АЛГЕБРОДИНАМИКА: “ПРЕДСВЕТ”, ЧАСТИЦЫ-КАУСТИКИ И ПОТОК ВРЕМЕНИ

В. В. Кассандров

Российский Университет дружбы народов, кафедра общей физики
117419, Москва, ул. Орджоникидзе 3
vkassan@sci.pfu.edu.ru

В теориях поля с твисторной структурой частицы естественно интерпретировать как (пространственно локализованные) каустики изотропных геодезических конгруэнций, определяемых твисторным полем. В качестве реализации рассмотрены уравнения “алгебродинамики”, возникающие в контексте некоммутативного анализа (над алгеброй бикватернионов) и приводящие к полю комплексного эйконала и к набору калибровочных и твисторных полей, ассоциируемых с его решениями. Обсуждаются связанные с этим концепции производящей “Мировой функции” и многозначных физических полей. Возникающая картина Мира содержит в качестве основных элементов лоренц-инвариантный световой эфир и порождаемую светом материю. Вводится также представление о потоке Времени, отождествляемом с потоком первичного Света (“Предсвета”).

0. Введение: Алгебродинамическая единая теория поля

Теоретическая физика подошла к такому состоянию, когда невозможно продвигаться дальше, не пересмотрев полностью смысл и взаимосвязи трех основных ее составляющих: полей, частиц и пространственно-временной геометрии. *Теория (супер)струн* в принципе предоставляет возможность получения низкоэнергетической феноменологии (Стандартной модели) из единой и простой физики, сформулированной для планковской шкалы. Однако этот подход по-прежнему далек от таких основополагающих вопросов, как *происхождение* физических законов, существование первичного *Кода Вселенной* и т. п., являясь по существу лишь еще одной попыткой *описания* Природы (по возможности наиболее простым и эффективным способом), а отнюдь не ее *понимания*. Заметим, что до сих пор ни в рамках Стандартной модели, ни в теории суперструн нет никакого объяснения размерности пространства-времени, наблюдаемого спектра элементарных частиц и констант взаимодействия, в том числе “больших чисел” и др.

Твисторная программа Р. Пенроуза [1, 2] может рассматриваться как альтернатива струнной теории, претендующей на объяснение первичных физических структур. Для этого постулируется существование некого предпространства – *пространства твисторов* $\mathbb{C}P^3$, – первичного по отношению к физическому пространству-времени и предопределяющего его геометрию как геометрию Минковского, и, в какой-то степени, набор физических полей.

Тем не менее, общая концепция твисторной программы как единой теории поля до сих не сформулирована. Какие именно уравнения выбрать в качестве фундаментальных, как описывать массивные поля и как получить спектр характеристик наблюдаемых частиц? И, наконец, почему именно твистор, весьма экзотический математический объект, кладется в основу фундаментальной физической теории?

Между тем, твисторная структура совершенно естественно возникает в рамках так называемого *алгебродинамического* подхода к теории поля, развитой в работах автора с учениками. С общей точки зрения, алгебродинамическая парадигма может рассматриваться как возврат к идеям Пифагора и Платона о *свойствах Чисел, предопределяющих свойства видимого Мира.* Действительно, в качестве единственного (!) постулата алгебродинамики принимается существование некоторой единой структуры чисто абстрактной, алгебраической (числовой) природы, внутренние свойства которой полностью определяют как вид геометрии физического пространства-времени, так и всю динамику физических полей (набор и уравнения которых также диктуются исходной структурой, а не постулируются). Изложение основных принципов исповедуемой автором философии *неопифагорейства* в ее применении к построению фундаментальных физических теорий представлено в работе [39].

В наиболее развитой на сегодняшний день реализации алгебродинамики "Мировая" алгебраическая структура возникает при обобщении комплексного анализа на исключительные некоммутативные алгебры кватернионного ($\mathbb{Q}$) типа [13, 14, 15]. Было показано, в частности, что непосредственный учет некоммутативности в самом определении функций, "дифференцируемых" в $\mathbb{Q}$, приводит к *нелинейности* обобщенных уравнений Коши-Римана (ОУКР). Это, в свою очередь, позволило выбрать ОУКР в качестве фундаментальных уравнений динамики *взаимодействующих* физических полей, рассматриваемых как функции алгебраического переменного ($\mathbb{Q}$-типа).

Широкий класс таких полей-функций возникает лишь при комплексном расширении алгебры $\mathbb{Q}$ до алгебры *бикватернионов* $\mathbb{B}$. При этом ОУКР не только оказываются лоренц-инвариантными, но и приобретают естественную спинорную и калибровочную структуры, что позволяет построить на их основе единую самосогласованную *алгебродинамическую* теорию поля [13, 14, 20, 23, 22, 24, 26, 39].

С физической точки зрения, наиболее важным свойством ОУКР оказывается их соответствие некоторой первичной *светоподобной* структуре. А именно, каждая (спинорная) компонента $S(x, y, z, t) \in \mathbb{C}$ первичного $\mathbb{B}$-поля обязана удовлетворять *уравнению комплексифицированного эйконала* (УКЭ) [13, 14]

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu S \partial_\nu S = (\partial_t S)^2 - (\partial_x S)^2 - (\partial_y S)^2 - (\partial_z S)^2 = 0, \tag{1}$$

где матрица $\eta_{\mu\nu} = diag\{1, -1, -1, -1\}$ представляет метрику Минковского, а символ ∂ отвечает частной производной по соответствующей координате. УКЭ (1) лоренц-инвариантно, нелинейно и играет роль, аналогичную линейному *уравнению Лапласа* в комплексном анализе. Каждое решение ОУКР может при этом быть восстановлено из набора нескольких (четырех или менее) решений УКЭ.

В то же время, в работе [26] была обнаружена естественная *твисторная* структура УКЭ и на ее основе получено *общее решение* этого нелинейного уравнения. А именно, было показано, что в отношении к твисторной структуре каждое решение УКЭ принадлежит к одному из двух классов, оба из которых могут быть получены из некоторой производящей функции твисторных аргументов с помощью простой алгебраической процедуры. Та же конструкция позволяет дать естественное определение *сингулярностей* светоподобных геодезических конгруэнций, соответствующих полю эйконала – *каустик.* Именно на каустиках – *огибающих* конгруэнции – соседние лучи пересекаются, а значения ассоциированных с конгруэнцией физических полей обращаются в бесконечность, формируя тем самым единый *частицеподобный* объект – *источник* полей и самой конгруэнции. Тем самым, в рассматриваемой алгебродинамической теории *частицы представляют собой (пространственно локализованные) каустики первичных светоподобных конгруэнций.*

С другой стороны, изотропные конгруэнции определяют универсальный локальный перенос основного твисторного поля с постоянной фундаментальной скоростью "c" (аналогичный переносу поля электромагнитной волной) и тем самым дают указание на особую роль временной координаты в рассматриваемой алгебродинамической схеме и в твисторной теории вообще. Существование "Потока Времени" становится прямым следствием существования лоренц-инвариантного "эфира", формируемого первичными светоподобными конгруэнциями ("Предсвета"). Принципиально важным при этом становится свойство *многозначности* фундаментального комплекснозначного решения УКЭ ("Мирового решения") и ассоциированных с ним физических полей. В каждой точке пространства-времени мы имеем дело с *суперпозицией* большого числа лучей, принадлежащих локально различным конгруэнциям, и поток Времени формируется из многих *разнонаправленных* составляющих (глобально связанных комплексной структурой в единый объект).

В разделе 2 статьи описывается твисторная структура УКЭ и алгебраическая процедура получения двух классов его решений. Приведены несколько простых примеров решений УКЭ. В разделе 3 рассматривается структура каустик решений УКЭ, в том числе пространственно ограниченного типа, образующих *частицеподобные* сингулярные объекты, а также ассоциированных с решениями УКЭ физических полей. В четвертом разделе введено понятие *Мировой функции*, генерирующей "Мировое решение" УКЭ. В этой связи предложена и подробно обсуждается общая концепция *многозначности* физических полей. Заключительный раздел 5 посвящен вопросам, связанным с природой физического Времени: вводится понятие "предсветового" эфира, образованного первичными изотропными конгруэнциями, и поток Времени по существу отождествляется с потоком Предсвета. Обсуждается внутренняя структура этих фундаментальных потоков, связанная с многозначностью исходного твисторного поля.

Настоящая работа является расширенной версией английской статьи [27], а в описании физической картины Мира продолжает предыдущую статью автора [39]. Для простоты восприятия мы избегаем использования 2-спинорного формализма, дифференциальных форм и т. п., отсылая более подготовленного в математическом отношении читателя к работам [23, 26, 25, 21, 22].

Твисторная структура и два класса решений уравнения комплексного эйконала

Как известно, уравнение эйконала описывает процесс распространения волновых фронтов (разрывов поля) в любой релятивистской теории, включая электродинамику Максвелла [4, 5]. Математическим и физическим проблемам, связанным с уравнением эйконала, посвящено огромное количество работ, см. например, [7, 8, 9, 10]. Уравнение комплексифицированного эйконала (УКЭ) естественно возникает в задачах распространения ограниченных световых пучков [11] и в теории изотропных конгруэнций, связанных с решениями уравнений Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла [12]. В нашем подходе, однако, комплексный эйконал рассматривается в первую очередь как *фундаментальное физическое поле*, описывающее, в частности, взаимодействующие и обладающие дискретным спектром характеристик ("автоквантованные") *частицеподобные* объекты, формируемые структурой особенностей решений УКЭ. С каждым из этих решений естественно сопоставляется также электромагнитное и другие известные из физики поля, ответственные за описание процесса взаимодействия сингулярностей-частиц.

Определим вначале, помимо обычных декартовых пространственно-временных координат $\{t, x, y, z\}$, естественные для геометрии Минковского *спинорные* или *изотропные* координаты $\{u, v, w, \overline{w}\}$ (скорость света здесь и в дальнейшем принимается равной единице, $c = 1$)

$$u = t + z, \quad v = t - z, \quad w = x - iy, \quad \overline{w} = x + iy. \tag{2}$$

Эти координаты образуют *эрмитову* 2×2-матрицу X вида

$$X = X^+ = \begin{pmatrix} u & w \\ \overline{w} & v \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В спинорных координатах УКЭ (1) выглядит следующим образом:

$$\partial_u S \partial_v S - \partial_w S \partial_{\overline{w}} S = 0 \tag{4}$$

и эквивалентно утверждению об изотропности комплексного 4-вектора градиента $\partial_\mu S$. Отметим, что УКЭ обладает замечательной *функциональной инвариантностью* [13, 14]: для каждого из его решений $S(X)$ любая (дифференцируемая) функция от него $f(S(X))$ также является решением УКЭ. Помимо этого, известно [6], что УКЭ инвариантно относительно преобразований полной 15-параметрической *конформной группы* пространства Минковского, включающих преобразования Лоренца.

Введем теперь в рассмотрение *произвольную однородную* функцию

$$\Pi = \Pi(\xi_0, \xi_1, \tau^0, \tau^1) \tag{5}$$

от двух пар комплексных переменных $\{\xi, \tau\}$, в каждой точке пространства-времени связанных между собой линейной зависимостью через т. н. *соотношение инцидентности*

$$\tau = X\xi \quad \Leftrightarrow \quad \tau^0 = u\xi_0 + w\xi_1, \quad \tau^1 = \overline{w}\xi_0 + v\xi_1, \tag{6}$$

и ведущих себя как *2-спиноры* при лоренцевых вращениях[1]. Пара *инцидентных* друг другу 2-спиноров $\{\xi(X), \tau(X)\}$ образует алгебро-геометрический объект, известный в качестве (*изотропного проективного) твистора* пространства Минковского [2].

Предположим в дальнейшем, что одна из двух компонент спинора $\xi(X)$, например ξ_0, отлична от нуля. В этом случае однородная функция Π зависит от *трех* (проективных твисторных) аргументов следующего вида:

$$\Pi = \Pi(G, \tau^0, \tau^1), \qquad G = \xi_1/\xi_0, \quad \tau^0 = u + wG, \quad \tau^1 = \overline{w} + vG. \tag{7}$$

Мы готовы теперь сформулировать основной результат нашей работы [26].
Любое (аналитическое) решение УКЭ по отношению к твисторной структуре принадлежит к одному из двух и только двух классов и может быть получено из некоторой производящей функции вида (7) с помощью одной из двух различных чисто алгебраических процедур.

Для получения первого класса решений следует просто разрешить алгебраическое уравнение, определяемое функцией (7),

$$\Pi(G, u + wG, \overline{w} + vG) = 0 \tag{8}$$

относительно единственной неизвестной G. При этом получим некоторое комплекснозначное поле $G(X)$, тождественно удовлетворяющее УКЭ. Действительно, при подстановке $G = G(X)$ уравнение (8) становится *тождеством* и, в частности, может

[1] Для упрощения мы не различаем в записи пунктирные и непунктирные спинорные индексы. В соотношении инцидентности (6) опущен стандартный множитель "i", что допустимо при соответствующем переопределении *нормы* твистора.

быть продифференцировано по спинорным координатам $\{u, v, w, \overline{w}\}$. Тогда будем иметь

$$P\partial_u G = -\Pi_0, \quad P\partial_w G = -G\Pi_0, \quad P\partial_{\overline{w}} G = -\Pi_1, \quad P\partial_v G = -G\Pi_1, \tag{9}$$

где через Π_0, Π_1 обозначены частные производные от функции Π по ее твисторным аргументам τ^0, τ^1, а через P – *полная* производная этой функции по G

$$P = \frac{d\Pi}{dG} = \frac{\partial \Pi}{\partial G} + w\Pi_0 + v\Pi_1, \tag{10}$$

которую мы будем пока что считать отличной от нуля в рассматриваемой области пространства-времени. Перемножая тогда уравнения (9), находим, что поле $G(X)$ действительно удовлетворяет УКЭ в форме (4). Легко убедиться также, что *произвольная* функция твисторных аргументов $S = S(G, u + wG, \overline{w} + vG)$ при подстановке полученной зависимости $G = G(X)$ также удовлетворяет УКЭ (вследствие функциональной зависимости (8) эта функция на самом деле зависит только от *двух* твисторных переменных).

Для получения второго класса решений УКЭ следует сначала продифференцировать производящую функцию (7) по G и лишь потом получившееся алгебраическое уравнение

$$P = \frac{d\Pi}{dG} = 0 \tag{11}$$

разрешить относительно G. При этом функция $G(X)$ уже не будет сама по себе удовлетворять УКЭ; однако после ее подстановки в (7) производящая функция Π становится функцией пространственно-временных координат и сама с необходимостью удовлетворяет УКЭ (как и любая функция от нее $f(\Pi(X))$ в силу отмеченной выше инвариантности УКЭ). В самом деле, дифференцируя функцию (7) при $G = G(X)$ по спинорным координатам, имеем

$$\partial_u \Pi = \Pi_0 + P\partial_u G, \ \ \partial_w \Pi = G\Pi_0 + P\partial_w G, \ \ \partial_{\overline{w}} \Pi = \Pi_1 + P\partial_{\overline{w}} G, \ \ \partial_v \Pi = G\Pi_1 + P\partial_v G, \tag{12}$$

откуда при учете генерирующего условия (11) немедленно следует УКЭ (4) для функции Π.

Функциональное соотношение (8) и отвечающие ему решения УКЭ первого класса хорошо известны. Действительно, помимо УКЭ поле $G(X)$, полученное из (8), удовлетворяет, как легко видеть из выражений для производных (9), *переопределенной* системе дифференциальных уравнений вида

$$\partial_u G = G\partial_w G, \quad \partial_{\overline{w}} G = G\partial_v G, \tag{13}$$

определяющей т. н. *бессдвиговые (изотропные геодезические) конгруэнции* (БСК). При этом алгебраическое уравнение (8) представляет собой *общее решение* этих уравнений (в неявном виде), описывая тем самым все БСК в пространстве Минковского. Это замечательное утверждение, доказанное впервые в [16], известно как *теорема Керра*.

Что касается второго класса решений УКЭ, генерируемых алгебраическим уравнением (11), то, по-видимому, он ранее не рассматривался в литературе[2]. Известно, однако, что условие (11) определяет положение *особенностей* БСК и, соответственно,

[2] Изучение решений *действительного* уравнения эйконала с помощью дифференцирования производящих функций, зависящих от координат как параметров, используется в общей теории особенностей каустик и волновых фронтов [9].

– особенностей решений УКЭ *первого* класса, полученных из алгебраического уравнения (8). Точнее, уравнение (11) определяет *точки ветвления* основного комплекснозначного поля $G(X)$, т. е. точки пространства-времени, в которых производящее уравнение (8) имеет *кратные корни.* С другой стороны, для самих решений второго класса геометрическое место положения особенностей определяется, как это сразу следует из генерирующего эти решения уравнения (11), условием следующего вида:

$$\Lambda = \frac{d^2\Pi}{dG^2} = 0. \tag{14}$$

Изотропные конгруэнции (в том числе БСК), их особенности и точки ветвления играют определяющую роль в алгебродинамической теории поля. Подробнее они обсуждаются в следующих разделах. Здесь же мы лишь повторим, что согласно теореме, доказанной в работе [26],

две вышеописанные алгебраические процедуры в совокупности представляют общее решение УКЭ, т. е. все (аналитические) решения уравнения комплексного эйконала могут быть получены с помощью одной из этих процедур

(отметим только, что для решений с нулевой компонентой спинора $\xi_0 = 0$ должна быть выбрана иная, по сравнению с использованной выше, калибровка). Полученный результат можно рассматривать как *прямое обобщение теоремы Керра.*

В заключение приведем в качестве иллюстрации несколько примеров нахождения двух классов решений УКЭ с помощью вышеприведенной конструкции.

а. Статические решения. Пусть производящая функция Π зависит от своих твисторных переменных следующим образом:

$$\Pi = \Pi(G, H), \quad H = G\tau^0 - \tau^1 = wG^2 + 2zG - \overline{w}, \tag{15}$$

где $z = (u - v)/2$, а зависимость от временной координаты $t = (u + v)/2$ оказывается тем самым исключенной. Очевидно, более того, что анзац (15) представляет самый общий вид генерирующих функций, приводящих к статическим решениям УКЭ.

В [19, 12] было доказано, что статические решения уравнений БСК (а, следовательно, также и УКЭ первого класса), обладающие пространственно-ограниченной *(локализованной)* структурой сингулярного множества, с точностью до 3-мерных вращений и трансляций исчерпываются *решением Керра*, получающегося из функции

$$\Pi = H + 2iaG = wG^2 + 2z^*G - \overline{w}, \quad (z^* = z + ia) \tag{16}$$

с постоянным параметром $a \in \mathbb{R}$. Разрешая квадратичное по G уравнение $\Pi = 0$, получаем тогда следующие две “моды” поля $G(X)$:

$$G = \frac{\overline{w}}{z^* \pm r^*} \equiv \frac{x + iy}{z + ia \pm \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}} \ , \tag{17}$$

которые в случае $a = 0$ геометрически соответствуют обычной *стереографической проекции* $S^2 \mapsto \mathbb{C}$ из Северного или Южного полюсов соответственно. Нетрудно проверить, что оба решения, как и соответствующие им остальные компоненты твистора

$$\tau^0 = u + wG = t \pm r^*, \quad \tau^1 = \overline{w} + vG = G\tau^0, \tag{18}$$

действительно удовлетворяют УКЭ (так же, как и произвольная функция всех этих компонент). При этом, соответствующая БСК в простейшем случае $a = 0$ радиальна и имеет точечную сингулярность; в общем случае $a \neq 0$ БСК представляет собой конгруэнцию прямолинейных образующих системы гиперболоидов и имеет *сингулярность типа "Керровского" кольца* радиуса $R = |a|$. Используя эту конгруэнцию, можно определить соответствующие ей риманову метрику (метрику типа "Керра-Шилда") и электромагнитное поле (см. раздел 3), совместно удовлетворяющие электровакуумной системе уравнений Максвелла-Эйнштейна. В случае $a = 0$ это приводит к решению Райсснера-Нёрдстрема с кулоновским электрическим полем, в общем случае – к решению Керра-Ньюмена, характеризующимся тремя параметрами – массой M, электрическим зарядом Q и моментом импульса Mca, – и обладающим также магнитным моментом Qa, соответствующим "дираковской" частице [17, 18]. Более того, в рамках алгебродинамического подхода для электрического заряда точечной или кольцеобразной сингулярностей *оказывается допустимым только одно, единственное по модулю ("элементарное") значение* [14, 24, 25]. Более подробно свойства этого исключительного решения в контексте алгебродинамики рассмотрены в работе [21].

Получим теперь из той же производящей функции (16) решение УКЭ *второго* класса. Дифференцируя функцию (16) по G и приравнивая производную нулю, получим $G = -z^*/w$; подставляя затем это выражение в качестве аргумента в функцию (16), будем иметь окончательно следующее статическое (всюду однозначное) решение УКЭ:

$$\Pi = -\frac{(r^*)^2}{w} = -\frac{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}{x - iy}. \tag{19}$$

Отметим, что при этом уравнение $\Pi = 0$, эквивалентное двум действительным уравнениям $z = 0,\ x^2 + y^2 = a^2$, определяет сингулярное кольцо для решения Керра (17), т. е. для соответствующего той же функции Π решения УКЭ *первого* класса, как это и должно быть в соответствии с вышедоказанной общей теоремой (см. также раздел 4).

При рассмотрении статических решений УКЭ с локализованной в 3-пространстве сингулярностью *второго* класса выясняется, однако, что в отличие от аналогичных решений первого они вовсе не исчерпываются решением (19). В качестве примера рассмотрим серию решений, которые можно получить из производящих функций следующего вида:

$$\Pi = \frac{G^n}{H}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n > 2 \tag{20}$$

Не приводя явного вида самих решений (для произвольного $n > 2$), найдем лишь пространственную структуру их особенностей, определяемую из решения совместной системы уравнений $P = 0,\ \Lambda = 0$ (см. уравнения (11),(14)). Исключая из нее неизвестное поле G, находим, что сингулярности (точки ветвления эйконала) снова имеют форму *колец* $z = 0,\ x^2 + y^2 = R^2$, имеющих радиусы $R = a(n-1)/\sqrt{n(n-2)}$ соответственно. Интересно заметить, что этим решениям не соответствует, очевидно, никаких нетривиальных решений УКЭ первого класса, для которых уравнение $\Pi = 0$ определяло бы структуру сингулярностей, как это имеет место для случая пары "Керровских" решений (17) и (19).

b. Волновые решения. Рассмотрим теперь производящие функции, зависящие лишь от одной из твисторных переменных τ^0, τ^1, например от τ^0:

$$\Pi = \Pi(G, \tau^0) = \Pi(G, u + wG). \tag{21}$$

Оба класса решений УКЭ, генерируемых функциями вида (21), будут, очевидно, зависеть только от *двух* спинорных координат $u = t + z,\ w = x - iy$. Это означает, в частности, что соответствующие поля распространяются вдоль оси Z с фундаментальной скоростью $c = 1$. Пример “фотоноподобного” решения этого типа, с пространственно ограниченной (как в продольном, так и в поперечном направлениях) структурой сингулярного множества приведен в работе [25].

Отметим в заключение, что решение УКЭ значительно более сложной структуры рассмотрено ниже в разделе 4 (см. также [25]).

1. Частицы как каустики первичных светоподобных конгруэнций

Хорошо известно, что каждому решению уравнения эйконала соответствует некоторая изотропная конгруэнция лучей, ортогональная гиперповерхностям постоянного эйконала $S = const$ (волнового фронта) и определяемая направлением 4-вектора градиента $\partial_\mu S$. В обычно рассматриваемых ситуациях эти две структуры определяют *характеристики* и *бихарактеристики* некоторого (линейного) уравнения гиперболического типа, например, волнового уравнения $\Box\Psi = 0$.

В рассматриваемом комплексном случае (УКЭ) поверхности постоянного эйконала и изотропные конгруэнции 4-градиента геометрически принадлежат уже *комплексному расширению пространства-времени Минковского* $\mathbb{C}M^4$, совершенно естественному также с точки зрения комплексной структуры исходной алгебры бикватернионов $\mathbb{B}$. Вопрос о физическом смысле дополнительных (мнимых) координат и соответствующих комплексных изотропных конгруэнций нетривиален и чрезвычайно важен, но мы не имеем возможности рассматривать его здесь, надеясь сделать это в отдельной статье.

Используем ниже другой, не менее интересный факт существования *действительной* изотропной геодезической конгруэнции для каждого из *комплекснозначных* решений УКЭ. Это замечательное свойство сразу следует из рассмотренной выше твисторной структуры УКЭ. А именно, каждое решение УКЭ (как первого, так и второго классов) полностью определяется соответствующим ему (изотропным проективным) твисторным полем $\{\xi(X), \tau(X)\}$, подчиненным условию инцидентности (6) (в выбранной выше калибровке $\xi_0 = 1,\ \xi_1 = G(X)$). Это “условие Пенроуза” может быть в явном виде разрешено относительно пространственных координат $\{x_a\},\ a = 1, 2, 3$, в результате чего получим:

$$x_a = \frac{\Im(\tau^+\sigma_a\xi)}{\xi^+\xi} - \frac{\xi^+\sigma_a\xi}{\xi^+\xi}\ t, \tag{22}$$

где $\{\sigma_a\}$ представляют собой обычные *матрицы Паули*, а временная переменная t *остается свободным параметром!* Из выражения (22) следует, что фундаментальное спинорное поле $\xi(X)$ *воспроизводит свои значения вдоль лучей, определяемых единичным векторным полем направлений* (полем т. н. *директора*)

$$\vec{n} = \frac{\xi^+\vec{\sigma}\xi}{\xi^+\xi}, \quad \vec{n}^2 \equiv 1, \tag{23}$$

распространяясь вдоль этих, локально определенных направлений с универсальной и постоянной скоростью $c = 1$. В ранее выбранной калибровке для декартовых компонент “директорного” вектора (23) имеем

$$\vec{n} = \frac{1}{(1+GG^*)}\{\ (G+G^*),\ -i(G-G^*),\ (1-GG^*)\ \}; \tag{24}$$

при этом две его независимые степени свободы находятся в одно-однозначном соответствии с двумя компонентами основной комплекснозначной функции $G(X)$.

Таким образом, при выборе некоторого произвольного решения УКЭ пространство расслаивается пучком прямолинейных световых лучей – *изотропной геодезической*[3] *конгруэнцией* (ИГК). Заметим, что как следствие прямолинейности изотропной конгруэнции "директорный" вектор автоматически удовлетворяет уравнению *геодезических* [39]

$$\partial_t \vec{n} + (\vec{n}\vec{\nabla})\vec{n} = 0. \tag{25}$$

Фундаментальное поле $G(X)$, определяющее ИГК, может быть получено из одного из двух алгебраических условий (8) или (11), которые в общем случае имеют несколько (конечное или даже бесконечное число) локально различных решений. Предположим, что производящая функция Π *неприводима*, т. е. не может быть представлена в виде произведения некоторого числа твисторных функций того же вида (в противном случае следует сделать выбор в пользу одного из множителей). Тогда решение общего вида будет представлять собой *многозначную комплексную функцию* $G(X)$. Выберем в окрестности некоторой точки X одну из непрерывных *ветвей* этой функции ("мод"); при этом данной моде будет соответствовать некоторая ИГК и определенный набор физических полей.

В частности, для любого из решений УКЭ *первого* класса может быть определен спинор *электромагнитного поля* $F_{(AB)}$, непосредственно выражающийся через твисторное поле решения [23, 25, 26]

$$F_{(AB)} = \frac{1}{P}\left\{\Pi_{AB} - \frac{d}{dG}\left(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P}\right)\right\}, \tag{26}$$

где Π_A, Π_{AB} представляют собой производные по твисторным аргументам τ^0, τ^1 от генерирующей функции Π первого и второго порядков соответственно. Для каждой из мод решения $G(X)$ построенное таким способом поле *локально удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла*. Помимо этого, в работах [14, 23, 21] было показано, что через ту же функцию $G(X)$ естественно определяется еще и комплексное $SL(2,\mathbb{C})$ *калибровочное поле Янга-Миллса*, а также *поле кривизны* некоторой эффективной римановой метрики.

Рассмотрим теперь *аналитическое продолжение* выбранной моды функции $G(X)$ вплоть до одной из ее точек ветвления, которые соответствуют кратным корням уравнения (8). В такой точке напряженность электромагнитного поля (26) обращается в бесконечность. То же самое имеет место и для других ассоциированных с решениями УКЭ физических полей, в частности поля кривизны[4]. Тем самым пространственная структура, определяемая положением точек ветвления функции $G(X)$ (которая может быть 0-, 1- или даже 2-мерной, см. раздел 4), проявляет себя как *общий источник* совокупности физических полей и (по крайней мере в случае, когда она ограничена в 3-пространстве) формирует некоторый хорошо определенный и единый *частицеподобный* объект.

Такие образования могут проявлять нетривиальную эволюцию во времени, моделирующую физические взаимодействия, а бифуркации сингулярностей весьма напоминают *взаимопревращения* элементарных частиц (см. пример в следующем разделе). Они обладают также реалистичным набором "квантовых чисел", в том числе автоквантованным электрическим зарядом и гиромагнитным отношением, характерным для дираковской частицы (фермиона спина 1/2) [17, 18, 21]. Большое число

[3] В пространстве Минковского геодезические, очевидно, являются прямыми.

[4] Поле Янга-Миллса имеет, помимо этого, дополнительные сингулярности струнного типа.

таких частицеподобных решений и их сингулярная структура получены и изучались в наших работах [20, 21, 22, 25].

С другой стороны, для светоподобных конгруэнций (ИГК), сопоставляемых решениям УКЭ с помощью директорного вектора (24), положение их точек ветвления совпадает с положением точек ветвления самого фундаментального поля $G(X)$ и представляет хорошо известную из геометрической оптики структуру “протяженных фокусов” – *каустик*, т. е. огибающих системы лучей конгруэнции, на которых соседние лучи пересекаются (фокусируются). С этой точки зрения, в рассматриваемой теории *“частицы” интерпретируются как (ограниченные в пространстве) каустики ассоциированных с решениями УКЭ светоподобных прямолинейных конгруэнций.*

2. Мировая функция и многозначные физические поля

На данном этапе следует сделать выбор одного из двух типов решений УКЭ, которое в развиваемой теории могло бы в принципе отвечать за описание структуры Вселенной как целого. В качестве *“Мирового решения”* мы выбираем *некоторое решение первого класса*, поскольку большое количество интересных геометрических и физических структур может быть ассоциировано с каждым из решений именно этого класса [14, 20, 21]. Такое решение может быть получено алгебраически из условия Керра (8) и некоторой производящей твисторной *“Мировой функции”* Π; геометрически оно порождает некоторую ИГК специального вида – *бессдвиговую изотропную конгруэнцию* [2, 3].

Более того, оказывается, что при этом выборе решение УКЭ *второго* класса, “сопряженное” Мировому, также играет важную роль, определяя характеристическую гиперповерхность для Мирового решения (I класса). Действительно, эта последняя находится из решения совместной системы алгебраических уравнений (8) и (11). Если разрешить уравнение (11) относительно G и подставить результат в (8), полученное уравнение $\Pi(G(X)) = 0$ и определит характеристическую гиперповерхность для “Мирового” решения. В то же время функция $\Pi(G(X))$ обязана при этом удовлетворять УКЭ, представляя некоторое решение второго класса (в соответствии с основной теоремой раздела 2). Таким образом, в рассматриваемой теории

поле эйконала выполняет две взаимодополняющие функции, являясь одновременно фундаментальным физическим полем (как решение УКЭ I класса) и в то же время характеристическим полем (как сопряженное ему решение II класса), определяющим геометрическое место точек ветвления исходного поля (точек разрыва его производных).

Предположим теперь, что Мировая функция Π представляет собой *неприводимый полином очень высокого, но конечного порядка*, так что уравнение (8) является алгебраическим в узком смысле (т. е. не трансцендентным) и геометрически определяет некоторую алгебраическую поверхность в проективном твисторном пространстве $\mathbb{C}P^3$. В этом случае Мировое решение УКЭ будет состоять из некоторого большого числа мод – ветвей многозначной комплексной функции $G(X)$ – и будет в каждой точке задавать соответствующее число изотропных направлений, определяемых в 3-пространстве директорным вектором (24) и порождающих равное им число локально различных ИГК.

Каждая пара этих конгруэнций в фиксированный момент времени будет, как правило, иметь *огибающую*, состоящую из большого числа связных *одномерных* компонент-каустик[5]. Именно эти пространственные структуры и будут определять

[5] Действительно, каустики **общего вида** определяются одним *комплексным* условием

в рассматриваемой теории "частицы" общего типа (по крайней мере, если они пространственно ограничены). Другие типы частицеподобных структур будут локализованы в фокальных точках пересечения *трех и более* ИГК, где уравнение (8) имеет корень более высокой кратности. Разумеется, образования этого вида будут встречаться относительно редко, и их устойчивость весьма проблематична.

На достаточно простом примере можно проиллюстрировать существование и свойства обоих вышепредставленных типов частиц-каустик. Выберем, например, в качестве производящей твисторную функцию вида [25]

$$\Pi = G^2(\tau^0)^2 + (\tau^1)^2 - b^2G^2 = 0, \quad b = const \in \mathbb{R} \quad , \tag{27}$$

приводящую к уравнению 4-го порядка относительно поля $G(X)$. В начальный момент времени $t = 0$, как нетрудно проследить аналитически, геометрическое место особенностей состоит из пары точечных сингулярностей (обладающих равными "элементарными" зарядами противоположного знака) и электрически нейтральной 2-мерной поверхности (эллипсоидального "кокона"), окружающего точечные заряды (подробнее см. [25]). Кокон образован пересечением всех 4-х мод многозначного решения, в то время как каждая из точечных сингулярностей формируется пересечением одной из пар соответствующих (локально радиальных, т. е. кулоновского типа) ИГК.

Чрезвычайно интересной оказывается динамика этих сингулярностей. В частности, в момент времени $t = b/\sqrt{2}$ точечные сингулярности взаимоуничтожаются (при $r = 0$, т. е. в начале координат), моделируя тем самым процесс *аннигиляции* элементарных частиц; этот процесс сопровождается *излучением* вторичного волнового (светоподобного) фронта, представленного еще одной 2-мерной компонентой связности каустической структуры. Более подробно решение (27) будет рассмотрено в отдельной статье.

Итак, мы видим, что именно многозначное поле естественным образом обеспечивает возможность самосогласованной структуры и эволюции сложных (вплоть до приближенных к реальным) многочастичных сингулярных систем. Необходимо лишь преодолеть некий психологический барьер и допустить принципиальную возможность *многозначности* не только первичного G-поля, но и других ассоциированных с ним физических полей, включая, например, электромагнитное.

Действительно, в общепринятых классических подходах поля, по существу, служат лишь инструментом, позволяющим адекватным образом (с учетом запаздывания и т. п.) описать динамику частиц, и ничем более. Правда, в нелинейных теориях, так же, как и в представленном здесь алгебродинамическом подходе, поля играют более важную роль, отвечая за образование самих частиц как регулярных *солитонов* или сингулярностей (точечных или протяженных) соответственно. В первом, более привычном подходе, требование *однозначности* поля представляется вполне естественным, если не неизбежным. Та же ситуация имеет место и в квантовой механике, где "правила отбора" часто следуют именно из условия однозначности волновой функции.

Однако в алгебродинамике, как можно видеть на примере решения (27), требование однозначности поля не только не является необходимым, но и препятствует адекватному описанию взаимодействия частиц-сингулярностей. С другой стороны, признание многозначности поля вовсе не мешает получению дискретного спектра характеристик сингулярности по аналогии с квантовой механикой. Например, требование *однозначности некоторой, локально выбранной моды* первичного G-поля и

$\Pi(G(X)) = 0$ (двумя действительными условиями) на 3 координаты, при фиксированном $t = t_0$ определяющим некоторое число 1-мерных кривых – "струн".

электромагнитного поля (вдали от точек ветвления первого и сингулярностей второго соответственно!) приводит к квантованию электрического заряда сингулярных источников в алгебродинамической теории поля [24, 25].

Наконец, если вести речь о т. н. процессе "измерения" напряженностей поля, например электромагнитного, то следует заметить, что в эксперименте непосредственно меряются лишь ускорения частиц, токи и т. п., и лишь затем результаты переводятся на привычный полевой язык. Однако это последнее действие – лишь дань традиции, вовсе не являющаяся обязательной (вспомним хотя бы электродинамику Фейнмана-Уилера или многочисленные релятивистски инвариантные теории "действия на расстоянии" [28, 29]). "На самом деле мы никогда не имеем дело с полями, а исключительно с частицами" (Ф. Дайсон).

Между тем, предлагаемый подход в этом отношении может даже считаться не столь радикальным, поскольку физическое поле, хотя и многозначное, сохраняет в нем свою фундаментальную роль и как строительная основа для частиц, и как посредник, осуществляющий взаимодействие между ними. Что касается второй из его функций, то уже на классическом уровне рассмотрения, при рассмотрении уравнения движения частицеподобной сингулярности, мы можем иметь дело с *усредненным значением* всех полевых мод, "внешних" по отношению к частице (т. е. несингулярных в точке ее нахождения). Отметим, что близкие представления естественно возникают и в некоторых квантовополевых подходах [32]. В нашей же схеме, истинную взаимосвязь первичного многозначного поля и "наблюдаемого" поля, описывающего межчастичные взаимодействия, еще предстоит осознать после получения спектра и эффективной механики частиц-сингулярностей.

Хочется надеяться, что концепция многозначности физических полей будет через какое-то время воспринята так же, как это произошло с гипотезой *многомерности* физического пространства-времени. Идея многозначности действительно выглядит чрезвычайно естественной и привлекательной. С чисто математической точки зрения эта концепция оправдана в свете естественной многозначности решений дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [30, 31]). Как выясняется, решения, описываемые обобщенными δ-функциями, представляют собой, по существу, лишь частный и не самый интересный случай решений общего вида. С физической точки зрения идея о локально многозначном, но *глобально едином комплекснозначном поле* позволяет простым образом ввести понятие о некотором дуалистическом комплексе "частицы-поле", комплексе чрезвычайно богатой и сложной структуры, объединяющем все частицы Вселенной в единый физический объект. При этом сами сингулярности-частицы хорошо определены и участвуют в коллективном движении, *свободном от всякой неоднозначности или расходимостей* (последние могут возникнуть в данной схеме лишь как результат неадекватного описания процесса эволюции и могут быть устранены, если возникнут, на совершенно законном основании, в отличии от процедур перенормировки в квантовой теории поля).

Наконец, что касается принципиально важной *финальной* проблемы выбора некоторой *исключительной по внутренним свойствам* производящей функции П в качестве *Мировой функции Вселенной*, некоторые соображения могут быть высказаны уже на данном этапе развития теории. Мы собираемся рассмотреть их в отдельной статье.

3. "Предсвет", релятивистски инвариантный Эфир и поток Времени

Светоподобные конгруэнции (ИГК) являются основным элементом картины физического мира, возникающей в представленном алгебродинамическом подходе и даже в твисторной теории вообще. Лучи ИГК плотно заполняют пространство-время и в каждой точке состоят из *суперпозиции* огромного числа компонент-мод, имеющих различные изотропные направления, т. е. распространяющиеся (с 3-мерной точки зрения) в разных направлениях, но с постоянной по модулю и универсальной скоростью $c = 1$ (для каждой из мод многозначного решения, каждой точки и каждой инерциальной системы отсчета). С такой точки зрения, *во Вселенной не существует ничего, кроме этого первичного светоподобного потока ("Предсвета")*, поскольку *вся физическая Материя порождена предсветом и из предсвета* на каустиках – своего рода областях "конденсации", "уплотнения" лучей предсветовой конгруэнции.

При этом можно говорить о некоторой исключительной форме релятивистски инвариантного *эфира*, формируемого первичным предсветовым потоком. Такой эфир, разумеется, имеет очень мало общего со старыми моделями *светонесущего* эфира, рассматривавшегося как род упругой среды непонятной этиологии. Здесь же эфир состоит из *бесструктурных* (предматериальных) светоподобных элементов и, очевидно, находится в полном согласии с теорией относительности[6].

В то же время, описанная выше картина эфира, формируемого потоком Предсвета, и материи, порожденной "сгущениями" первичного света, вызывает множество ассоциаций с Библией и с древней восточной философией. Не один теолог, мистик или философ наверняка уже приходил к представлению о подобной картине Мироздания. Однако возникающие в контексте последовательной и чисто дедуктивной физической теории, такие представления выглядят значительно более достоверными; насколько известно автору, ранее они практически не обсуждались в физической литературе[7].

Существование формируемого Предсветом эфира и универсальное свойство "переноса" фундаментального "эфирообразующего" поля $G(X)$ с постоянной скоростью $c = 1$ указывает также на принципиально различный статус пространственных и временной координат и позволяет предложить *новый подход к проблеме физического Времени* в целом. При этом полезно вспомнить, что с тех пор, как Г. Минковский в 1908 году объединил пространство и время в единый 4-мерный континуум, никаких дальнейших продвижений в понимании проблемы Времени по существу не произошло. Более того, такой синтез во многом затушевал качественные различия пространственной и временной сущностей и мало способствовал решению таких проблем, как (микро/макро) необратимость, (не)однородность и (не)локальность времени, зависимость хода времени от материальных процессов и др.

По нашему мнению, суть проблемы Времени очень проста и состоит в следующем. *Субъективно* мы воспринимаем время как некоторое непрерывное и невидимое движение, *поток*; каждый из нас прекрасно понимает, как это понимали еще древние греки, что имеется в виду под словами "Река Времени". Мы воспринимаем такое внутреннее движение, как не зависящее ни от нашей воли, ни от материальных процессов и *равномерное*: недаром течение времени в физике моделируется равномерным движением ленты записывающего устройства и т. п. Кроме того, и в отличие от изменений в пространственных направлениях, именно с изменением во времени связано не только *сохранение* определенного набора *интегральных величин* (это-то как раз используется в ортодоксальной физике), но и более сильное, субъективно вос-

[6] Сейчас кажется даже странным, что сам А. Эйнштейн не предложил концепцию релятивистского эфира, столь созвучного идеям и СТО, и любимого им *принципа Маха*. Удивительно и то, что Р. Пенроуз также просмотрел эту возможность, естественно вытекающую из самой структуры созданной им твисторной теории.

[7] В отдельных аспектах близкие к вышерассмотренным идеи высказывались в работах [34, 35, 36]. Отметим особенно концепцию "лучистой частицы", предложенную Л. С. Шихобаловым [33].

принимаемое условие – *повторение, воспроизведение* **локального** *состояния любой системы.* Именно поэтому для измерения времени и используются (*часы*) с принципом действия, основанным на повторяющихся, чисто периодических процессах. Наконец, в отличие от в значительной мере произвольных и различных изменений пространственного положения физических тел, все они и все мы всегда обладаем *общей и монотонно возрастающей временной координатой*, т. е. находимся в едином и перманентном движении в Реке Времени.

Удивительно, но теоретическая физика даже не пытается дать хоть какое-то объяснение подобных представлений, совершенно чуждых ей и, в том числе, теории относительности. При описании динамики (как нерелятивистской, так и релятивистски инвариантной) чисто постулативно выбирается “гиперповерхность, ортогональная оси времени”, т. е. фиксируется субъективно воспринимаемое всеми единство настоящего момента времени, момента “сейчас”; *никаких внутренних оснований для этого в структуре теоретической физики, включая СТО, не имеется!*

Такая ситуация, по крайней мере частично, обусловлена тем, что представление о вездесущем и вечном Потоке Времени немедленно приводит к вопросу о его (материальном? предматериальном?) носителе. В этой связи нельзя не вспомнить работы Н. А. Козырева [37], который настойчиво развивал представление об “активном” Потоке Времени, непосредственно влияющем на ход материальных процессов. По нашему мнению, однако, строгие физические обоснования идей Козырева сегодня отсутствуют. В предлагаемом нами подходе Поток Времени не является в подобном смысле материальным: он не *влияет* на Материю, и не *взаимодействует* с ней, а сам *порождает* ее. В отличие от концепции Козырева, здесь нет разных материальных сущностей, лишь одной из которых является Время: напротив, имеется лишь одна *триединая* сущность – Предсвет-Время-Материя. В некотором смысле наша концепция оказывается ближе к теории “время-генерирующих потоков” А. П. Левича [38].

С другой стороны, при рассмотрении проблемы носителя Потока Времени мы неизбежно возвращаемся к представлениям о некоторой форме *эфира*, который был, как известно, изгнан из физики после триумфа специальной теории относительности. Без него же никакой Поток Времени не может быть последовательно введен в структуру теоретической физики, и все субъективно воспринимаемые свойства времени не могут быть строго сформулированы и описаны.

Однако парадоксальным образом, как это часто бывает, именно СТО с ее постулатом постоянства и универсальности скорости света и оправдывает введение *динамического, лоренц-инвариантного эфира*, формируемого светоподобными конгруэнциями, как первичной структуры физического Мира. При этом Поток Времени совершенно естественно может быть отождествлен с Потоком первичного Света (Предсвета), а *Река Времени* – с *Рекой Предсвета.* Причем именно универсальность скорости света объясняет наше субъективное восприятие Потока Времени как равномерного и однородного.

Совершенно необычным и неожиданным оказывается, однако, другое: в данном подходе *Поток Времени представляет собой* **суперпозицию** *огромного числа* **разнонаправленных** *и локально независимых составляющих (субпотоков).* В каждой точке 3-мерного пространства существует (конечное) множество направлений, и каждая из мод первичного многозначного поля $G(X)$ определяет одно из этих направлений и *распространяется вдоль него*, формируя одну из составляющих единого Потока Предсвета, тождественного Потоку Времени.

Можно предполагать, что именно благодаря такой локальной многозначности мы не способны субъективно воспринимать *направление* Потока Времени. Помимо того, для сложного Мирового решения в структуре фундаментального временного-предсветового потоков обязательно присутствует и *стохастическая* компонента, проявляющая себя в хаотических изменениях локальных направлений световых конгруэнций, также труднодоступных для восприятия. В то же время, как уже отмечалось, именно существование постоянной по модулю и универсальной для всех ветвей многозначного Мирового решения *скорости распространения Предсвета* ответственно за возможность субъективного восприятия Потока Времени вообще и за восприятие хода времени как равномерного и однородного в частности.

4. Заключение

Итак, мы рассмотрели реализацию алгебродинамического подхода, в которой в качестве основы физической теории выбирается единственная структура чисто абстрактной природы (алгебра комплексных кватернионов и *обобщенные уравнения Коши-Римана* – условия дифференцируемости функций в этой алгебре). Та же самая структура на самом деле может быть выражена на многих эквивалентных алгебро-геометрических языках (ковариантно постоянных полей, твисторной геометрии, бессдвиговых изотропных конгруэнций и др.).

Исходные уравнения прямо приводят к полю комплексного эйконала, рассматриваемому в теории как первичное нелинейное физическое поле (в некотором смысле альтернативное линейным полям квантовой механики). С этим полем тесно связаны фундаментальное 2-спинорное и твисторное поля, на языке которых, в частности, формулируется общее решение уравнения комплексного эйконала. Через поле эйконала определяются также другие физические поля, в том числе электромагнитное поле и поле Янга-Миллса. Особенности поля эйконала и отвечающих ему изотропных конгруэнций рассматриваются как частицеподобные образования ("автоквантованные" и эффективно взаимодействующие).

В результате, возникающая как следствие одной лишь исходной структуры *физическая* картина Мира оказывается весьма неожиданной и красивой. Ее основными элементами являются первичный световой поток – "Предсвет"– и формируемый им релятивистский эфир, многозначные физические поля и порождаемая Предсветом материя (состоящая из частиц-каустик, образуемых суперпозицией отдельных ветвей единой предсветовой конгруэнции в точках их "фокусировки").

Очень естественной и глубокой представляется возникающая в теории связь между существованием универсальной скорости (скорости "света") и "Потоком Времени", позволяющая в определенном смысле понять происхождение Времени как такового. *Время есть ничто иное, как первичный Свет*, эти две сущности неразделимы. С другой стороны, *нет ничего во Вселенной, помимо потока Предсвета*, порождающего *всю без исключения* "плотную" Материю во Вселенной.

Благодарности

Автор благодарен Д. Г. Павлову за приглашение участвовать в работе создаваемого им актуального научного журнала "Гиперкомплексные числа в физике и геометрии" , а также в конкурсе работ по данной тематике. Он также глубоко признателен А. П. Левичу и участникам руководимого им семинара по изучению феномена времени. Много дали мне беседы с В. И. Жариковым, В. Н. Журавлевым, Дж. А. Ризкалла, В. Н. Тришиным, В. П. Троицким, В. П. Царевым и с другими моими коллегами, которым я благодарен за многолетнюю дружбу и поддержку. Хочется

надеяться, что огромное здание физики на самом деле можно перестроить по новому проекту, значительно более простому, единственно возможному (Дж. А. Уилер) и приближающему нас к истинному Проекту, по которому и был создан наш Мир.

Литература

[1] R. Penrose, in: *Quantum Gravity: an Oxford Symposium*, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama. – Clarendon Press, Oxford 1975.

[2] Р. Пенроуз и У. Риндлер, *Спиноры и пространтво-время. Т. 2.* – Мир, М. 1989.

[3] R. Penrose, *Classical and Quantum Gravity*, **14**, A299 (1997).

[4] В. А. Фок, *"Теория пространства, времени и тяготения"*. – ГИТТЛ, М. 1955.

[5] А. З. Петров, *"Новые методы в Общей теории относительности"*. – Наука, М. 1966.

[6] Г. Бейтман, *"Математическая теория распространения электромагнитных волн"*. – Физматгиз, М. 1958.

[7] S. Fritelli, E. T. Newman and G. Silva-Ortigoza, *J. Math. Phys.*, **40**, 383, 1999; E. T. Newman and A. Perez, *J. Math. Phys.*, **40**, 1089 (1999).

[8] В. И. Арнольд, *"Математические методы классической механики"*. – Наука, М. 1989.

[9] В. И. Арнольд, *"Особенности каустик и волновых фронтов"*. – ФАЗИС, М. 1996.

[10] С. Н. Кружков, *Мат. Сборник*, **98 (140)**, 450 (1975).

[11] В. П. Маслов, *"Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях"*. – Наука, М. 1977.

[12] R. P. Kerr and W. B. Wilson, *Gen. Rel. Grav.*, **10**, 273 (1979).

[13] В. В. Кассандров, *"Алгебраическая структура пространства-времени и Алгебродинамика"*. – Изд-во Ун-та дружбы народов, М. 1992.

[14] V. V. Kassandrov, *Gravitation & Cosmology*, **3**, 216 (1995); (gr-qc/0007027).

[15] V. V. Kassandrov, *Acta. Applic. Math.*, **50**, 197 (1998); V. V. Kassandrov, in: *"Quasigroups and Nonassociative Algebras in Physics"*, ed J. Lõhmus and P. Kuusk. – Inst. Phys. Estonia Press, 1990, p 202.

[16] G. C. Debney, R. P. Kerr and A. Schild, *J. Math. Phys.* , **10**, 1842 (1969).

[17] B. Carter, *Phys. Rev.*, **174**, 1559 (1968).

[18] C. A. Lopes, *Phys. Rev.*, **D30**, 313 (1984).

[19] A. Ya. Burinskii, in:*"Problems of Theory of Gravitations and Elementary Particles". No. 11*, ed. K. P. Stan'yukovich. – Atomizdat, Moscow, 1980, p. 47 (in Russian).

[20] В. В. Кассандров и Дж. А. Ризкалла, в: *"Современные проблемы теории поля"*, ред. А. В. Аминова. – Изд-во Казанского Ун-та, Казань 1998, с. 163; see also English version V. V. Kassandrov and J. A. Rizcallah, in: *"Recent Problems in Field Theory"*, ed A. V. Aminova, Kasan Univ. Press, Kasan 1998, p 176; (gr-qc/9809078).

[21] V. V. Kassandrov and J. A. Rizcallah, in: *"Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory"*, ed. V.A. Petrov. – Inst. High Energy Phys., Protvino, 2002, p. 199; *Preprint* gr-qc/9809056, 1998.

[22] V. V. Kassandrov and V. N. Trishin, *Gravitation & Cosmology*, **5**, 272 (1999); (gr-qc/0007026).

[23] V. V. Kassandrov and J. A. Rizcallah, *Preprint* gr-qc/0012109, 2000.

[24] В. В. Кассандров, *Вестник Рос. Ун-та дружбы народов*, сер. Физика, **8(1)**, 34, 2000; (www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).

[25] V. V. Kassandrov, *Preprint* gr-qc /0308045.

[26] V. V. Kassandrov, *Gravitation & Cosmology*, **8**, Suppl. 2, 57 (2002).

[27] V. V. Kassandrov, in: *Proc. Int. Conf. "Physical Interpretations of Relativity Theory"*, eds. A. N. Morozov and V. O. Gladyshev. – Bauman Univ. Press, Moscow, 2003 (in print).

[28] *Instantaneous Action-at-a-Distance in Modern Physics. "Pro" and "Contra"*, eds. A. Chubykalo, V. Pope and R. Smirnov-Rueda. – Nova Science Publ. Inc., NY, 1999.

[29] Ю. С. Владимиров и А. Ю. Турыгин, *"Теория прямого межчастичного взаимодействия"*. – Энергоатомиздат, М. 1986.

[30] F. Lizzi, G. Marmo, G. Sparano and A. M. Vinogradov, *J. Geom. Phys.*, **14**, 34, 1994.

[31] V. V. Lychagin, *Acta Applic. Math.*, **3**, 135 (1985).

[32] A. A. Kirillov, *Phys. Lett.*, **B555**, 13 (2003);
A. A. Kirillov and D. Turaev, *Phys. Lett.*, **B532**, 185 (2002).

[33] Л. С. Шихобалов, *Вестник С.-П. Ун-та*, **1(3)**, 109 (1997); **1(4)**, 118 (1999).

[34] И. А. Урусовский, *Зарубежная радиоэлектроника*, **3**, 3 (1996); **6**, 64 (1996); **6**, 66 (2000).

[35] В. В. Смолянинов, *Успехи физич. наук*, **170**, 1064 (2000).

[36] И. А. Шелаев, *Введение в необратимую электродинамику.* – Дубна, 1999.

[37] Н. А. Козырев, *Избранные Труды.* – Л. 1991;
Н. А. Козырев, в: *"История и методология естественных наук. Вып. 2"*. – М., 1963, с. 95; (см. также труды этого автора в www.chronos.msu.ru/relectropublications.html).

[38] А. П. Левич, в: *Конструкции времени в естественных науках: на пути к пониманию феномена времени*, ред. А. П. Левич. – Изд-во Московского Ун-та, М. 1996.
A. P. Levich, *Gravitation & Cosmology*, **1(3)**, 237 (1995); (см. также труды этого автора в www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).

[39] В. В. Кассандров, в: *Математика и Практика. Математика и Культура. Вып. 2*, ред. М. Ю. Симаков. – Самообразование, М. 2001, с. 67; (www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).