ОБОБЩЕННО–АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛИЧИСЛОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт,
gri9z@mail.ru

Вводится понятие обобщенно-аналитической функции поличисловой переменной, которое является нетривиальным обобщением понятия аналитической функции комплексной переменной и поэтому может оказаться фундаментальным для теоретико-физических построений. В качестве примера подробно рассматриваются ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа H_4 и интересный класс соответствующих обобщенно-аналитических функций.

1. Введение

Пусть M_n – n-мерное элементарное многообразие, а P_n – система n-мерных ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел, n-чисел), и между этими множествами установлено взаимно однозначное соответствие. Тем самым, если в P_n выбран базис

$$e_1, e_2, ..., e_n; \quad e_i e_j = p^k_{ij} e_k, \tag{1}$$

$$X = x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + \cdots + x^n e_n \in P_n \tag{2}$$

($e_1, e_2, ..., e_n$ – символьные элементы, p^k_{ij} – характеристические действительные числа, а $x^1, x^2, ..., x^n$ – действительные координаты в базисе $(e_1 \equiv 1, e_2, \ldots, e_n)$, то числа $x^1, x^2, ..., x^n$ можно использовать не только как координаты в P_n, но и как координаты в многообразии M_n, так что $(x^1, x^2, ..., x^n) \in M_n$. Хотя в M_n можно переходить к любой другой криволинейной системе координат, координатную систему x^i, построенную на основе поличисел и фиксированного взаимно однозначного соответствия $M_n \leftrightarrow P_n$, будем считать выделенной, как и любую другую систему координат, связанную с этой невырожденным линейным преобразованием. Поличисловые алгебраические операции индуцируют те же самые операции в элементарном многообразии (формально) и касательном пространстве любой точки этого многообразия (неформально). То есть будем считать, что касательные пространства элементарного многообразия M_n изоморфны P_n. Функции $F(X)$ от поличисловой переменной

$$F(X) := f^1(x^1, \cdots, x^n) e_1 + \cdots + f^n(x^1, \cdots, x^n) e_n, \tag{3}$$

где f^i – достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции от n действительных переменных, будем рассматривать как векторные (контравариантные) поля в элементарном многообразии M_n. Тогда, кроме сложения и умножения на число, для векторных полей в M_n определена также операция умножения векторных полей

$$f^k_{(3)} = f^i_{(1)} \cdot f^j_{(2)} \cdot p^k_{ij}. \tag{4}$$

Удобно, но необязательно, считать пространство M_n главным ("изучаемым"), а пространство P_n, в некотором смысле, "инструментом", с помощью которого "изучается" пространство M_n. В общем случае параллельный перенос вектора в пространстве P_n

не соответствует "параллельному переносу" того же вектора в пространстве M_n, поэтому для определения абсолютного дифференциала (или ковариантной производной) понадобятся объекты связности или заменяющие их объекты. Если не вводить пару $\{M_n, P_n\}$, а ограничиться только ассоциативно-коммутативными гиперкомплексными числами, то естественно ввести определения

$$dX := dx^i \cdot e_i \tag{5}$$

и

$$dF(X) := F(X + dX) - F(X) = \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \cdot e_i \cdot dx^k. \tag{6}$$

Функцию $F(X)$ поличисловой переменной X называют *аналитической*, если существует такая функция $F'(X)$, что

$$dF(X) = F'(X) \cdot dX, \tag{7}$$

где умножение в правой части является поличисловой операцией. Из (7) следует

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} = p^i_{kj} \cdot f'^j. \tag{8}$$

Так как в базисе e_i с компонентой $e_1 = 1$ мы имеем

$$p^i_{1j} = \delta^i_j, \tag{9}$$

то

$$f'^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^1}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), получим соотношения Коши-Римана

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^1} - p^i_{kj} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^1} = 0 \tag{11}$$

для аналитических функций поличислового переменного. Число $n(n-1)$ этих соотношений растет быстрее, чем число n компонент аналитической функции. Это приводит к "функциональной бедности" множества аналитических функций поличисловой переменной при $n > 2$. Настоящая работа как раз и посвящена попытке нетривиального обобщения понятия аналитической функции поличисловой переменной, при котором число условий, аналогичных условиям Коши-Римана, не было бы больше числа неизвестных функций-компонент. Первый шаг к такому обобщению мы уже сделали выше, введя пару $\{M_n, P_n\}$. Тогда естественно заменить дифференциал (6) абсолютным дифференциалом

$$DF(X) := \bigtriangledown_k f^i \cdot e_i \cdot dx^k, \tag{12}$$

где

$$\bigtriangledown_k f^i := \frac{\partial f^j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} \cdot f^j \tag{13}$$

– ковариантная производная, а Γ^i_{kj} – "объекты связности". Вместо формул (8) и (10) получим

$$\bigtriangledown_k f^i = p^i_{kj} \cdot f'^j \tag{14}$$

и

$$f'^i = \bigtriangledown_1 \cdot f^i, \tag{15}$$

а соотношения Коши-Римана примут вид

$$\bigtriangledown_k f^i - p^i_{kj} \cdot \bigtriangledown_1 f^j = 0. \tag{16}$$

Совершенно необязательно, чтобы "объекты связности" Γ^i_{kj} в формуле (13) были одинаковыми для всего множества функций, удовлетворяющих условиям (16).

2. Определение обобщенно-аналитической функции и ее основные свойства

Назовем функцию $F(X)$ от поличисловой переменной X *обобщенно-аналитической*, если существует такая функция $F'(X)$ – производная, что

$$\widetilde{D}F(X) = F'(X) \cdot dX, \tag{17}$$

где

$$\widetilde{D}F(X) \equiv \widetilde{\bigtriangledown}_k f^i \cdot e_i \cdot dx^k \tag{18}$$

и использовано определение

$$\widetilde{\bigtriangledown}_k f^i := \frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma^i_k. \tag{19}$$

Предполагается, что при переходе от одной (криволинейной) системы координат к другой входящие объекты γ^i_k преобразуются согласно закону

$$\gamma^{i'}_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot \gamma^i_k - \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i} \cdot f^i. \tag{20}$$

Заметим, что при таком определении $\widetilde{\bigtriangledown}_k f^i$ является тензором. Величины γ^i_k будем называть *гамма-объектами*. В общем случае мы не требуем выполнения соотношений

$$\gamma^i_k = \Gamma^i_{kj} \cdot f^j \tag{21}$$

с одним и тем же "объектом связности" Γ^i_{kj} для всех обобщенно-аналитических функций. Более правильно говорить о паре $\{f^i, \gamma^i_k\}$, тогда аналитическая функция поличисловой переменной – это пара $\{f^i, 0\}$, но при переходе от специальной системы координат к другой криволинейной системе координат эта пара переходит в пару $\{f^i, \gamma^{i'}_{k'} \neq 0\}$.

Из определения обобщенно-аналитической функции следует

$$\widetilde{\bigtriangledown}_k f^i = p^i_{kj} \cdot f'^j \tag{22}$$

и

$$f'^j = \widetilde{\bigtriangledown}_1 f^i; \tag{23}$$

а обобщенные соотношения Коши-Римана приобретают вид

$$\widetilde{\bigtriangledown}_k f^j - p^i_{kj} \widetilde{\bigtriangledown}_1 f^j = 0. \tag{24}$$

Число неизвестных функций-компонент в паре $\{f^i, \gamma^i_k\}$ равно $n + n^2 = n(n+1)$ – больше, чем число $n(n-1)$ обобщенных соотношений Коши-Римана (24). Таким образом, чтобы использовать понятие обобщенно-аналитической функции для теоретико-физических построений, необходимо еще установить и сформулировать набор (возможно, только одно) требований, которые бы вместе с понятием обобщенно-аналитической функции однозначно приводили к уравнениям некоторого физически интерпретируемого поля. Обычно это n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для n независимых функций-компонент поля.

Если $\{f^i_{(1)}, \gamma^i_{(1)k}\}$ и $\{f^i_{(2)}, \gamma^i_{(2)k}\}$ – две обобщенно-аналитические функции, то их произвольная линейная комбинация с действительными коэффициентами α, β является обобщенно-аналитической функцией. Это следует непосредственно из определения, или из формул (22)-(24) и (20). Таким образом,

$$\alpha \cdot \{f^i_{(1)}, \gamma^i_{(1)k}\} + \beta \cdot \{f^i_{(2)}, \gamma^i_{(2)k}\} = \{\alpha \cdot f^i_{(1)} + \beta \cdot f^i_{(2)}, \alpha \cdot \gamma^i_{(1)k} + \beta \cdot \gamma^i_{(2)k}\}. \tag{25}$$

Рассмотрим поличисловое произведение двух обобщенно-аналитических функций $f^i_{(1)}$ и $f^j_{(2)}$:

$$f^k_{(3)} = f^i_{(1)} \cdot f^j_{(2)} \cdot p^k_{ij}. \tag{26}$$

Попытаемся найти такой объект $\gamma^i_{(3)k}$, чтобы пара $\{f^i_{(3)}, \gamma^i_{(3)k}\}$ являлась обобщенно-аналитической функцией. Для этого формально продифференцируем левую и правую части (26) по x^k и воспользуемся формулой (22), тогда

$$\frac{\partial f^i_{(3)}}{\partial x^k} + \gamma^i_{(3)k} = p^{i_1}_{kj} p^i_{i_1 i_2} f'^j_{(1)} f'^{j_2}_{(2)} + p^{i_2}_{kj} p^i_{i_1 i_2} f^{i_1}_{(1)} f'^j_{(2)}, \tag{27}$$

или, если учесть формулу

$$p^r_{im} \cdot p^m_{kj} = p^r_{km} \cdot p^m_{ij}, \tag{28}$$

которая следует из свойств ассоциативности и коммутативности поличисел,

$$\frac{\partial f^i_{(3)}}{\partial x^k} + \gamma^i_{(3)k} = p^i_{kj} p^j_{i_1 i_2} (f'^{i_1}_{(1)} f^{i_2}_{(2)} + f^{i_1}_{(1)} f'^{i_2}_{(2)}), \tag{29}$$

где

$$\gamma^i_{(3)k} = p^i_{i_1 i_2} \cdot (\gamma^{i_1}_{(1)k} f^{i_2}_{(2)} + f^{i_1}_{(1)} \gamma^{i_2}_{(2)k}). \tag{30}$$

Полученную формулу (29) можно записать, используя понятие абсолютного дифференциала, в виде

$$D[F_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X)] = [DF_{(1)}(X)] \cdot F_{(2)}(X) + F_{(1)}(X) \cdot [DF_{(2)}(X)] \tag{31}$$

или

$$D[F_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X)] = [F'_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X) + F_{(1)}(X) \cdot F'_{(2)}(X)] \cdot dX. \tag{32}$$

Из последней формулы следует соотношение

$$[F_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X)]' = F'_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X) + F_{(1)}(X) \cdot F'_{(2)}(X). \tag{33}$$

Остается выяснить вопрос, правильно ли преобразуется объект $\gamma^i_{(3)k}$ при переходе к произвольной системе координат. Для этого следует записать формулу (30) несколько иначе:

$$\gamma^i_{(3)k} = p^i_{i_1 i_2} \cdot (\gamma^{i_1}_{(1)k} f^{i_2}_{(2)} + f^{i_1}_{(1)} \gamma^{i_2}_{(2)k}) + (\Gamma^i_{km} p^m_{i_1 i_2} - \Gamma^m_{k i_1} p^i_{m i_2} - \Gamma^m_{k i_2} p^i_{i_1 m}) \cdot f^{i_1}_{(1)} f^{i_2}_{(2)}, \tag{34}$$

где $\Gamma^j_{im} \equiv 0$ в нашей специальной системе координат, но при переходе к произвольной системе координат Γ^j_{ik} преобразуются как обычные объекты связности и в общем случае $\Gamma^{j'}_{i'k'} \neq 0$. Условие $\Gamma^j_{ik} \equiv 0$ можно заменить более общим условием

$$\Gamma^i_{km} p^m_{i_1 i_2} - \Gamma^m_{k i_1} p^i_{m i_2} - \Gamma^m_{k i_2} p^i_{i_1 m} \equiv 0 \tag{35}$$

и даже считать три коэффициента Γ в формуле (35) разными. Можно ограничиться только таким классом обобщенно-аналитических функций, для которых

$$({}^{(1)}\Gamma^{i}_{km}p^{m}_{i_1i_2} - {}^{(2)}\Gamma^{m}_{ki_1}p^{i}_{mi_2} - {}^{(3)}\Gamma^{m}_{ki_2}p^{i}_{i_1m}) \cdot f^{i_1}_{(1)}f^{i_2}_{(2)} \equiv 0. \tag{36}$$

Если в специальной системе координат $\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(1)}\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(2)}\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(3)}\Gamma^i_{jk} \equiv 0$, то тензор p^k_{ij} в этой системе координат переносится "параллельно" без изменения компонент.

Таким образом, поличисловое произведение двух обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной есть обобщенно-аналитическая функция, а для производных имеет место формула (33), если считать, что тензор p^k_{ij} в специальной системе координат имеет "объекты связности" тождественно равные нулю по всем трем индексам. В терминах пар $\{f^i, \gamma^i_k\}$ поличисловое произведение двух обобщенно-аналитических функций запишется следующим образом:

$$\{f^{i_1}_{(1)}, \gamma^{i_1}_{(1)}\} \cdot \{f^{i_2}_{(2)}, \gamma^{i_2}_{(2)}\} = \{p^i_{i_1i_2}f^{i_1}_{(1)}f^{i_2}_{(2)}, p^i_{i_1i_2} \cdot (\gamma^{i_1}_{(1)k}f^{i_2}_{(2)} + f^{i_1}_{(1)})\gamma^{i_2}_{(2)k}\}. \tag{37}$$

Итак, полином или сходящийся ряд с действительными или поличисловыми коэффициентами от одной или нескольких обобщенно-аналитических функций есть обобщенно-аналитическая функция, причем для производной, которую мы обозначали штрихом, таких полиномов или таких рядов имеют место обычные правила дифференцирования, если тензор p^k_{ij} в специальной системе координат имеет "объекты связности", тождественно равные нулю по всем трем индексам.

Понятие "параллельного переноса" в теории обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной, где "объекты связности" или гамма-объекты для каждого тензора и, вообще говоря, для каждого индекса разные, лишено той геометрической простоты, которая имеет место для пространств аффинной связности и, в частности, римановых и псевдоримановых пространств. Но понятие абсолютного дифференциала и ковариантной производной легко обобщаются на основе инвариантности их записи в любой криволинейной системе координат. Ковариантная производная $\widetilde{\nabla}_k$ для произвольного тензора определяется аналогично тому, как определяется ковариантная производная ∇_k в пространствах аффинной связности, но теперь для каждого тензора и, возможно, для каждого индекса имеется, вообще говоря, свой "объект связности" или гамма-объект, а абсолютный дифференциал по определению

$$\widetilde{D} := dx^k \cdot \widetilde{\nabla}_k. \tag{38}$$

При этом нельзя игнорировать свернутые индексы, если им соответствуют разные "объекты связности".

Соотношения Коши-Римана (24) являются необходимыми и достаточными условиями того, что f^i является обобщенно-аналитической функцией. Покажем, что эти соотношения можно записать в явно инвариантном виде, если матрица, составленная из чисел

$$q_{ij} = p^r_{im}p^m_{rj}, \tag{39}$$

является невырожденной, то есть

$$q = \det(q_{ij}) \neq 0. \tag{40}$$

В этом случае матрица, обратная к матрице (q_{ij}), образует тензор (q^{ij}), обладающий свойствами

$$q_{jk}q^{ki} = q^{ik}q_{kj} = \delta^i_j. \tag{41}$$

Тогда из формулы (22) вместо формул (23) и (24) получим инвариантные выражения для производной

$$f'^i = q^{is} p^r_{sm} \widetilde{\bigtriangledown}_r \cdot f^m \tag{42}$$

и соотношений Коши-Римана

$$\widetilde{\bigtriangledown}_k f^i - p^i_{kj} \cdot q^{js} p^r_{sm} \widetilde{\bigtriangledown}_r f^m = 0. \tag{43}$$

Рассмотрим две обобщенно-аналитические функции $F_{(1)}(X)$ и $F_{(2)}(X)$, которые связаны соотношением

$$F_{(2)}(X) = F(X) \cdot F_{(1)}(X), \tag{44}$$

где $F(X)$ – некоторая функция поличисловой переменной. Она является обобщенно-аналитической в области, где функция $F_{(1)}(X)$ не является делителем нуля. В этом случае

$$F(X) = \frac{F_{(2)}(X)}{F_{(1)}(X)}, \tag{45}$$

$$\widetilde{D}F(X) = \frac{F_{(1)}(X)\widetilde{D}[F_{(2)}(X)] - \widetilde{D}[F_{(1)}(X)]F_{(2)}(X)}{F^2_{(1)}(X)} \tag{46}$$

или

$$F'(X) = \frac{F_{(1)}(X)F'_{(2)}(X) - F'_{(1)}(X)F_{(2)}(X)}{F^2_{(1)}(X)}. \tag{47}$$

Если

$$F(X) = F_{(2)}[F_{(1)}(X)], \tag{48}$$

то функция $F(X)$ является обобщенно-аналитической, причем

$$F'(X) = F'_{(2)}(F_{(1)}) \cdot F'_{(1)}(X). \tag{49}$$

3. Аналогичные геометрии и конформные преобразования

Нас интересует не просто пара $\{M_n, P_n\}$ и обобщенно-аналитические функции $\{f^i, \gamma^i_k\}$, а (в конечном счете) приложение этих понятий к построению физических моделей, решению физических задач. Два пространства, в которых конгруэнции экстремалей (геодезических) совпадают, во многом схожи. Под экстремалями мы понимаем решения системы уравнений для определения кривых, на которых длина кривой достигает экстремума, или кривые, которые в данной геометрии определяются как геодезические, например, геодезические в геометриях аффинной связности. Для ряда как физических, так и математических задач неважно, каков элемент длины в изучаемом пространстве – используются лишь система уравнений для определения экстремалей и сами экстремали. Будем говорить, что две n-мерные геометрии *аналогичны*, если существуют такие системы координат и параметры вдоль кривых, в которых уравнения для экстремалей в этих пространствах одинаковы, а начальные и/или граничные условия, определенные в одном пространстве, могут быть заданы и в другом.

Все множество обобщенно-аналитических функций можно разбить на подмножества $\{f^i, \Gamma^k_{ij}\}$, в каждом из которых объект связности Γ^k_{ij} один и тот же, то есть для всех обобщенно-аналитических функций из подмножества выполняется соотношение

$$\Gamma^i_{kj} f^j = \gamma^i_k, \tag{50}$$

причем (подчеркнем еще раз) коэффициенты Γ^k_{ij} не зависят от выбора функции из подмножества $\{f^i, \Gamma^k_{ij}\}$. Оно, вообще говоря, может состоять из одной обобщенно-аналитической функции. Если f^i и γ^i_k известны, то соотношения (50) можно рассматривать как систему уравнений для определения коэффициентов Γ^k_{ij}. После нахождения и фиксирования их как объектов связности для всех тензоров и всех индексов мы получаем возможность работать с пространством аффинной связности $L_n(\Gamma^k_{ij})$, в котором система уравнений для определения геодезических имеет вид

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2} = -\Gamma^i_{kj}\frac{dx^k}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}. \tag{51}$$

При этом мы, вообще говоря, теряем возможность использовать поличисловое произведение для построения новых обобщенно-аналитических функций или должны отказаться от простых правил дифференцирования (33). В последнем случае ковариантная производная $\widetilde{\nabla}_k$ и в специальной системе координат должна действовать на тензор p^i_{kj}. Чтобы на подмножестве $\{f^i, \Gamma^k_{ij}\}$ одновременно иметь поличисловое произведение обобщенно-аналитических функций и простые правила дифференцирования (33), которые дают опять обобщенно-аналитическую функцию, необходимо ограничиться функциями, удовлетворяющими условию (36) с $\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(1)}\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(2)}\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(3)}\Gamma^i_{jk}$.

Потребуем, чтобы пространство $L_n(\Gamma^i_{jk})$ было аналогично риманову или псевдориманову пространству $V_n(g_{ij})$, где g_{ij} – метрический (фундаментальный) тензор. Тогда вместо (50) получим систему уравнений

$$\left[\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathrm{g}_{jm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^m}\right) + \frac{1}{2}(p_k\delta^i_j + p_j\delta^i_k) + S^i_{kj}\right]\cdot f^j = \gamma^i_k, \tag{52}$$

где S^i_{kj} – некий произвольный тензор (тензор кручения), антисимметрический по двум нижним индексам, p_i – произвольный одноковариантный тензор [1]; которую можно использовать для определения фундаментального тензора g_{ij}.

Существуют такие финслеровы пространства, которые не являются римановыми или псевдоримановыми, но для которых система уравнений для определения геодезических(экстремалей) может быть записана в виде

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2} = -\Gamma^i_{kj}[L(dx;x)]\cdot\frac{dx^k}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}, \tag{53}$$

где коэффициенты $\Gamma^i_{kj}[L(dx;x)]$ определяются соответствующей метрической функцией $L(dx^1,\dots,dx^n;x^1\dots,x^n)$ финслерова пространства. Такие финслеровы пространства аналогичны пространствам аффинной связности с объектами связности Γ^i_{kj} отличающимися от коэффициентов $\Gamma^i_{kj}[L(dx;x)]$ возможно на аддитивный тензор кручения и/или аддитивный тензор $\frac{1}{2}(p_k\delta^i_j + p_j\delta^i_k)$ [1].

Пусть обобщенно-аналитические функции определяют пространства аффинной связности $L_n({}^{(1)}\Gamma^k_{ij})$ и $L_n({}^{(2)}\Gamma^k_{ij})$, аналогичные соответственно римановым или псевдоримановым пространствам $V_n(g_{ij})$ и $V_n(K_V^2 g_{ij})$ и/или финслеровым пространствам $F_n[L(dx;x)]$ и $F_n[K_F L(dx,x)]$, где $K_V(x^1,..,.x^n) > 0,\ K_F(x^1,...,x^n) > 0$ – скалярные функции (инварианты). Тогда преобразование (координатное и/или в пространстве обобщенно-аналитических функций), переводящее $f^i_{(1)}$ в $f^i_{(2)}$, можно назвать конформным, так как при этом

$$g_{ij}(x) \to K_V^2(x)\cdot g_{ij} \tag{54}$$

и

$$(dx;x) \to K_F(x)\cdot L(dx;x). \tag{55}$$

4. Возможные дополнительные требования

Из определения обобщенно-аналитической функции следует, что ее можно задать выбором двух произвольных одноконтравариантных полей $f^i(x^1, \ldots, x^n)$ и $f'^i(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда из формулы (23) следует выражение для гамма-объекта

$$\gamma^i_k = -\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + p^i_{kj} f'^j \tag{56}$$

Соотношения Коши-Римана при этом выполняются автоматически. Таким образом, чтобы получить уравнения поля для неизвестных функций-компонент $f^i(x^1, \ldots, x^n)$ и $f'^i(x^1, \ldots, x^n)$, необходимо, по крайней мере, $2n$ дополнительных соотношений, например, дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно $f^i(x^1, \ldots, x^n)$ и $f'^i(x^1, \ldots, x^n)$.

(1): Рассмотрим подмножество обобщенно-аналитических функций f^i, для которых

$$\tilde{D}F(x) \equiv 0, \ \leftrightarrow \ \tilde{\nabla}_k f^i \equiv 0, \ \leftrightarrow \ f'^i \equiv 0 \tag{57}$$

В этом случае условия Коши-Римана автоматически выполняются и произвольная вектор-функция в паре с $\gamma^i_k = -\frac{\partial f^i}{\partial x^k}$, то есть пара $\{f^i, -\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\}$, является обобщенно-аналитической. Важно отметить, что свойства поличисел никак при этом не участвуют. Иначе говоря, это подмножество (на уровне соотношений Коши-Римана) не зависит от выбора системы поличисел.

(2): Если потребовать выполнения вместо условий (57) соотношений

$$\tilde{D}F(X) = \lambda \cdot F(X) \cdot dX, \ \leftrightarrow \ \tilde{\nabla}_k f^i = \lambda \cdot p^i_{kj} \cdot f^j, \ \leftrightarrow \ f'^i = \lambda \cdot f^i, \tag{58}$$

где λ – некоторое действительное число, то пары $\{f^i, -\dfrac{\partial f^i}{\partial x^k} + \lambda p^i_{kj} f^j\}$ с произвольными вектор-функциями f^i будут составлять подмножество обобщенно-аналитических функций, некоторым образом учитывающих свойства поличисел.

(3): Дальнейшее обобщение требований (57), (58) можно сформулировать в виде

$$F'(X) = \Lambda \cdot F(X), \tag{59}$$

где

$$\Lambda = \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2 + ... + \lambda^n e_n \tag{60}$$

– произвольное поличисло. В этом случае обобщенно-аналитической функцией будет пара

$$\left\{ f^i, -\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + p^i_{kj} p^j_{mr} \lambda^m f^j \right\} \tag{61}$$

(4): Используя формулы (23) и (24), можно доказать следующее утверждение. Если выполняются соотношения:

$$1) \ \Gamma^i_{kj} f^j = \gamma^i_k, \tag{62}$$

$$2) \ \Gamma^i_{1j} p^j_{kr} - p^i_{kj} \Gamma^j_{1r} = 0, \tag{63}$$

$$3) \ \frac{\partial \Gamma^i_{1r}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kr}}{\partial x^1} + \left[(\Gamma^i_{kj} - p^i_{km} \Gamma^m_{1j}) \Gamma^j_{1r} - \Gamma^i_{1j} (\Gamma^j_{kr} - p^j_{km} \Gamma^m_{1r}) \right] = 0 \tag{64}$$

– то вместе с обобщенно-аналитической парой $\{f^i, \gamma^i_k\}$ пары

$$\{f'^i, \Gamma^i_{kj} f'^j\}, \{f''^i, \Gamma^i_{kj} f''^j\}, \ldots, \{f^{(m)i}, \Gamma^i_{kj} f^{(m)j}\}, \ldots \tag{65}$$

также будут обобщенно-аналитическими. В последней формуле использованы обозначения

$$f^{(m)i} \equiv \frac{\partial f^{(m-1)j}}{\partial x^1} + \Gamma^i_{1j} f^{(m-1)j}. \tag{66}$$

(5): Одним из дополнительных требований может быть условие того, чтобы для подмножества $\{f^i, \Gamma^i_{kj}\}$ обобщенно-аналитических функций нашлась риманова или псевдориманова геометрия $V_n(g_{ij})$, аналогичная геометрии аффинной связности $L_n(\Gamma^i_{jk})$.

(6): Если финслерово пространство $F_n[L(dx;x)]$ аналогично некоторому пространству аффинной связности, то одним из возможных требований может быть требование, чтобы подмножество $\{f^i, \Gamma^i_{jk}\}$ порождало геометрию аффинной связности аналогичную финслеровой геометрии $F_n[L(dx;x)]$.

(7): Пусть

$$x^i = x^i(\tau) \tag{67}$$

– параметрическое задание некоторой кривой, соединяющей две точки $x^i_{(0)} = x^i(0)$, $x^i_{(0)} = x^i(0)$, то есть параметр вдоль кривой изменяется в пределах $\tau \in [0;1]$. Рассмотрим функционал с интегрированием вдоль указанной кривой

$$\begin{aligned} I[x^i(\tau)] \;&=\; \int_0^1 F(X)\, dX = \left[\int_0^1 p^i_{kj} f^k(x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau)) dx^j\right] \cdot e_i \\ &=\; \left[\int_0^1 p^i_{kj} f^k \frac{dx^j}{d\tau}\right] \cdot e_i, \end{aligned} \tag{68}$$

где $F(X)$ – некоторая обобщенно-аналитическая функция. Потребуем независимость значения интеграла (68) от пути интегрирования, тогда вариация этого функционала при закрепленных концах кривых должна быть равна нулю, то есть должны выполняться уравнения Эйлера

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^i_{kj} f^j\right) - p^i_{mj} \frac{\partial f^j}{\partial x^k} \frac{dx^m}{d\tau} = 0, \tag{69}$$

или

$$\left(p^i_{kj} \frac{\partial f^j}{\partial x^m} - p^i_{mj} \frac{\partial f^j}{\partial x^k}\right) \cdot \frac{dx^m}{d\tau} = 0. \tag{70}$$

Считая, что $x^i(\tau)$ – произвольные гладкие функции, из этих уравнений получим

$$p^i_{kj} \frac{\partial f^j}{\partial x^m} - p^i_{mj} \frac{\partial f^j}{\partial x^k} = 0, \tag{71}$$

или, вспоминая, что $\{f^i, \gamma^i_k\}$ – обобщенно-аналитическая пара, получим

$$p^i_{kj} \gamma^i_m - p^i_{mj} \gamma^j_k = 0. \tag{72}$$

Из этих соотношений следует, что для функции f^i выполняются соотношения Коши-Римана для аналитических функций (11). Таким образом, требование независимости интеграла (68) от пути интегрирования приводит к тому, что функция $F(X)$ является аналитической, то есть такое требование является чрезмерным для нетривиального обобщения понятия аналитичности.

5. Случай H_4

С ассоциативно-коммутативными гиперкомплексными числами H_4 удобно работать в ψ-базисе, который связан с базисом

$$e_1 = 1, e_2 = j, e_3 = k, e_4 = jk, \qquad j^2 = k^2 = (jk)^2 = 1 \tag{73}$$

линейной зависимостью

$$e_i = s_i^j \cdot \psi_j, \tag{74}$$

где

$$s_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s_i^k \cdot s_k^j = 4 \cdot \delta_i^j. \tag{75}$$

Для базисных элементов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ закон умножения

$$\psi_i \cdot \psi_j = p_{ij}^{(\psi)k} \cdot \psi_k \tag{76}$$

содержит характеристические числа

$$p_{ij}^{(\psi)k} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{77}$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$X = x^1 e_1 + ... + x^4 e_4 = \xi^1 \psi_1 + ... + \xi^4 \psi_4 \tag{78}$$

и

$$F(X) = \varphi^1(\xi^1, ..., \xi^4) \cdot \psi_1 + \varphi^4(\xi^1, ..., \xi^4) \cdot \psi_4. \tag{79}$$

Таким образом, если $\varphi^i(\xi^1, ..., \xi^4)$ – обобщенно-аналитическая функция от используемой H_4-переменной, то найдется такая вектор-функция $\varphi'^i(\xi^1, ..., \xi^4)$, что

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^k} + \gamma_k^{(\psi)i} = p_{kj}^{(\psi)i} \cdot \varphi'^j. \tag{80}$$

Учитывая (77), получим

$$\left.\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^1} + \gamma_1^{(\psi)1} = \varphi'^1, & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^2} + \gamma_2^{(\psi)1} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^3} + \gamma_3^{(\psi)1} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^4} + \gamma_4^{(\psi)1} = 0, \\
\dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^1} + \gamma_1^{(\psi)2} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^2} + \gamma_2^{(\psi)2} = \varphi'^2, & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^3} + \gamma_3^{(\psi)2} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^4} + \gamma_4^{(\psi)2} = 0, \\
\dfrac{\partial \varphi^3}{\partial \xi^1} + \gamma_1^{(\psi)3} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial \xi^2} + \gamma_2^{(\psi)3} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial \xi^3} + \gamma_3^{(\psi)3} = \varphi'^3, & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial \xi^4} + \gamma_4^{(\psi)3} = 0, \\
\dfrac{\partial \varphi^4}{\partial \xi^1} + \gamma_1^{(\psi)4} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^4}{\partial \xi^2} + \gamma_2^{(\psi)4} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^4}{\partial \xi^3} + \gamma_3^{(\psi)4} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^4}{\partial \xi^4} + \gamma_4^{(\psi)4} = \varphi'^4.
\end{array}\right\} \tag{81}$$

Эти соотношения содержат выражение для производной

$$\varphi'^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^{i_-}} + \gamma_{i_-}^{(\psi)i} \tag{82}$$

($i = i_-$, но по ним нет суммирования), а также – соотношения Коши-Римана

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^k} + \gamma_k^{(\psi)i} = 0, \ i \neq k. \tag{83}$$

Пространство H_4 является метрическим (финслеровым) пространством, в котором элемент длины ds выражается через форму $d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4$ в конической области определения, которую (область) можно задать по-разному. Будем считать, что

$$ds = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}, \tag{84}$$

причем коническая область определения задается неравенствами

$$d\xi^1 \geq 0, \ d\xi^2 \geq 0, \ d\xi^3 \geq 0, \ d\xi^4 \geq 0 \ . \tag{85}$$

Рассмотрим четырехмерную финслерову геометрию с элементом длины вида

$$ds = \sqrt[4]{\kappa^4 \cdot d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}, \tag{86}$$

где $\kappa \equiv \kappa(d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4) > 0$. Такая геометрия не является римановой или псевдоримановой. Покажем, что она аналогична (согласно введенной выше терминологии) некоторой геометрии аффинной связности $L_4(\Gamma^i_{kj})$. Запишем уравнения для экстремалей этого финслерова пространства, используя тангенциальное уравнение индикатрисы [2]:

$$\Phi(p_1, ..., p_4; \xi^1, ..., \xi^4) = 0 \ , \tag{87}$$

где

$$\Phi(p; \xi) = p_1 p_2 p_3 p_4 - \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4 \ , \tag{88}$$

и

$$p_i = \frac{\partial (ds)}{\partial (d\xi^i)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt[4]{\kappa^4 \cdot d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4}}{d\xi^i}. \tag{89}$$

Тогда система уравнений для определения экстремалей будет иметь вид

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{d\xi^1}{\frac{\partial \Phi}{\partial p_1}} = ... = \dfrac{d\xi^4}{\frac{\partial \Phi}{\partial p_4}} = \dfrac{dp_1}{-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1}} = ... = \dfrac{dp_4}{-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^4}}, \\ \Phi(p, \xi) = 0; \end{array}\right\} \tag{90}$$

или

$$d\xi^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda \cdot d\tau, \ dp_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \cdot \lambda \cdot d\tau, \ \ \Phi(p; \xi) = 0, \tag{91}$$

где τ – параметр вдоль экстремали, а $\lambda \equiv \lambda(p; \xi) \neq 0$ – некоторая функция. Для тангенциального уравнения индикатрисы (87), (88) система уравнений (91) принимает вид

$$\dot{\xi^i} = \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{p_i} \cdot \lambda, \quad \dot{p^i} = (\frac{1}{4})^4 \frac{\partial k^4}{\xi^i} \cdot \lambda, \quad p_1 p_2 p_3 p_4 = \left(\frac{k}{4}\right)^4, \tag{92}$$

где

$$\dot{\xi^i} = \frac{d\xi^i}{d\tau}, \ \ \dot{p_i} = \frac{dp_i}{d\tau}. \tag{93}$$

Будем считать, что $\lambda = \lambda(\xi) > 0$ – функция только координат. Тогда, исключая из системы уравнений p_i, получим систему уравнений для определения экстремалей в финслеровом пространстве (86) в виде

$$\ddot{\xi^i} = -\Gamma^i_{kj}\ \dot{\xi^k}\dot{\xi^j}, \tag{94}$$

где

$$\Gamma^i_{kj} = -\begin{cases} \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^j}, & \text{если } i = j = k, \\ \delta^i_k \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^j}, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{95}$$

$$\sigma = \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4 \cdot \lambda, \tag{96}$$

λ_0 и σ_0 – постоянные соответствующих размерностей. Выпишем явно коэффициенты Γ^i_{kj}:

$$(\Gamma^1_{kj}) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{97}$$

$$(\Gamma^2_{kj}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{98}$$

$$(\Gamma^3_{kj}) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{99}$$

$$(\Gamma^4_{kj}) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^4} \end{pmatrix}. \tag{100}$$

Заметим, что вместо матриц (97) – (100) можно взять транспонированные им. Итак, финслерова геометрия с элементом длины (86) аналогична геометрии аффинной связности $L_4[\Gamma^i_{kj}+S^i_{kj}+\frac{1}{2}(p_k\delta^i_j+p_j\delta^i_k)]$, где S^i_{kj} – произвольный антисимметричный по двум нижним индексам тензор, а p_k – произвольный одноковариантный тензор.

Рассмотрим обобщенно-аналитические функции φ^i от H_4-переменной, которые удовлетворяют дополнительному условию 3), то есть рассмотрим пару

$$\left\{\varphi^i, -\frac{\partial\varphi^i}{\partial\xi^k}+p^{(\psi)i}_{kj}\mu^j\varphi^j\right\} \tag{101}$$

где

$$\Lambda=\lambda^i\cdot e_i=\mu^j\cdot\psi_j. \tag{102}$$

Выделим из таких пар подмножество $\{\varphi^i,\Gamma^i_{kj}\}$, где Γ^i_{kj} определяются матрицами, транспонированными к матрицам (97) – (100). Тем самым будет выполняться дополнительное требование 6). Тогда пара (101) должна удовлетворять 16-ти соотношениям (50), из которых первые четыре есть:

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^1}=\mu^1\varphi^1+\frac{\partial\, ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial\xi^1}\varphi^1,\qquad \frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^2}=\frac{\partial\, ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial\xi^2}\varphi^1, \tag{103}$$

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^3}=\frac{\partial\, ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial\xi^3}\varphi^1,\qquad \frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^4}=\frac{\partial\, ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial\xi^4}\varphi^1.$$

Для того, чтобы эта система была совместной, необходимо и достаточно равенство смешанных производных, полученных с помощью формул (103). Часть этих условий удовлетворяется автоматически, кроме трех. Если не ограничиваться первыми четырьмя уравнениями, а рассмотреть все 16, то получим 12 условий:

$$\frac{\partial^2 ln\left(\dfrac{\kappa}{\kappa_0}\right)^4}{\partial\xi^i\xi^j}=0,\ i\neq j; \tag{104}$$

откуда следует, что

$$ln\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^4=a_1(\xi^1)+a_2(\xi^2)+a_3(\xi^3)+a_4(\xi^4) \tag{105}$$

или

$$\kappa=\kappa_0\cdot exp\{[a_1(\xi^1)+a_2(\xi^2)+a_3(\xi^3)+a_4(\xi^4)]/4\}, \tag{106}$$

где a_i – четыре произвольные функции одного действительного аргумента. Тогда из уравнений (103) и соответствующих уравнений для других компонент обобщенно-аналитической функции получим

$$\varphi^i=\varphi^i_{(0)}\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^4\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)b_i(\xi^{i-})\cdot exp(\mu^{i-}\xi^i), \tag{107}$$

где

$$a_i(\xi^{i-})=ln\left|b_i(\xi^{i-})\right|. \tag{108}$$

Таким образом, несмотря на два дополнительных требования, обобщенно-аналитическая функция (107) в общем случае не сводится к аналитической функции

H_4-переменной, и, кроме того, мы получили выражение (106) для коэффициента κ в метрической функции финслерова пространства с элементом длины (86). Если $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^4$, то φ^i – аналитическая функция.

Если
$$\kappa = \kappa_0 \cdot exp\{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + (\xi^4)^2]/4\}, \tag{109}$$
то в координатах x^i
$$\kappa = \kappa_0 \cdot exp\{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\}. \tag{110}$$

Заключение

Введенное в данной работе понятие обобщенно-аналитической функции поличисловой переменной является первым шагом в построении соответствующей теории, а затем применении ее для построения теоретико-физических моделей. Важной составной частью таких исследований должен быть поиск дополнительных требований, которым должны удовлетворять обобщенно-аналитические функции, и тех следствий, к которым эти требования приводят. Особо следует выделить те требования, которые приводят к тривиальному результату – аналитическим функциям. Это позволит сформулировать те свойства, которыми собственно обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной (в отличие от аналитических функций той же переменной) не могут обладать. Как показано выше, к таким свойствам относится независимость интеграла обобщенно-аналитической функции от пути интегрирования. Конечно, необходимо провести подробный сравнительный анализ свойств аналитических функций комплексной переменной и обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной размерности больше, чем два. Проведенные в настоящей работе построения и некоторые результаты позволяют надеяться, что понятие обобщенно-аналитической функции поличисловой переменной, а также понятие аналогичных геометрий, могут быть востребованы в теоретической физике.

Литература

[1] П. К. Рашевский: *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Наука, М. 1967.

[2] П. К. Рашевский: *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, ОГИЗ, М.-Л. 1947.