}$$

Рассмотрим эти системы уравнений в области $u^2+v^2\neq\ 0$. Тогда, сокращая на этот общий ненулевой множитель и записывая условия интегрируемости получившихся систем уравнений, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_1u+p_2v)=\frac{\partial}{\partial y}(p_1u+p_2v)=0 \quad\Rightarrow\quad (p_1u+p_2v)=const, \tag{35}$$

и единственное решение для данного случая

$$F(z)=\omega z+w_0, \tag{36}$$

где ω – произвольное действительное число, $w_0=u_0+iv_0$ – произвольное комплексное число.

Вычислим свертку $\nabla_i f^i$ от X-функции (36), получим

$$\nabla_i f^i=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=2\omega, \tag{37}$$

что согласуется с формулой (25).

Итак, мы доказали, что все аналитические X-функции комплексной переменной имеют вид (36) и что не существует аналитической X-функции от комплексной переменной, кроме постоянной, для которой бы $\nabla_i f^i\equiv 0$.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, H_2

Рассмотрим аналитическую функцию

$$F(z)=u(x,y)+jv(x,y) \tag{38}$$

гиперболической переменной

$$z=x+jy,\quad j^2=1. \tag{39}$$

Вычислим матрицу (13)

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \tag{40}$$

и ее определитель

$$det(a_{ij})=u^2-v^2. \tag{41}$$

Таким образом, при $v=\pm u$ матрица (a_{ij}) является вырожденной, и для гиперболических чисел справедлива формула (16)

$$det(a_{ij})=|F(z)|^2, \tag{42}$$

если квадрат нормы в пространстве H_2 понимать как

$$|z|^2 = x^2 - y^2. \tag{43}$$

Для гиперболических чисел соотношения (10) имеют тот же самый вид, что и для комплексных чисел, а уравнения Коши-Римана несколько изменяются:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{44}$$

– поэтому в уравнениях (33), (34) изменяется только общий множитель, он должен быть заменен на $(u^2 - v^2)$. Действуя точно так же как в случае комплексных чисел, мы получим уже не одно, а три качественно различных решения:

$$F_{(0)}(z) = \omega z + w_0, \tag{45}$$

где ω – произвольное действительное число, а w_0 – произвольное гиперболическое число;

$$F_{(1)}(z) = f_{(1)}(x+y)(1+j), \tag{46}$$

где $f_{(1)}(\xi)$ – произвольная функция одной действительной переменной;

$$F_{(2)}(z) = f_{(2)}(x-y)(1-j), \tag{47}$$

где $f_{(2)}(\xi)$ – произвольная функция одной действительной переменной. В ψ-базисе:

$$\begin{gathered}\psi_{1,2} = \tfrac{1}{2}(1 \pm j), \quad \psi_1\psi_1 = \psi_1, \quad \psi_2\psi_2 = \psi_2, \psi_1\psi_2 = 0, \\ x + jy = (x+y)\psi_1 + (x-y)\psi_2 = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2\end{gathered} \tag{48}$$

последние две X-функции принимают вид

$$F_{(1)}(z) = 2f_{(1)}(\xi^1)\psi_1, \quad F_{(2)}(z) = 2f_{(2)}(\xi^2)\psi_2, \tag{49}$$

причем $|F_{(1)}(z)| = 0, \quad |F_{(2)}(z)| = 0.$

Итак, аналитические X-функции H_2 переменной более разнообразны, чем соответствующие функции комплексной переменной. Это связано именно с наличием в алгебре H_2 делителей нуля.

Вычислим скаляры $\nabla_i f^i$ от трех полученных X-функций:

$$\nabla_i f^i_{(0)} = 2\omega, \quad \nabla_i f^i_{(1)} = 2\dot{f}_{(1)}(x+y), \quad \nabla_i f^i_{(2)} = 2\dot{f}_{(2)}(x-y). \tag{50}$$

Отметим, что не существует аналитической X-функции H_2 переменной, кроме постоянной, для которой бы $\nabla_i f^i \equiv 0$.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА H_4

Алгебра этих поличисел изоморфна алгебре действительных диагональных квадратных матриц 4 × 4. Удобнее всего с этими числами работать в ψ-базисе: ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4;

$$\psi_i\psi_j = p^k_{ij}\psi_k, \quad p^k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j = k, \\ \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{51}$$

Произвольная аналитическая функция H_4 переменной имеет вид

$$F(x) = \varphi^1(\xi^1)\psi_1 + \varphi^2(\xi^2)\psi_2 + \varphi^3(\xi^3)\psi_3 + \varphi^4(\xi^4)\psi_4, \tag{52}$$

где φ^i – произвольные гладкие функции одной действительной переменной, а ξ^i – координаты $X \in P_n$ в ψ-базисе. Матрица (13) будет иметь вид

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \varphi^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi^4 \end{pmatrix} \tag{53}$$

а ее определитель равен

$$det(a_{ij}) = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4. \tag{54}$$

Таким образом, для гиперкомплексных чисел H_4 справедлива формула (16)

$$|F|^4 = det(a_{ij}), \tag{55}$$

если под четвертой степенью нормы в пространстве H_4 понимать

$$|\,X|^4 = \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4. \tag{56}$$

Система уравнений (10) после подстановки в нее (52) запишется следующим образом:

$$\varphi^i \left[\frac{\partial\varphi^{i_-}}{\partial\xi^{i_-}} + p_m\varphi^m\right] = 0, \tag{57}$$

где $i \equiv i_-$, но по ним не ведется суммирования. Как мы уже отмечали выше, качественно различные решения системы уравнений (57) связаны с наличием различных делителей нуля в системе поличисел. Классифицируем все поличисла $X \neq 0$ в пространстве H_4 следующим образом:
А) X не есть делитель нуля;
Б) три координаты ξ^i, ξ^j, ξ^k, $i \neq j$, $i \neq j$, $j \neq k$ не равны нулю, а четвертая координата равна нулю;
В) только две координаты ξ^i и ξ^j, $i \neq j$ отличны от нуля, а две другие равны нулю;
Г) три координаты равны нулю, и только одна координата ξ^i не равна нулю.

В соответствии с этой классификацией проведем классификацию всех решений системы уравнений (57):

$$\text{А)} \qquad F_{(0)}(X) = \omega X + W_0, \tag{58}$$

где ω – произвольное действительное число, а W_0 – произвольное поличисло;

$$\text{Б)} \qquad F_{(i,j,k)}(X) = \omega(\xi^i\psi_{i_-} + \xi^j\psi_{j_-} + \xi^k\psi_{k_-}) + \zeta_0^i\psi_{i_-} + \zeta_0^j\psi_{j_-} + \zeta_0^k\psi_{k_-}, \tag{59}$$

где ω, ζ_0^m – четыре произвольные действительные числа для каждой X-функции этого вида;

$$\text{В)} \qquad F_{(i,j)}(X) = \omega(\xi^i\psi_{i_-} + \xi^j\psi_{j_-}) + \zeta_0^i\psi_{i_-} + \zeta_0^j\psi_{j_-}, \tag{60}$$

где ω, ζ_0^m – три произвольные действительные числа для каждой X-функции этого вида;

$$\text{Г)} \qquad F_{(i)}(X) = \varphi^i(\xi^{i_-})\psi_{i_-}, \tag{61}$$

где $\varphi^i(\xi^{i-})$ – одна произвольная гладкая функция одного действительного переменного для каждой X-функции этого вида.

Вычислим скаляры $\nabla_m\varphi^m$ от всех полученных X-функций:

$$\begin{gathered} \text{А)}\nabla_m\varphi^m = 4\omega, \quad \text{Б)}\nabla_m\varphi^m = 3\omega, \\ \text{В)}\nabla_m\varphi^m = 2\omega, \ \text{Г)}\nabla_m\varphi^m = \dot\varphi^i(\xi^{i-}). \end{gathered} \tag{62}$$

Таким образом, не существует аналитической X-функции H_4 переменной, кроме постоянной, для которой бы $\nabla_m\varphi^m \equiv 0$.

Невырожденные X-функции

Будем называть X-функцию *невырожденной,* если она не является делителем нуля, то есть $|\,F(X)| \neq 0$. Тогда из выше изложенного следует общий вид такой обобщенно-аналитической функции

$$\{f^i;\gamma^i_k\} = \{f^i; -\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \delta^i_k a(x)\}, \tag{63}$$

где f^i – произвольное гладкое векторное поле, а $a(x)$ – произвольное скалярное поле. Таким образом, для любых поличисел существуют невырожденные X-функции, все они имеют вид (63), причем

$$\dot f^i = \varepsilon^i a(x), \qquad \tilde\nabla_i f^i = n a(x). \tag{64}$$

Формально существуют отличные от постоянных невырожденные X-функции, для которых $\tilde\nabla_i f^i = 0$, но они тривиальны, так как скалярное поле $a(x)$ при этом тождественно равно нулю. Подчеркнем, что производная от невырожденной X-функции в базисе $e_1 = 1, e_2, ..., e_n$ в общем случае имеет вид

$$\dot F(X) = a(x) + 0e_2 + 0e_3 + ... + e_n. \tag{65}$$

Найдем условия, при выполнении которых поличисловое произведение двух невырожденных X-функций $F_{(1)}(X), F_{(2)}(X)$ опять есть невырожденная X-функция $F_{(3)}(X)$. Так как $|\,F_{(1)}(X)F_{(2)}(X)| = |\,F_{(1)}(X)|\,|\,F_{(2)}(X)|$, то функция $F_{(3)}(X)$ будет невырожденной. Остается проверить выполнение для нее формулы (63). В работе [1] приводится формула поличислового произведения двух обобщенно-аналитических функций

$$\{f^i_{(1)};\gamma^i_{(1)k}\}\{f^i_{(2)};\gamma^i_{(2)k}\} = \{f^i_{(3)};\gamma^i_{(3)k}\}, \tag{66}$$

где

$$\gamma^i_{(3)k} = p^i_{i_1 i_2}(f^{i_2}_{(2)}\gamma^{i_1}_{(1)k} + f^{i_1}_{(1)}\gamma^{i_2}_{(2)k}). \tag{67}$$

Потребуем, чтобы все γ-объекты в формуле (67) имели вид, определяемый формулой (63). Тогда после преобразований получим

$$a_{(3)}\delta^i_k = a_{(1)}p^i_{kj}f^j_{(2)} + a_{(2)}p^i_{kj}f^j_{(1)}. \tag{68}$$

Это и есть те условия, которым должны удовлетворять две невырожденные X-функции, чтобы их произведение опять было невырожденной X-функцией.

Заключение

В настоящей работе построены обобщенно-аналитические функции произвольной поличисловой переменной, которые названы невырожденными X-функциями и которые являются аналогами функции $F(z) = z$ комплексной переменной z. Эти функции, не являясь делителями нуля, могут определять в пространстве $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$ конгруенцию геодезических, причем производная от такой функции есть поличисловая единица, умноженная на скалярное поле. Формально существуют отличные от постоянных невырожденные X-функции, для которых $\tilde{\nabla}_i f^i = 0$, но они тривиальны, так как в этом случае скалярное поле $a(x)$ тождественно равно нулю. Возможно, именно невырожденные X-функции будут играть ту же фундаментальную роль в теории обобщенно-аналитических функций, какую в теории аналитических функций комплексной переменной играет комплексная переменная z, то есть невырожденная X-функция $F(z) = z$.

Автор благодарен И. Н. Дулькину за доброжелательное внимание к его работе, Д. Г. Павлову за подробное обсуждение результатов и Л. М. Фишеру за серьезную техническую помощь.

Литература

[1] Г. И. Гарасько, Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004, стр. 77 – 90 , 2004.

[2] П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука", 1967.