НОРМАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЛИЧИСЕЛ

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт
gri9z@mail.ru

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
hypercomplex@mail.ru

Поличисловое пространство является примером линейного пространства с несколькими полилинейными формами. На множестве невырожденных n-чисел вводится понятие нормального сопряжения. Нормальное сопряжение является $(n-1)$-нарной операцией, коммутативной по всем аргументам, но в общем случае неассоциативной. Для комплексных и гиперболических чисел такая операция является обычным сопряжением. Нормальное сопряжение может быть применено для изучения алгебраической и геометрической структур координатного пространства n-чисел, а также для введения таких понятий, как скалярное произведение и угловые характеристики двух и более чисел (векторов).

Введение

Поличисловые пространства являются примерами векторных пространств, роль фундаментальных метрических форм в которых играют полиформы от нескольких векторов [1]. Такие пространства принципиальным образом отличаются от привычных евклидовых и псевдоевклидовых пространств и требуют разработки понятий, замещающих понятия угла, ортогональности, скалярного произведения и т. д. Необходимость соответствующих построений диктуется участившимися попытками рассматривать финслеровы пространства (а именно таковыми, как правило, являются поличисловые пространства) в качестве геометрического фундамента физики [2, 3]. Успехи же физики во многом зависят от адекватности применяемого математического аппарата и геометрических представлений.

Удивительно, но первое из известных упоминаний о подобных пространствах принадлежит Риману. В своей знаменитой лекции, прочитанной при вступлении в должность профессора Геттингенского университета в 1854 году, он отмечал, что помимо обычных квадратичных метрических форм, "случай, который можно назвать следующим по простоте, соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвертой степени из дифференциального выражения той же степени" [4]. По сути, в этой короткой фразе он описал частный случай пространств, впоследствии получивших название финслеровых.

Финслеровы метрические функции, даже когда они заданы на линейных пространствах, весьма разнообразны и нередко требуют индивидуального подхода в каждом конкретном случае. Однако, когда за финслеровыми пространствами стоят коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные числа (*поличисла, n-числа*), оказывается возможным предложить единый алгоритм, некоторые элементы которого рассматриваются ниже.

Несмотря на то, что исключительная роль полечисловых пространств не вызывает сомнений, в современной геометрической литературе они упоминаются весьма редко. Это объясняется, по-видимому, простой, на первый взгляд, алгебраической структурой поличисел, не стимулирующей исследования ни их самих, ни связанных с ними пространств. Однако, сюрприз, совсем недавно преподнесенный математикам от, казалось бы, со всех сторон изученных комплексных чисел в виде построения на их основе фракталов, говорит о том, что нечто подобное можно ожидать и от других представителей поличисел. Простота алгоритма, при помощи которого получены фрактальные объекты, подчеркивает потенциальное разнообразие, скрывающееся за самыми тривиальными числовыми структурами.

Такие понятия, как скалярное произведение, ортогональность, угол между двумя векторами – неотъемлемая часть аппарата теории евклидового пространства. Эти понятия естественным образом обобщаются на псевдоевклидовые пространства. Предлагаемый в данной работе подход позволяет единообразно обобщить указанные понятия на пространства поличисел.

Пространства поличисел P_n при $n > 2$ не являются евклидовыми или псевдоевклидовыми. Так, если $e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n \in P_n$ – базис и

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k, \tag{1}$$

$$P_n \ni X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n, \tag{2}$$

то n-я степень нормы числа X выражается через n-линейную симметрическую форму

$$(X, Y, \ldots, Z) = \omega_{i_1 i_2 \ldots i_n} x^{i_1} y^{i_2} \ldots z^{i_n} \tag{3}$$

от одного аргумента X. Так как при $n > 2$ и использовании двух аргументов X и Y получается $(n-1)$ различных форм, то скалярное произведение и угол между парой векторов (чисел) можно ввести многими способами.

Кроме метрической формы (3) в пространстве P_n можно рассмотреть и другие инвариантные формы, например билинейную

$$((X, Y)) = q_{ij} x^i y^j, \tag{4}$$

где

$$q_{ij} = C p_{im}^k p_{kj}^m, \tag{5}$$

$C \neq 0$ – некоторое действительное число. Для каждой конкретной системы поличисел это число выбирается из соображений простоты и симметрии получаемых формул. Из определения следует, что данная форма является симметрической, то есть $((X, Y)) = ((Y, X))$.

Таким образом, пространство P_n является n-мерным линейным пространством с несколькими полилинейными формами, среди которых две выделенных: метрическая n-го порядка и билинейная.

Понятие сопряженного числа обычно (комплексные числа, кватернионы...) связывают с изменением знаков у мнимых (символьных) единиц. Это приводит к тому, что в поличисловом пространстве P_n приходится вводить в общем случае $(n-1)$ сопряжение и использовать само число и $(n-1)$ его сопряжение, чтобы сконструировать из них поличисло вида $(|\,X|^n \cdot 1 + 0e)$.

Нормальное сопряжение

Будем называть n-числа *невырожденными*, если матрица (q_{ij}) (5) невырожденна, то есть

$$det(q_{ij}) \neq 0. \tag{6}$$

В этом случае, кроме дважды ковариантного тензора q_{ij} в координатном пространстве P_n определен дважды контравариантный тензор q^{ij}.

Определим $(n-1)$-нарную операцию, которую в дальнейшем будем называть *нормальным сопряжением комплекса* $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}\}$, следующим образом:

$$[X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}] = \omega_{i_1 i_2 ... i_{n-1} i_n} q^{i_n k} x^{i_1}_{(1)} ... x^{i_{n-1}}_{(n-1)} e_k. \tag{7}$$

Непосредственно из этой формулы видно, что операция нормального сопряжения коммутативна по всем аргументам, но она в общем случае не является ассоциативной. Постоянную C в формуле (5) можно, например, выбирать так, чтобы $[1, 1, ..., 1] = 1$.

Будем говорить, что число $Z = [X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}]$ *нормально сопряженное* комплексу чисел $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}\}$.

Назовем *скалярным произведением числа X на комплекс* $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}\}$ билинейную форму

$$((X, Z)) = (X, X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}). \tag{8}$$

Введем обозначение

$$\tilde{X} = [X, X, ..., X], \tag{9}$$

и тогда

$$((X, \tilde{X})) = |\, X|^n, \tag{10}$$

если в данной системе поличисел n-я степень нормы числа X выражается формулой

$$|\, X|^n = (X, X, ..., X). \tag{11}$$

Согласно определению, число $\tilde{X}$ является нормально сопряженным числу X.

Поясним введенные выше понятия на примерах.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

$$X = x^1 + ix^2, \qquad i^2 = -1, \tag{12}$$

$$(X, Y) = x^1 y^1 + x^2 y^2, \tag{13}$$

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$(q_{ij}) = 2C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Выберем $C = \frac{1}{2}$, тогда

$$(\omega_{ik} q^{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\tilde{X} = x^1 - ix^2, \tag{17}$$

то есть нормальное сопряжение для комплексных чисел – это обычное комплексное сопряжение. Скалярное произведение числа X на Y есть

$$((X, \widetilde{Y})) = x^1 y^1 + x^2 y^2 = (X, Y). \tag{18}$$

Таким образом

$$((X, \tilde{X})) = |\, X|^2, \tag{19}$$

$$X \cdot \tilde{X} = |\, X|^2 \cdot 1 + 0 \cdot i. \tag{20}$$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, H_2

$$X = x^1 + j x^2, \qquad j^2 = 1, \tag{21}$$

$$(X, Y) = x^1 y^1 - x^2 y^2, \tag{22}$$

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$(q_{ij}) = 2C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Выберем $C = \frac{1}{2}$, тогда

$$(\omega_{ik} q^{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\tilde{X} = x^1 - j x^2, \tag{26}$$

то есть нормальное сопряжение для гиперболических чисел – это обычное сопряжение. Скалярное произведение числа X на Y есть

$$((X, \tilde{Y})) = x^1 y^1 - x^2 y^2 = (X, Y). \tag{27}$$

Таким образом,

$$((X, \tilde{X})) = |\, X|^2, \tag{28}$$

$$X \cdot \tilde{X} = |\, X|^2 \cdot 1 + 0 \cdot j. \tag{29}$$

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА H_3

С этими числами удобнее всего работать в ψ-базисе:

$$X = x^1 \psi_1 + x^2 \psi_2 + x^3 \psi_3, \tag{30}$$

$$p^k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях}\,, \end{cases} \tag{31}$$

$$(q_{ij}) = C \cdot diag(1,1,1), \tag{32}$$

$$(X,Y,Z) = \frac{1}{6}(x^1y^2z^3 + x^1y^3z^2 + x^2y^1z^3 + x^2y^3z^1 + x^3y^1z^2 + x^3y^2z^1). \tag{33}$$

Выберем $C = \frac{1}{3}$, тогда

$$[X,Y] = \frac{1}{2}[(x^2y^3 + x^3y^2)\psi_1 + (x^1y^3 + x^3y^1)\psi_2 + (x^1y^2 + x^2y^1)\psi_3], \tag{34}$$

$$[1,1] = 1, \tag{35}$$

$$\tilde{X} = x^2x^3\psi_1 + x^1x^3\psi_2 + x^1x^2\psi_3, \tag{36}$$

$$X \cdot \tilde{X} = |\,X|^3 \cdot 1 + 0 \cdot e, \tag{37}$$

если норма $X \in H_3$ определяется формулой

$$|\,X|^3 = x^1x^2x^3. \tag{38}$$

Скалярное произведение комплекса $\{X,Y\}$ на число Z есть скаляр

$$((Z,[X,Y])) = (X,Y,Z). \tag{39}$$

Билинейная форма (4) от двух чисел X, Y имеет вид

$$((X,Y)) = \frac{1}{3}(x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3). \tag{40}$$

Найдем все такие числа H_3, которые удовлетворяют уравнению

$$\tilde{X} = X. \tag{41}$$

Решая систему трех квадратных уравнений с тремя неизвестными, получим пять корней: $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$. Последние четыре числа составляют, если представить их радиус векторами, вершины правильного тетраэдра, а первая – его центр.

Для того чтобы $X,Y \in H_3$ были делителями нуля относительно операции нормального сопряжения (т. е. $[X,Y] = 0$, при $X \neq 0,\ Y \neq 0$), они должны быть делителями нуля относительно поличислового умножения.

Любое число $Y \in H_3$ можно представить в виде

$$Y = [1,Z], \quad \text{где} \quad Z = (-y^1 + y^2 + y^3, y^1 - y^2 + y^3, y^1 + y^2 - y^3). \tag{42}$$

Рассмотрим задачу на собственные векторы и собственные значения вида

$$[1,Y] = \lambda Y, \tag{43}$$

где λ – некоторое действительное или комплексное число. Так как матица линейного преобразования в правой части формулы (43) симметрическая, то собственные значения все действительные: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$. Собственные векторы, соответствующие первому собственному значению, образуют прямую $1t$, где t – параметр вдоль прямой, а собственные векторы, соответствующие собственному значению $(-\frac{1}{2})$, образуют плоскость, перпендикулярную (в евклидовом смысле) прямой вдоль единицы и проходящую через начало координат, то есть плоскость натянутую на два радиус-вектора, например: $(2,-1,-1)$, $(0,1,1)$.

Формулы (30)–(40) автоматически обобщаются на поличисла[1] H_n с заменой $3 \to n$, $C = \frac{1}{n}$.

Из приведенных выше примеров, сравнивая формулы (20), (29) и (37), можно сделать вывод, что для комплексных и H_n чисел справедлива формула

$$X \cdot \tilde{X} = |\,X|^n \cdot 1 + 0 \cdot e. \tag{44}$$

Возможно, такая формула справедлива для любых невырожденных поличисел, но это утверждение требует доказательства.

Можно говорить, что число X *"ортогонально"* числу Y, если

$$((X, \tilde{Y})) = 0. \tag{45}$$

Отметим, что это понятие при $n > 2$, вообще говоря, не симметричное, то есть из того, что X ортогонально Y, в общем случае не следует, что Y ортогонально X. Если обе ортогональности имеют место, то числа X и Y называются *взаимно ортогональными.*

Если задан комплекс из $(n-1)$ чисел, часть из которых могут совпадать, и число Z является нормальным сопряжением этому комплексу, то число X *"ортогонально" данному комплексу,* если

$$((X, Z)) = 0. \tag{46}$$

Угловые параметры нескольких чисел

В пространстве поличисел $n > 2$ угол между двумя числами (векторами) можно ввести многими способами. В данной работе мы используем алгебраический подход на основе аналога формулы треугольника евклидового пространства.

Поясним это на примере чисел H_3. Пусть числа X и Y таковы, что

$$x^i > 0, \quad y^i > 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{47}$$

В этом случае они не являются делителями нуля. Найдем выражение для куба нормы их суммы $Z = X + Y$

$$|\,Z|^3 = (X+Y, X+Y, X+Y) = |\,X|^3 + 3(X,X,Y) + 3(X,Y,Y) + |\,Y|^3. \tag{48}$$

Введем два гиперболических угла β_X, β_Y согласно формулам:

$$\cosh\beta_X = \frac{(X,X,Y)}{|\,X|^2|\,Y|}, \quad \cosh\beta_Y = \frac{(X,Y,Y)}{|\,X|\,|\,Y|^2}, \tag{49}$$

тогда

$$|\,Z|^3 = |\,X|^3 + |\,Y|^3 + 3|\,X|^2|\,Y|\,\cosh\beta_X + 3|\,X|\,|\,Y|^2\,\cosh\beta_Y. \tag{50}$$

Эти два гиперболических угла β_X, β_Y будем называть *угловыми характеристиками* пары чисел X, Y.

[1] H_n – гиперкомплексные числа, изоморфные алгебре действительных квадратных диагональных матриц $n \times n$.

Поясним смысл форм, фигурирующих в формулах (48), (49). Для этого рассмотрим комплекс $\{X, Y\}$ и нормально сопряженное к этому комплексу число $W = [X, Y]$. Форма (X, X, Y) есть скалярное произведение числа X на комплекс $\{X, Y\}$, а форма (X, Y, Y) есть скалярное произведение числа Y на тот же комплекс.

Если числа X, Y не являются делителями нуля, но не удовлетворяют условиям (47), то правые части в формулах (49) могут принимать отрицательные значения. Если мы при этом хотим сохранить формулу (50), то угловые характеристики β_X, β_Y будут уже в общем случае комплексными числами. Если же нам важно, чтобы угловые характеристики оставались действительными, то приходится одновременно изменять формулы (49) и (50). Например, если в первой формуле (49) правая часть меньше нуля, то в этой формуле и в формуле (50) можно заменить $\cosh \beta_X$ на $\sinh \beta_X$.

Почему пара чисел (векторов) в трехмерном пространстве H_3 характеризуется двумя угловыми характеристиками, а не одной, как это имеет место в трехмерном евклидовом пространстве? Это связано с тем, что пространство H_3, как и все поличкисловые пространства размерности больше двух, имеет выделенные направления и плоскости, то есть не являются изотропным.

Фракталы

Последние тридцать лет в теории динамических систем бурно развивалось направление, связанное с комплексными фракталами [5], яркими представителями которых являются множества Жюлиа и Мандельброта. Однако на фоне многочисленных замечательных и красивых результатов почти затерялся тот факт, что практически все достижения были получены на основе комплексных чисел и евклидовой плоскости. В противоположность этому, построение многомерных фракталов на основе кватернионов в целом оказалось мало впечатляющим.

Глубинные основания проблем, возникающих на данном пути, следует отнести к принципиальной невозможности обобщить теорию аналитических функций комплексной переменной на кватернионную переменную. Последнее обстоятельство обусловлено некоммутативностью кватернионного произведения.

Структура поличисел, сохраняя симметрию (равносложность) между сложением и умножением, не содержит тех трудностей, которые возникают в некоммутативных или неассоциативных числовых алгебрах. Следовательно, на основе поличисел вполне можно ожидать построение многомерных фракталов более интересных, чем получились с использованием кватернионов. Обратившись в качестве примера к числам H_n, получим, что невозможно построить сколько-нибудь содержательные фракталы, используя обычные для множеств Жюлиа зависимости, например:

$$X_{(i+1)} = X_{(i)}^2 + C. \tag{51}$$

Это связано с чрезвычайно простым устройством чисел H_n и, в частности, H_3. В специальном базисе аналитические функции переменной H_n распадаются на n функций одной действительной переменной, и в результате, получающийся итерационный процесс сводится к n независимым одномерным итерационным процессам, что мало интересно. Однако для поличисел имеется принципиальная возможность ввести дополнительные операции, среди которых имеется и рассмотренная выше операция нормального сопряжения, и использовать эти операции для построения более сложных не расщепляющихся итерационных процессов.

Так, для H_3 можно предложить несколько простых и нетривиальных итерационных процессов $X_{i+1} = F(X_i)$:

1. $F(X) = \tilde{X} + C$,

2. $F(X) = [X, \tilde{X}] + C$,

3. $F(X) = [X, [X, 1]] + C$,

4. $F(X) = [X, [X, [X, 1]]] + C$,

5. $F(X) = X \cdot [X, 1] + C$,

6. $F(X) = [X, [X, C]] - 1$,

7. $F(X) = [X \cdot X, X] + C = [X, X] \cdot [X, 1] + C$,

где $C \in H_3$. Начальные значения чисел для этих итерационных процессов брались на плоскостях, перпендикулярных (в евклидовом смысле) прямой $1 \cdot t$. Параметр t указывает точку пересечения этой прямой и плоскости, при $t = 0$ плоскость проходит через начало координат. Интересно, что при $C = 0$, $t = 0$ процессы 2, 3, 4 дают вокруг начала координат область сходимости в виде скругленного шестиугольника.

Исследование на сходимость итерационного процесса 1 дает достаточно интересные в геометрическом плане трехмерные области сходимости. Еще интереснее оказываются области сходимости процесса 7.

Заключение

Конечно, предложенные в данной работе построения можно обобщать и далее. Так, в самом общем случае можно рассмотреть n-мерное линейное пространство с полилинейной симметрической формой (3), разбить множество аргументов на два комплекса и говорить, что такая форма есть скалярное произведение этих двух комплексов. Это вызовет дальнейшее обобщение всех введенных выше понятий.

Несомненно, что операция нормального сопряжение имеет свое собственное алгебраическое значение. Для невырожденных поличисел построен удобный алгоритм обобщения геометрических объектов и величин, которые понятны и привычны в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах, такие как скалярное произведение, ортогональность, углы между векторами и т. п.

Введение над гиперкомплексными числами дополнительных операций превращает последние в нечто большее, чем линейные алгебры. Такие операции позволяют вместо достаточно тривиальных структур поличисел получить геометрии, количество и качество внутренних симметрий которых неизмеримо превышает возможности поличисел. Развивая эту идею, возможно будет уместно помимо общепринятого термина "линейная алгебра" ввести термин "линейная геометрия", понимая под этим линейную алгебру плюс все возможные на этом множестве независимые полилинейные операции, естественно вытекающие с помощью некоторых построений из самой линейной алгебры.

Одним из перспективных направлений использования потенциала таких линейных геометрий оказывается построение многомерных фрактальных числовых множеств, аналогичных множествам Мандельброта и Жюлиа на комплексной плоскости.

Вероятно, следует еще раз подчеркнуть, что построенные при помощи введенной авторами специфической $(n-1)$-нарной операции фрактальные множества являются объектами не произвольного, а именно поличислового пространства, что открывает перед ними широкие перспективы, отсутствующие, например, у фракталов, строящихся над телом кватернионов. Кватернионы, как известно, обладают некоммутативным умножением, что существенно сужает возможности их математических приложений, в частности, построение развитой теории аналитических функций. Поскольку этот недостаток отсутствует у поличисел, а также учитывая гипотезу о возможности замены пространства Минковского на одно из полипространств [6], предлагаемый подход, по-видимому, имеет широкие перспективы.

Литература

[1] Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[2] Богословский Г. Ю. Теория локально анизотропного пространства-времени. М., Издательство МГУ, 1992.

[3] Asanov G. S. Finslerian Extension of General Relativity, Dordrecht, 1984.

[4] Б. Риман. О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии. – В кн.: Об основаниях геометрии. М., ТТЛ, 1956.

[5] Пайтген Х. О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. М., "Мир", 1993.

[6] Павлов Д. Г. Четырехмерное время. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.