СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОММУТАТИВНО-АССОЦИАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ H_3 И H_4

С. В. Лебедев

НИИ прикладной математики и механики МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5
leb@edu.bmstu.ru

В первой части работы действительная ось пространства, ассоциированного с алгеброй H_3, и параллельные этой оси прямые интерпретируются как мировые линии покоящихся частиц; для введения расстояния между действительной осью и параллельной ей прямой используется поверхность одновременности. Задание на этой поверхности системы координат, аналогичной полярной, позволяет указать ее простейшие инвариантные преобразования. Во второй части преобразования Лоренца представлены в виде поворотов специального вида в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_4.

Введение

Алгебры H_3 и H_4 принадлежат к коммутативно-ассоциативным алгебрам типа H_n, которые наиболее просты по своей структуре. Алгебры такого вида характеризуются тем, что в них существует выделенный базис, в котором операция умножения чисел осуществляется покомпонентно – так же, как и операция сложения в произвольных алгебрах. С другой стороны, в алгебрах вида H_n, которые могут быть названы гиперболическими, алгебры H_3 и H_4 следуют непосредственно за алгебрами действительных (H_1) и двойных (H_2) чисел, которые обладают важными для их физического применения свойствами [6, 11]. Выскажем предположение о "наследовании" этих свойств рассматриваемыми алгебрами третьей и четвертой размерности. В качестве обоснования этого предположения напомним о связи рассматриваемой в финслеровом обобщении теории относительности метрики Бервальда-Моора с алгеброй H_4 [1]. С точки зрения возможных приложений гиперболическая алгебра H_4 наиболее перспективна в силу топологической выделенности пространств размерности $n = 4$ [7]. Однако алгебра H_3 обладает одним несомненным преимуществом. В трехмерном метрическом пространстве, ассоциированном с этой алгеброй, в полной мере возможно применение компьютерной визуализации и анимации фигур, поверхностей и линий. Хотя аналитические возможности такого применения не стоит переоценивать, оно придает особую наглядность геометрическим свойствам этого пространства. Поэтому предлагаемый в первой части работы достаточно общий подход к физической трактовке свойств гиперболических пространств излагается на примере пространства, ассоциированного с алгеброй H_3. Ее свойства задают в ассоциированном пространстве куб нормы вида

$$|A|^3 = |a^1 a^2 a^3|,$$

где a^i – компоненты вектора в выделенном базисе, составленном из трех чисел e_i, где $i = 1, 2, 3$, со свойствами $(e_i)^2 = e_i$, $e_i \cdot e_j = 0$ при $i \neq j$. Действительные числа на прямой можно разделить на два разряда: расположенные справа от нуля положительные числа и расположенные слева от нуля отрицательные. В алгебре двойных чисел две изотропные прямые делят псевдоевклидову плоскость на 2^2 квадрантов. Аналогично этому рассматриваемое ассоциированное пространство разделяется на 2^3 октантов, и для всех чисел, соответствующих точкам одного октанта, характерно одно и то же сочетание знаков компонент в выделенном базисе. Границами октантов являются три изотропных плоскости с уравнениями $a^i = 0$, где $i = 1, 2, 3$. Отметим также, что поскольку гиперболические алгебры являются алгебрами с единицей, определяемой выражением

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n,$$

то два октанта рассматриваемого пространства являются выделенными. Это – октанты, содержащие 1 и -1; они характеризуются числами со всеми положительными или отрицательными компонентами соответственно.

Использование рассматриваемых алгебр требует наличия евклидовых или псевдоевклидовых свойств. В ряду алгебр: алгебра Дирака [2], кватернионов [3], бикватернионов [5] – существование таких свойств обеспечивает классический вид нормы числа. Однако количество таких алгебр незначительно, а среди коммутативно-ассоциативных алгебр к таковым относится (кроме комплексных чисел) только алгебра двойных чисел, в которой квадрат нормы числа имеет следующий вид [4]:

$$|A|^2 = |(a^1)^2 - (a^2)^2|.$$

Другую возможность для обнаружения в пространствах, ассоциированных с рассматриваемыми алгебрами, свойств, которые сходны со свойствами евклидовых или псевдоевклидовых пространств, дает метод хроногеометрии [8], [12]; использование этого метода применительно к H_3 рассматривается в первой части работы. Еще одна возможность для обнаружения искомых свойств дает применение ассоциированной с алгеброй симметричной полилинейной формы [9], имеющей, например, для алгебры H_3 следующий вид:

$$(A, B, C) = \frac{1}{3!}(a^1b^2c^3 + \cdots + a^3b^2c^1).$$

С такой возможностью применительно к алгебре H_4 связана вторая часть настоящей работы, где форма, имеющая вид псевдоевклидовой метрики, определяется при помощи полилинейной формы от четырех векторов.

1. Поверхность одновременности в коммутативно-ассоциативных алгебрах (на примере H_3)

1.1. *Аксиоматика*

В основу физической интерпретации свойств рассматриваемого класса алгебр положим следующие положения, играющие роль аксиом:

1. Число алгебры можно связать с некоторым пространственно-временным событием.

2. Действительная ось пространства, направление которой задается единицей алгебры, трактуется как ось времени, а норма числа интерпретируется как интервал собственного времени наблюдателя, мировая линия которого совпадает с вектором, соответствующим данному числу.

3. Увеличение относительной скорости частицы или сигнала выражается в увеличении наклона касательной к мировой линии частицы в данной точке к мировой

линии наблюдателя, а покоящиеся материальные точки имеют в качестве мировых линий прямые, параллельные линии наблюдателя.

4. Световые сигналы, обладающие максимальной скоростью, связываются с изотропными гиперповерхностями алгебры; скорость световых сигналов полагается не зависящей от направления их распространения. В соответствии с этими положениями аналогами конусов будущего и прошлого пространства Минковского в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_3, являются два упомянутых выше выделенных октанта с 1 и -1 соответственно. В отличие от пространства Минковского, в рассматриваемом пространстве область за пределами этих конусов также обладает изотропными направлениями, поскольку состоит из шести боковых конусов. В этой работе ограничимся наиболее простым частным случаем, когда мировая линия наблюдателя совпадает с действительной осью.

1.2. *Экспоненциальная форма представления числа алгебры H_3 в базисе* $(1, j, k)$

В выделенном базисе любое число представляется в виде:

$$A = a^1 \cdot e_1 + a^2 \cdot e_2 + a^3 \cdot e_3.$$

Для экспоненциальной функции в этом базисе имеет место формула:

$$\exp(a^1 \cdot e_1 + a^2 \cdot e_2 + a^3 \cdot e_3) = \exp(a^1) \cdot e_1 + \exp(a^2) \cdot e_2 + \exp(a^3) \cdot e_3. \tag{1}$$

Поскольку в рассматриваемой алгебре справедливо $|A|^3 = |a^1 a^2 a^3|$, то число с $a^i > 0$ представимо в виде

$$A = |A| \cdot \exp(b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3)$$

с условием

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0, \tag{2}$$

из которого вытекает тождество:

$$|\exp(b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3)| = 1.$$

Перейдем в другой базис алгебры, составленный из векторов:

$$\begin{cases} 1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ j = \sin\varphi_0 \cdot e_1 + \sin(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot e_2 + \sin(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot e_3 \\ k = \cos\varphi_0 \cdot e_1 + \cos(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot e_2 + \cos(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot e_3 \end{cases} \tag{3}$$

Этот базис составляют взаимно ортогональные (в привычном евклидовом смысле) векторы, а произвольный параметр φ_0 можно в определенном смысле трактовать как угол совместного поворота пары векторов j, k вокруг действительной оси. Если t, x, y – координаты числа в новом базисе, то в соответствии с правилами преобразования компонент числа при переходе к другому базису имеем систему:

$$\begin{cases} a^1 = t + \sin\varphi_0 \cdot x + \cos\varphi_0 \cdot y \\ a^2 = t + \sin(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot x + \cos(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot y \\ a^3 = t + \sin(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot x + \cos(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot y \end{cases} \tag{4}$$

откуда следует, что $t = (a^1 + a^2 + a^3)/3$. Поэтому в силу (2) число, представимое в экспоненциальной форме, в базисе (1,j,k) имеет вид:

$$A = |A| \cdot e^{\alpha \cdot j + \beta \cdot k}.$$

Если модифицировать это экспоненциальное представление, введя обозначение $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, то получим

$$A = |A| \cdot e^{\rho(\cos\varphi \cdot j + \sin\varphi \cdot k)}. \tag{5}$$

Таким образом, согласно (5), число при таком представлении задается тремя параметрами: нормой числа $|A|$, "радиальной координатой" ρ и "угловой координатой" φ. Покомпонентная запись для (5) с учетом (1) и (3) имеет простой и красивый вид:

$$\begin{cases} a^1 = |A| \cdot \exp(\rho \sin[\varphi_0 + \varphi]) \\ a^2 = |A| \cdot \exp(\rho \sin[\varphi_0 + 2\pi/3 + \varphi]) \\ a^3 = |A| \cdot \exp(\rho \sin[\varphi_0 + 4\pi/3 + \varphi]) \end{cases}$$

1.3. *Метод задания расстояния между действительной осью и параллельной ей прямой*

Для определения расстояния между мировыми линиями покоящихся частиц (одна из которых лежит на действительной оси) используем метод хроногеометрии. Рассмотрим обмен сигналами постоянной скорости $\nu \le c$; для простоты точки-события испускания сигнала и приема обратного сигнала расположим симметрично на действительной оси относительно нулевого момента времени. Полагая в силу равенства скорости прямого и обратного сигналов равенство длин $|B - A_1| = |A_2 - B|$, получим:

$$(a^1 + T)(a^2 + T)(a^3 + T) = (T - a^1)(T - a^2)(T - a^3),$$

где $a^i + T > 0, T - a^i > 0$, что после раскрытия скобок дает:

$$(a^1 + a^2 + a^3) \cdot T^2 + a^1 a^2 a^3 = 0. \tag{6}$$

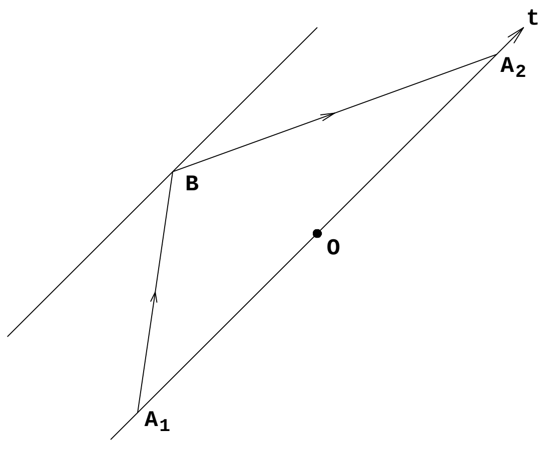

Рис. 1: Измерение расстояния между мировыми линиями путем обмена досветовыми сигналами.

Множество точек-событий, удовлетворяющих уравнению (6), образуют поверхность одновременности: для наблюдателя на действительной оси, находящегося в точке с координатой T, все эти события происходят в один и тот же нулевой момент времени. Поверхности одновременности принадлежит точка $A = (0, 0, 0)$, а плоскость, касательная к этой поверхности в начале координат, имеет уравнение:

$$a^1 + a^2 + a^3 = 0. \tag{7}$$

Подстановка (4) в (6) позволяет получить уравнение поверхности одновременности в форме зависимости времени прохождения сигнала (по часам неподвижного наблюдателя) T от введенных координат $\{t, x, y\}$ точки поверхности одновременности:

$$T^2 = \frac{1}{12}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}\left\{t^2 + \frac{1}{t}\left[\frac{3}{4}xy(y \cdot \sin 3\varphi_0 - x \cdot \cos 3\varphi_0)\right.\right.$$
$$\left.\left. + x^3 \sin\varphi_0 \sin(\varphi_0 + 2\pi/3) \sin(\varphi_0 + 4\pi/3) + y^3 \cos\varphi_0 \cos(\varphi_0 + 2\pi/3) \cos(\varphi_0 + 4\pi/3)\right]\right\}.$$

Согласно этому уравнению (и аналогичным уравнениям для других алгебр, в частности, алгебры H_4) первые слагаемые в правой части имеют евклидову форму, и при их доминировании над оставшимися слагаемыми квадрат времени прохождения сигнала линейно зависит от квадрата евклидова расстояния в пространстве мировых линий, что может представлять ценность для дальнейших физических интерпретаций.

1.4. *Система криволинейных координат поверхности одновременности и преобразования, переводящие ее саму в себя*

Учитывая важность инвариантных преобразований в современной физике, коснемся кратко темы нахождения преобразований, переводящих поверхность одновременности саму в себя. Введем на этой поверхности двухмерную систему координат $\{\rho, \varphi\}$, в чем-то аналогичную полярной системе координат на двухмерной плоскости, а именно:

$$\begin{cases} a^1 = (T - \rho) \cdot e^{R(\rho,\varphi)\sin(\varphi_0+\varphi)} - T, \\ a^2 = (T - \rho) \cdot e^{R(\rho,\varphi)\sin(\varphi_0+2\pi/3+\varphi)} - T, \\ a^3 = (T - \rho) \cdot e^{R(\rho,\varphi)\sin(\varphi_0+4\pi/3+\varphi)} - T, \end{cases} \tag{8}$$

где зависимость $R = R(\rho, \varphi)$ находится из трансцендентного уравнения, получаемого подстановкой координат (8) в (6):

$$\bar{Z}^3 - \bar{Z}^2\left[e^{-R\sin(\varphi_0+\varphi)} + e^{-R\sin(\varphi_0+2\pi/3+\varphi)} + e^{-R\sin(\varphi_0+4\pi/3+\varphi)}\right]$$
$$+2\bar{Z}\left[e^{R\sin(\varphi_0+\varphi)} + e^{R\sin(\varphi_0+2\pi/3+\varphi)} + e^{R\sin(\varphi_0+4\pi/3+\varphi)}\right] - 4 = 0,$$

где $\bar{Z} = (T - \rho)/T$.

В окрестности нуля при $a^1, a^2, a^3 \ll 1,\ R \ll 1,\ \rho \ll 1$ уравнения (8) упрощаются:

$$\begin{cases} a^1 \cong R \cdot T \cdot \sin(\varphi_0 + \varphi), \\ a^2 \cong R \cdot T \cdot \sin(\varphi_0 + 2\pi/3 + \varphi), \\ a^3 \cong R \cdot T \cdot \sin(\varphi_0 + 4\pi/3 + \varphi), \end{cases}$$

так что

$$a^1 + a^2 + a^3 \cong 0 \text{ и } (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \cong (R \cdot T)^2. \tag{9}$$

Таким образом, согласно (9), система координат (8) выделена: *в окрестности нуля параметр R пропорционален евклидовому расстоянию от точки, расположенной на поверхности одновременности, до центра этой поверхности, в котором $R = 0$.*

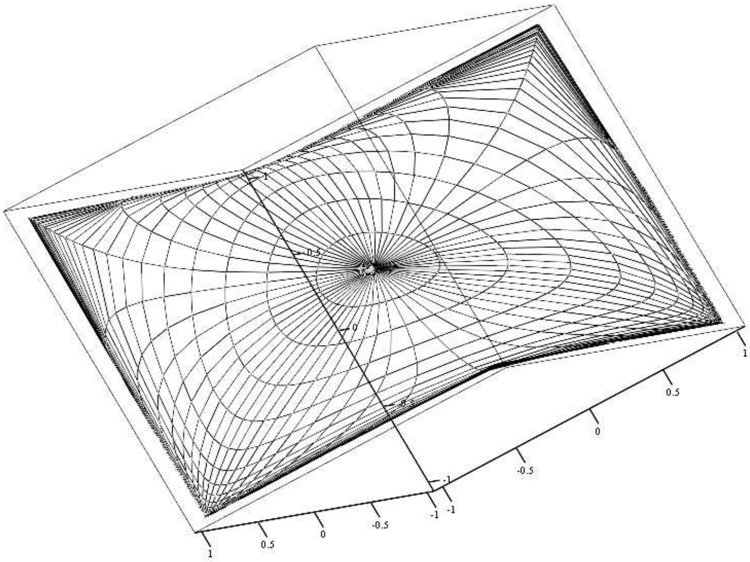

Рис. 2: Криволинейная система координат ρ, ϕ на поверхности одновременности.

Тогда искомые независимые преобразования поверхности одновременности есть "повороты" на угол $\Delta\varphi(\varphi \to \varphi + \Delta\varphi)$ и "преобразования подобия" с коэффициентом $K(\rho \to K \cdot \rho)$.

2. Представление преобразований Лоренца поворотами в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_4

Поступая по аналогии с [10], определим скалярное произведение двух произвольных (с положительными значениями компонент) векторов A и B рассматриваемого пространства при помощи симметричной четырехформы пространства H_4 следующим образом:

$$(A, B) := \frac{(A, A, B, B)}{|A| \cdot |B|}.$$

Скалярное произведение двух векторов удовлетворяет свойствам положительности, однородности и нормированности:
1. $(A, B) > 0$;
2. $(kA, B) = (A, kB) = k(A, B)$;
3. $(A, A) = |A|^2$.

Скалярное произведение единичных векторов $a = A/|A|$ и $b = B/|B|$ может рассматриваться как угловая характеристика, определяющая связь двух задаваемых этими векторами направлений – оно выражается через компоненты частного этих векторов ($d = b/a$):

$$(a, b) = (d_1 d_2 + d_1 d_3 + \ldots d_3 d_4)/6. \tag{10}$$

Рассмотрим в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_4, базис, состоящий из векторов:

$$\begin{cases} 1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ j' = 3e_1 - e_2 - e_3 - e_4, \\ k' = \sqrt{2}(2e_2 - e_3 - e_4), \\ l' = \sqrt{6}(e_3 - e_4). \end{cases}$$

Обозначая координаты отношения двух рассматриваемых векторов в новом базисе через t_d, x_d, y_d, z_d и выражая (10) через эти компоненты, получим:

$$(a,b) = t_d^2 - x_d^2 - y_d^2 - z_d^2.$$

Назовем *поворотом* вектора B вокруг вектора A нелинейное преобразование ассоциируемого с алгеброй H_4 четырехмерного пространства, оставляющее неподвижными все векторы в направлении, задаваемом вектором A, и сохраняющее введенное скалярное произведение. Таким образом, в дополнение к другим представлениям группы Лоренца [13] может использоваться представление поворотами вокруг произвольной времениподобной оси в пространстве, связанном с алгеброй H_4.

Результаты и выводы

Метод определения расстояний между мировыми линиями, предложенный для пространства, связанного с коммутативно-ассоциативной алгеброй H_3 (или H_4), позволяет выделить "евклидову составляющую".

Получена новая геометрическая интерпретация преобразований Лоренца как поворотов в пространстве, связанном с алгеброй H_4. Возможно произвольное задание оси поворота; сказанное позволяет надеяться на применение такой новой интерпретации в релятивистской физике.

Литература

[1] G. S. Asanov: *Finsler geometry, relativity and gauge theories*, Reidel, Dordrecht 1985.

[2] D. Hestenes: *Space-time algebra*, Gordon and Breach, N. Y. 1966.

[3] А. В. Березин, Ю. А. Курочкин и Е. А. Толкачев: *Кватернионы в релятивистской физике*, Наука и техника, Минск 1989.

[4] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников: *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.

[5] В. В. Кассандров: *Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика*, Изд-во Российского Университета Дружбы Народов, М. 1992.

[6] М. А. Лаврентьев и Б. О. Шабат: *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, М. 1977.

[7] Р. В. Михайлов: *О некоторых вопросах 4-мерной топологии: обзор современных исследований*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[8] Д. Г. Павлов: *Хронометрия трехмерного времени*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[9] Д. Г. Павлов: *Обобщение аксиом скалярного произведения*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[10] D. G. Pavlov: *Non-linear Relativistic Invariance for Quadrahyperbolic Numbers*, arXiv:gr-qc/0212090.

[11] П. К. Рашевский: *Введение в риманову геометрию и тензорный анализ*, Гостехиздат, М. 1965.

[12] Дж. Синг: *Общая теория относительности*, Ин. Лит., М. 1963.

[13] Ф. И. Федоров: *Группа Лоренца*, Наука, М. 1979.