

ФИНСЛЕРОВИД – ПРОСТРАНСТВО, СНАБЖЕННОЕ УГЛОМ И СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Г. С. Асанов

*Кафедра Теоретической Физики, Московский Государственный Университет
asanov@newmail.ru*

Наука прошедшего столетия "сняла" тот ближайший успех, который возможно было достигнуть на основе геометрически-квадратичных представлений, как логически и математически простейших. Более глубокие истины требуют использования более емких геометрий, таких как финслерова. Она вносит структурность в геометрию, поскольку индикатриса уже не изотропна по всем направлениям. Возникающие при финслеровом обобщении трудности с обобщением геометрических понятий решаются в настоящей работе путем рассмотрения Финслероид-геометрии. Такая геометрия вводит одно выделенное направление, предполагая полную аксиальную симметричность вокруг него. При этом, открываются конструктивные пути введения угла и скалярного произведения вне рамок евклидовой геометрии.

"Евклидовы традиции слишком сильны, чтобы от них можно было бы легко отрешиться, и понадобится, быть может, работа нескольких поколений математиков, чтобы освободиться от их гнета." (Буземан [2], с. 8.)

Введение

Квадратичный метод наиболее прост для введения длины вектора. Согласно этому методу, длина определяется квадратным корнем из квадратичной формы. Основанные на нем евклидова геометрия и евклидовы вращения служили более 20 столетий для математических построений, обработки и предсказаний результатов экспериментов. Неквадратичные методы развиваются финслеровой геометрией (см. [1–6]).

К сожалению приходится констатировать, что изучению соответствующих возможностей в литературе не было уделено достаточного внимания. Традиционно идеи и уравнения математики и теоретической физики основываются на методе введения длины векторов с помощью квадратичного корня. И даже многочисленные интересные и глубокие критические исследования (см., например, монографии [7, 8]) геометрической структуры самого пространства-времени и возможностей ее переосмысления и обобщения как правило обходились без упоминаний существования идей и методов финслеровой геометрии. Несмотря на чувство высокой степени адекватности и точности совпадения, неясно, как можно было бы выразить эту степень точности в числах, – ведь евклидовы вращения не содержат малого параметра для оценок.

По сравнению с обычной евклидовой метрикой финслерова метрика вносит *структурность* в геометрию. Единичная поверхность евклидовой геометрии, сфера, изотропна по всем направлениям. Введение геометрически выделенных направлений приводит к обобщению сферы, а вслед за этим и к обобщению евклидовой геометрии. Соответствующая, более не изотропная, поверхность концов единичных

векторов (выходящих из фиксированной точки) порождает финслерову метрику. Обрато, подобные геометрии могут отражать те конкретные физические ситуации, в которых присутствует соответствующая анизотропия по направлениям. Метрика Бервальда-Моора максимально анизотропна, – в том смысле, что она предполагает наличие геометрически-выделенных направлений, по числу равных размерности пространства (соответственно трех в трехмерном случае и четырех в четырехмерном случае). Финслероид-геометрия вводит ровно одно выделенное направление, предполагая полную аксиальную симметричность вокруг него.

Априори вопрос о том, как обобщать евклидову метрическую функцию на финслеров случай, выглядит чрезмерно общим и весьма неясным для нахождения конкретного ответа. Если же однако подойти к проблеме с точки зрения инвариантности и возможности ввести угол и скалярное произведение, то открываются конструктивные пути выделения классов финслеровых пространств. В результате возникают методы выхода за рамки евклидовой геометрии.

Конечно, как бы ни было глубоко мотивировано стремление выйти за узкие границы "квадратичных представлений", речь не может идти о "полном преодолении квадратного корня". Иерархия геометрий глубоко коренится в обобщениях. Очевидно, что в Римановой геометрии присутствуют и работают идеи и методы Евклидовой геометрии. В работах по Финслеровой геометрии многие авторы использовали "ассоциируемую риманову геометрию", вводили "риманову связность" или "финслер-риманову связность", вводили "ассоциируемую относительную риманову геометрию вдоль векторных полей", строили "соприкасающееся риманово пространство" и "риманову развертку финслерова пространства вдоль кривой", и т. п. Одновременно в Пространствах Минковского постоянно использовали ассоциируемую Евклидову геометрию.

Можно сказать, что строение любой теории, выходящей за рамки представлений, диктуемых квадратичной формой, будет иметь пирамидальный характер: спускаясь с вершины "уникальной сверхгеометрии", исследователь должен будет входить в область "ассоциируемой Финслеровой геометрии", в которой в свою очередь будут возникать разнообразные римановы образы, а затем и многочисленные евклидовы картины.

Сказанное прямо относится к Квадрачисловой геометрии (развиваемой в работах Павлова [9, 10]). Действительно, она возникает из рассмотрения коммутативных гиперчисел и приписывает им Норму. Но при интерпретации компонент гиперчисел как компонент вектора эта метрика может быть отнесена к классу "Финслерова метрическая Функция Бервальда-Моора". На последнем пути можно (и нужно) развить теорию геометрических соотношений, – в том числе ввести геодезические, угол, перпендикулярность,... – которые разумеется не совпадают с аналогичными геометрическими соотношениями римановой или евклидовой геометрии. От последней невозможно полностью отказаться уже хотя бы по причинам использования графических изображений и рисунков – их приходится в конце концов строить в Евклидовом Пространстве!

В то же время, это не означает единственного и неизбежно-однозначного приписывания финслеровых геометрических свойств Квадрапространству. В самом деле, по его собственным представлениям, используя полиформу, могут быть введены соответствующие углы и перпендикулярность, – такое обобщенное развитие теории "более высокого уровня метричности" было проведено в работах [9, 10].

Геометрия Минковского содержит гораздо больше инвариантов, чем Евклидова геометрия, а Финслерова геометрия – чем Риманова геометрия. В таком контексте следует указать, что Квадрапространства имеют гораздо больше инвариантных объ-

ектов, чем Финслерова геометрии и геометрия Минковского, и могут предложить более богатую геометрическими представлениями теорию. В частности это богатство можно видеть в том, что Евклидова геометрия может легко ассоциироваться с Квадрапространством многими способами.

Философия и логика ассоциируемых проблем. Сыгранная в Истории роль труда Евклида едва ли может быть переоценена. Евклидова Квадратичная геометрия формировала и продолжает формировать образ мыслей и характер анализа исследователей и ученых. Например, риманова геометрия с самого исходного определения основывается на квадратичной форме (и даже иногда просто называлась "геометрией, порождаемой квадратичной формой"), теории расслоенных пространств также используют квадратичный метод (но разнообразнее, чем риманова геометрия), лагранжианы в теориях физических полей как правило квадратичны по производным, энергия и импульс релятивистской частицы связаны квадратичной формой, и т. д. Специальная и общая теория относительности основываются так же преданно на квадратичной форме, но теперь уже содержащей как плюсы +, так и минус -; к этому типу относится и геометрия Лобачевского.

В современной научной литературе геометрической ориентации разнообразно, и часто с определенным оттенком многозначительности, вводятся и изучаются различные "модели" обобщенных геометрий. В полном контрасте с этим в труде Евклида построена геометрия, а не "модель геометрии".

Почему евклидова геометрия устойчиво прошла через два тысячелетия? Ее "корнем" фактически является метод определения длины отрезков или векторов с помощью квадратного корня из квадратичной формы. Этот метод практически всюду – и в практике, и в математических и физических теориях, и в экспериментах, – используется он и в настоящее время. Это – логически простейший метод. Но "самый простой" не всегда может оказываться и "самым точным".

"Аксиоматики" на протяжении прошедшего столетия подробно анализировали структуру самой евклидовой геометрии (знаменитая работа Гильберта "Основания геометрии"), а не путей конструктивного обобщения "квадратичности" евклидовой метрики.

Нетрудно поставить под большое сомнение любое утверждение, настаивающее на "высокой экспериментальной верности" квадратичного метода задания длины. Кто, когда и с какой точностью проверил Теорему Пифагора? Такая проверка вообще едва ли возможна без того, чтобы исследователь использовал для сравнений более общие методы (подробные дискуссии на такую тему выходят за пределы настоящей работы, – читатели могут попытаться провести собственный анализ проблемы).

Фактически "евклидовость" моделей геометрии, или геометрий, сохраняется, пока сохраняется "квадратичность" определения длины. Но чтобы можно было бы сделать соответствующий решительный шаг, нужно больше, чем только смелость. Это трудная задача: чтобы выйти за пределы "евклидовости", нужно найти хороший способ заменить квадратичный метод определения длины на более общий и подробно пересмотреть современные уравнения математической физики на основе нового метода. Но это – и достойная задача для Ученых Нового Тысячелетия. Консерватизм мышления как тормоз соответствующему геометрическому прогрессу может быть эффективен только на весьма коротком промежутке времени.

Наука прошедшего столетия "сняла" тот ближайший успех, который возможно было достигнуть на основе геометрически-квадратичных представлений, как логически и математически простейших. Более глубокие истины потребуют использования более емких геометрий.

"Длина" – основополагающее понятие как теоретической, так и прикладной науки. По фундаментальности с ним можно соотнести понятие Числа. Развитие и различные приложения понятия Длины привели к созданию Геометрии, а понятия Числа – к созданию Алгебры.

Достаточно общий и современный соответствующий подход можно формулировать в контексте теории так называемого Пространства Минковского (говорят также о геометрии Минковского). На строгом современном математическом языке пространство Минковского часто определяется как Конечно-Мерное Банахово Пространство.

В Пространствах Минковского длина вводится общим определением, позволяющим ей быть заданной функциями весьма широкого класса с минимальными условиями гладкости. Расслоенные многообразия, в которых слоями являются Пространства Минковского, называют финслеровыми пространствами.

Геометрия Минковского и Финслерова геометрия изучались на протяжении прошедшего столетия многими авторами, было опубликовано по теме более 2000 статей и ряд монографий, но о достигнутом при этом успехе можно говорить лишь с большой осторожностью и условностью. В Финслеровой геометрии неизбежно появляется большое число тензоров (не имеющих нетривиальных прототипов в Римановой геометрии), и не очевидно, что подобный "количественный рост" предопределяет "качественный прогресс". Последним обстоятельством Финслерова геометрия отталкивала (и отталкивает) многих математиков, вызывая у них образ "непроходимого леса из тензоров" [в сравнение с этим Риманова геометрия весьма экономна: в ней есть метрический тензор и строящиеся по нему вполне определенным способом один набор коэффициентов связности и один тензор кривизны].

Однако нельзя слишком гипертрофировать чувство пессимизма от громоздкости формализма. Особенно в наше бурное время, когда многокомпонентностью объектов не многих можно удивить ни собственно в математике, и тем более ни в теоретической физике. Скорее реальные проблемы лежат в другой плоскости, а именно в отсутствии достаточно подходящих точных ключевых звеньев. В этом контексте уместно вспомнить замечание Буземана, что прогресс в движении "beyond Riemannian Geometry" должен состоять "не в обобщении методов Римановой геометрии, а в обобщении ее результатов".

Не должно ли развитие понятия "Длина" идти в тесной связи с развитием понятия "Число"?

Если обратиться к предыстории геометрии Евклида, – к деятельности Пифагора, – то хорошо известна от историков Трагедия Пифагора, возникшая у него, когда он обнаружил, что диагональ квадрата не соизмерима (рационально) с длинами сторон квадрата. То есть для Пифагора выглядело "катастрофой", что есть длина, которой не соответствует число. Этот "сюрприз" дал толчок, как известно, развитию понятия числа, а именно к созданию теории иррациональных чисел. Сложившееся при этом "соответствие" Длины и Числа составило основу геометрии Евклида, и тем более в ее аксиоматике (например, предложенной Гильбертом). В этом отношении развитая Гильбертом аксиоматика Евклидовой геометрии была как бы кульминацией тождества понятия арифметического числа и квадратичной длины, – многие ключевые геометрические понятия выводились из арифметических числовых свойств.

Последующий переход от Евклидовой геометрии к Римановой геометрии уже не вносит в эту дихотомию новых идей. Риманова геометрия – "просто расслоение Евклидовых геометрий", – так что в каждом слое действует обычная Евклидова геометрия и применяется обычное квадратичное определение длины.

Геометрия Минковского выходит за квадратичность определения длины, но (хотя, как известно, геометрические идеи появились у Минковского при изучении теории чисел) проводит развитие вопроса без какой-либо связки с развитием понятия числа. Нить Катастрофы Пифагора разорвалась! Это же можно сказать и про современные финслеровы пространства, – которые есть "просто расслоения с пространствами Минковского в слоях".

Такой экскурс в Историю помогает проявить достаточную смелость и выдвинуть следующую идею: *строить Финслерову геометрию в тесной связи с развитием понятия числа.*

Можно надеяться, что такая идея станет ключевой для успеха развития финслеровой геометрии в настоящем столетии. Спрашивается, где, на каком месте финслерова обобщения длины необходимо обобщение Понятия Числа? Ответ тут вообще говоря не очевиден, хотя очевиден обратный ход мыслей: мерой обобщенного числа должна быть (не евклидова, неквадратичная) финслерова метрическая функция.

Возникает острый для осознания вопрос: где в Финслеровой геометрии нужны Поличисла, так что без них нельзя обойтись? В Пифагоровой Трагедии ситуация ясна: для измерения длины диагонали единичного квадрата недостаточно рациональных чисел. Корни происхождения трансцендентных чисел также ясны: диаметр единичной окружности не измерим алгебраическим иррациональным числом.

Анизотропность предполагается при обобщении Евклидовой геометрии. В этой связи центральным понятием является индикатриса: поверхность концов векторов единичной длины, выходящих из фиксированной точки. В Евклидовой геометрии индикатрисой является сфера. Она символизирует изотропность пространства, одинаковость его свойств по всем направлениям. Поскольку в определении Пространства Минковского и Пространства Финслера входит условие однородности, анизотропность индикатрисы проявляет себя и в анизотропности любых векторов (не обязательно единичной длины). Переход от Евклидовой геометрии к геометрии Минковского символизирует отказ от полной изотропности пространства и после перехода соответствующая индикатриса больше не может быть поверхностью второго порядка.

С точки зрения анизотропности Метрика Бервальда-Моора характеризуется наличием выделенных направлений, по числу равных размерности пространства.

Содержание статьи. В настоящей работе введены необходимые исходные определения и приведены результаты вычислений ассоциируемых величин для Финслероид-геометрии (\mathcal{E}_g^{PD} -геометрии), предполагающей наличие ровно одного выделенного направления. Наше предыдущее исследование [5, 6] показало, что область многообещающая. А именно, \mathcal{E}_g^{PD} -подход применим к развитию новых направлений в метрической дифференциальной геометрии и может в частности быть эффективен в контексте геометрий Финслера или Минковского. Главным пунктом статьи является наблюдение, что ассоциируемая с \mathcal{E}_g^{PD} -пространством одна-векторная финслерова метрическая функция весьма естественным образом допускает привлекательное дву-векторное обобщение, тем самым порождая угол и скалярное произведение.

Известные различные попытки ввести угол в пространство Минковского или Финслера постоянно сталкивались с двусмысленностями:

"Следовательно, никакая конкретная угловая мера не может быть вполне естественной в геометрии Минковского. Об этом свидетельствуют несчастливые попытки определить такую меру, ни одна из которых не получила общего признания". (Буземан [2], с. 279.)

"К сожалению, существует целый ряд различных инвариантов в пространстве Минковского, все из которых сводятся к одному и тому же евклидову инварианту,

если пространство Минковского вырождается в евклидово пространство. Вследствие этого различные определения появлялись в литературе, посвященной пространствам Минковского и Финслера". (Рунд [3], с. 26)

Тот факт, что попытки не привели к однозначному успеху, видимо был следствием недостаточности используемых методов. Действительно, принималось на веру мнение, что угол должен быть определен или построен в терминах основного финслерова метрического тензора (и следовательно должен быть выводимым из исходной финслеровой метрической функции). Позволим себе поставить под сомнение такую установку с самого начала! Вместо этого мы выдвинем альтернативно принцип, что угол является конкомитантом (**пояснение**) геодезических (а не собственно метрики). Угол определяется двумя векторами (вместо одного вектора в случае длины) и в действительности предполагает использование соответствующего обобщения финслеровой метрической функции на дву-векторную метрическую функцию (на скалярное произведение). Ниже мы применим такой наш принцип к изучению \mathcal{E}_g^{PD} -пространства. Визуально сущность развиваемого обобщения можно видеть в деформации евклидовой сферы, – индикатрисы евклидова пространства.

Соответственно в Разделе 1 мы прежде всего занимаемся уравнением геодезических. Замечательно, уравнение допускает простое и явное общее решение. После этого выводится угол между двумя векторами. Обычно ожидают, что угловая мера должна быть аддитивной (для углов с общей вершиной). Замечательно, найденный угол только постоянным множителем отличается от евклидова угла в квазиевклидовом пространстве и вследствие этого аддитивен. Теорема косинусов остается верной при замене евклидова угла найденным ниже углом. Получено соответствующее скалярное произведение.

Формально в основе евклидовых представлений лежит использование метода введения длины векторов с помощью квадратного корня от квадратичной формы. В настоящей работе мы используем конкретное, аксиально-симметричное, обобщение такого метода, опираясь на конструктивные идеи финслеровой геометрии. Вводится соответствующая финслерова метрическая функция и подробно описываются ее основные свойства и следствия. Обобщение характеризуется одним безразмерным параметром, который ниже обозначается как g .

Ниже Раздел 2 вводит обозначения, определения и начальные понятия для пространства \mathcal{E}_g^{PD} . Оно строится в предположении, что пространство включает одно выделенное направление, которое мы часто будем условно называть Z -осью. Сокращения ФМФ и ФМТ будут использоваться для финслеровой метрической функции и финслерова метрического тензора соответственно. Характеристический параметр g может принимать значения между -2 и 2 ; при $g = 0$ пространство \mathcal{E}_g^{PD} сводится к обычному евклидову пространству. После предварительного введения характеристической квадратичной формы B , которая отличается от евклидовой суммы квадратов присутствием в ней перекрестного члена (см. (2.22)), мы определяем ФМФ K для пространства \mathcal{E}_g^{PD} с помощью формул (2.30) – (2.33). Характерной чертой формул является присутствие функции “ \arctan ”. Затем мы вычисляем тензорные величины пространства. Появляется замечательное явление, упрощающее все построения: ассоциируемый картановский тензор оказывается имеющим простую алгебраическую структуру (см. формулы (2.66) – (2.67)). В частности это (уникальное) явление ведет к выводу, что индикатриса (обобщение сферы) пространства \mathcal{E}_g^{PD} является пространством постоянной положительной кривизны. Значение кривизны зависит от параметра g согласно закону (2.73).

Раздел 3 вводит идею квазиевклидова отображения \mathcal{E}_g^{PD} -пространства. Идея оказывается весьма плодотворной тем, что квазиевклидово пространство просто во

многих аспектах, так что соответствующее преобразование упрощает различные вычисления. Оно не является плоским, но является конформно плоским. Последний Раздел 4 раскрывает интересные свойства квазиевклидова метрического тензора. В Приложении помещены рисунки, которые иллюстрируют вид финслероидов при различных значениях параметра g .

1. Вывод геодезических и угла в ассоциируемом квазиевклидовом пространстве

Для изучаемого финслерова пространства геодезические могут быть получены как решения уравнения

$$\frac{d^2 R^p}{ds^2} + C_q^p{}^r(g; R) \frac{dR^q}{ds} \frac{dR^r}{ds} = 0, \quad (1.1)$$

коэффициенты которого $C_p^q{}^r$ задаются списком, помещенным в конце Раздела 2. Чтобы избежать сложностей вычислений, оказывается удобно перенести рассмотрение в квазиевклидов подход (см. Разделы 3 и 4). Соответственно мы положим

$$\sqrt{g_{pq}(g; R) dR^p dR^q} = \sqrt{n_{pq}(g; t) dt^p dt^q} \quad (1.2)$$

и

$$R^p(s) = \mu^p(g; t^r(s)) \quad (1.3)$$

вместе с

$$\frac{dR^p(s)}{ds} = \mu_q^p(g; t^r(s)) \frac{dt^q(s)}{ds}, \quad (1.4)$$

где $\mu^p(g; t^r)$ и $\mu_q^p(g; t^r)$ – коэффициенты, заданные соответственно формулами (3.14) и (3.38)-(3.40). Пусть задана кривая C : $t^p = t^p(s)$ в квазиевклидовом пространстве, где параметр длины s вдоль кривой определяется дифференциалом

$$ds = \sqrt{n_{pq}(g; t) dt^p dt^q}, \quad (1.5)$$

где $n_{pq}(g; t)$ – ассоциируемый квазиевклидов метрический тензор, задаваемый формулой (3.49). Соответственно с этим, касательные векторы

$$u^p = \frac{dt^p}{ds} \quad (1.6)$$

к кривой являются единичными в смысле, что

$$n_{pq}(g; t) u^p u^q = 1. \quad (1.7)$$

Поскольку $L_p = \partial S / \partial t^p$, мы имеем

$$L_p u^p = \frac{dS}{ds}. \quad (1.8)$$

Здесь $S^2(t) = n_{pq}(g; t) t^p t^q = r_{pq} t^p t^q$ (см. (3.46)). Использование (4.16) ведет с помощью хорошо-известных аргументов к следующему уравнению геодезических в квазиевклидовом пространстве:

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4} G^2 \frac{\mathbf{t}}{S^2} H_{pq} u^p u^q, \quad (1.9)$$

где $H_{pq} = h^2(n_{pq} - L_p L_q)$ (см. (4.4)) и $\mathbf{t} = \{t^p\}$. Мы получаем

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4} g^2 \frac{\mathbf{t}}{S^2} \left(1 - \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 \right) = \frac{1}{4} g^2 (a^2 - b^2) \frac{\mathbf{t}}{S^4} \quad (1.10)$$

и

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4} g^2 (a^2 - b^2) \frac{\mathbf{t}}{S^4} \quad (1.11)$$

с

$$S^2(s) = a^2 + 2bs + s^2, \quad (1.12)$$

где a и b – две константы интегрирования.

Если мы положим

$$S(\Delta s) = \sqrt{a^2 + 2b\Delta s + (\Delta s)^2} \quad (1.13)$$

и

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}(0), \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}(\Delta s), \quad (1.14)$$

то получим

$$a = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \quad (1.15)$$

и

$$S(\Delta s) = \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \quad (1.16)$$

вместе с

$$(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) = aS(\Delta s) \cos \left[h \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right]. \quad (1.17)$$

Здесь \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 – два вектора с фиксированным началом O ; они указывают точку соответственно в начале геодезической и в конце геодезической. Пара круглых скобок (\cdot) используется для евклидова скалярного произведения, так что $(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) = r_{pq} t_1^p t_1^q$, $(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) = r_{pq} t_1^p t_2^q$, и r_{pq} – евклидов метрический тензор; $r_{pq} = \delta_{pq}$ в случае ортогонального базиса; δ используется для символов Кронекера. Из (1.15)-(1.17) прямо следует, что

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} = \tan \left[\frac{1}{h} \arccos \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \right]. \quad (1.18)$$

Равенство (1.18) подсказывает целесообразность ввести

Определение. \mathcal{E}_g^{PD} -ассоциируемый угол задается согласно

$$\alpha := \frac{1}{h} \arccos \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}, \quad (1.19)$$

так что

$$\alpha = \frac{1}{h} \alpha_{Euclidean}. \quad (1.20)$$

Такой угол очевидно аддитивен:

$$\alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3) = \alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) + \alpha(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3). \quad (1.21)$$

Кроме того, он равен нулю при равных векторах:

$$\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0. \quad (1.22)$$

Используя такой угол, мы предложим

Определение. При заданных двух векторах \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 векторы \mathcal{E}_g^{PD} -перпендикулярны, если

$$\cos(\alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)) = 0. \quad (1.23)$$

Поскольку обращение в нуль (1.23) влечет за собой

$$\alpha_{quasi-Euclidean}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \frac{\pi}{2}, \quad (1.24)$$

ввиду (1.20) следует сделать вывод, что

$$\alpha_{Euclidean}(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \frac{\pi}{2}h \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.25)$$

Следовательно векторы, перпендикулярные в собственно квазиевклидовом смысле, выглядят острыми с ассоциируемой евклидовой точки зрения.

Принимая во внимание равенство

$$(\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s)^2 + (a^2 + b\Delta s)^2 \equiv a^2 S^2(\Delta s), \quad (1.26)$$

мы также устанавливаем соотношения

$$\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s = aS(\Delta s) \sin \alpha \quad (1.27)$$

и

$$a^2 + b\Delta s = aS(\Delta s) \cos \alpha. \quad (1.28)$$

Они влекут за собой равенство

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{S(\Delta s) \cos \alpha - a}{S(\Delta s) \sin \alpha}, \quad (1.29)$$

из которого может быть найдена величина b .

Итак, каждый член вовлеченного набора $\{a, b, \Delta s, S(\Delta s)\}$ может быть явно выражен через исходные векторы \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 . Для многих случаев целесообразно переписать равенство (1.26) в виде

$$S^2(\Delta s) = (\Delta s)^2 - a^2 + 2(a^2 + b\Delta s). \quad (1.30)$$

Таким образом мы пришли к следующим последовательным пунктам:

\mathcal{E}_g^{PD} -Теорема Косинусов

$$(\Delta s)^2 = S^2(\Delta s) + a^2 - 2aS(\Delta s) \cos \alpha; \quad (1.31)$$

\mathcal{E}_g^{PD} -Двух-Точечная Длина

$$(\Delta s)^2 = (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) + (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) - 2\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha; \quad (1.32)$$

\mathcal{E}_g^{PD} -Скалярное Произведение

$$\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha; \quad (1.33)$$

\mathcal{E}_g^{PD} -Перпендикулярность

$$\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}. \quad (1.34)$$

Отождествление

$$|\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2 = (\Delta s)^2 \quad (1.35)$$

дает другое яркое представление

$$|\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2 = (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) + (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) - 2\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha. \quad (1.36)$$

Рассмотрение можно завершить следующим образом.

Теорема. *Общее решение уравнения геодезических (1.11) может быть найдено в явном виде*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) = & \\ = & \frac{S(s)}{a} \frac{\sin \left[h \arctan \frac{fr\sqrt{a^2 - b^2} (\Delta s - s)a^2 + b\Delta s + (b + \Delta s)s}{a^2 + b\Delta s} \right]}{\sin \left[h \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right]} \mathbf{t}_1 \\ & + \frac{S(s)}{S(\Delta s)} \frac{\sin \left[h \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2} s}{a^2 + bs} \right]}{\sin \left[h \arctan \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right]} \mathbf{t}_2. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Собственно евклидов предел есть

$$\mathbf{t}(s) \Big|_{g=0} = \frac{(\Delta s - s)\mathbf{t}_1 + s\mathbf{t}_2}{\Delta s} = \mathbf{t}_1 + (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) \frac{s}{\Delta s},$$

так что геодезические становятся прямыми. Из (1.37) вытекает равенство

$$(\mathbf{t}(s)\mathbf{t}(s)) = S^2(s) \quad (1.38)$$

в согласии с (1.12). Поскольку общее решение (1.37) таково, что правая часть растягивается двумя векторами, \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 , мы вправе заключить, что *изучаемые геодезические являются плоскими кривыми.*

2. Финслероид-пространство \mathcal{E}_g^{PD} положительно-определенного типа

Предположим, что задано N -мерное векторное пространство V_N . Обозначим через R векторы, составляющие пространство, так что $R \in V_N$. Любой заданный вектор R назначает определенное направление в V_N . Фиксируем элемент $R_{(N)} \in V_N$, введем прямую линию e_N , ориентированную вдоль вектора $R_{(N)}$, и используем e_N как R^N -координатную ось в V_N . Таким способом мы получим топологическое произведение

$$V_N = V_{N-1} \times e_N \quad (2.1)$$

вместе с разбиением

$$R = \{\mathbf{R}, R^N\}, \quad R^N \in e_N \quad \text{и} \quad \mathbf{R} \in V_{N-1}. \quad (2.2)$$

Для удобства мы часто будем использовать обозначение

$$R^N = Z, \quad (2.3)$$

а также

$$R = \{\mathbf{R}, Z\}. \quad (2.4)$$

Кроме того, мы введем евклидову метрику

$$q = q(\mathbf{R}) \quad (2.5)$$

на $(N - 1)$ -мерном векторном пространстве V_{N-1} .

Относительно допустимого координатного базиса $\{e_a\}$ в V_{N-1} мы получим координатные представления

$$\mathbf{R} = \{R^a\} = \{R^1, \dots, R^{N-1}\} \quad (2.6)$$

и

$$R = \{R^p\} = \{R^a, R^N\} \equiv \{R^a, Z\}, \quad (2.7)$$

а также

$$q(\mathbf{R}) = \sqrt{r_{ab}R^aR^b}, \quad (2.8)$$

где r_{ab} – компоненты симметричного положительно-определенного тензора на V_{N-1} . Индексы (a, b, \dots) и (p, q, \dots) будут принимать значения из наборов $(1, \dots, N - 1)$ и $(1, \dots, N)$ соответственно; векторные индексы являются верхними, а ко-векторные индексы являются нижними; по повторяющимся верхним и нижним индексам автоматически производится суммирование; обозначение δ_b^a будет использоваться для символа Кронекера. Переменные

$$w^a = R^a/Z, \quad w_a = r_{ab}w^b, \quad w = q/Z, \quad (2.9)$$

где

$$w \in (-\infty, \infty), \quad (2.10)$$

удобны в вычислениях, когда $Z \neq 0$. Иногда мы будем использовать ассоциируемый метрический тензор

$$r_{pq} = \{r_{NN} = 1, r_{Na} = 0, r_{ab}\}, \quad (2.11)$$

определенный на всем векторном пространстве V_N .

Задав параметр g при условии выполнения неравенства

$$-2 < g < 2, \quad (2.12)$$

мы введем удобные обозначения

$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}g^2}, \quad (2.13)$$

$$G = g/h, \quad (2.14)$$

$$g_+ = \frac{1}{2}g + h, \quad g_- = \frac{1}{2}g - h, \quad (2.15)$$

$$g^+ = -\frac{1}{2}g + h, \quad g^- = -\frac{1}{2}g - h, \quad (2.16)$$

так что

$$g_+ + g_- = g, \quad g_+ - g_- = 2h, \quad (2.17)$$

$$g^+ + g^- = -g, \quad g^+ - g^- = 2h, \quad (2.18)$$

$$(g_+)^2 + (g_-)^2 = 2, \quad (2.19)$$

$$(g^+)^2 + (g^-)^2 = 2. \quad (2.20)$$

Справедлива симметрия

$$g_+ \overset{g \rightarrow -g}{\longleftrightarrow} -g_-, \quad g^+ \overset{g \rightarrow -g}{\longleftrightarrow} -g^-. \quad (2.21)$$

Характеристическая квадратичная форма

$$B(g; R) = Z^2 + gqZ + q^2 \equiv \frac{1}{2} \left[(Z + g_+q)^2 + (Z + g_-q)^2 \right] > 0 \quad (2.22)$$

имеет отрицательный дискриминант, а именно

$$D_{\{B\}} = -4h^2 < 0, \quad (2.23)$$

как следствие формул (2.12) и (2.13). При $Z \neq 0$ удобно так же использовать квадратичную форму

$$Q(g; w) := B/(Z)^2, \quad (2.24)$$

получая

$$Q(g; w) = 1 + gw + w^2 > 0, \quad (2.25)$$

вместе с функцией

$$E(g; w) := 1 + \frac{1}{2}gw. \quad (2.26)$$

Легко проверить

$$E^2 + h^2w^2 = Q \quad (2.27)$$

тождество. В пределе $g \rightarrow 0$ определение (2.22) вырождается в квадратичную форму начального метрического тензора (2.11):

$$B|_{g=0} = r_{pq}R^pR^q. \quad (2.28)$$

Кроме того, справедливо предельное равенство

$$Q|_{g=0} = 1 + w^2. \quad (2.29)$$

С помощью таких обозначений мы вводим ФМФ

$$K(g; R) = \sqrt{B(g; R)} J(g; R), \quad (2.30)$$

где

$$J(g; R) = e^{\frac{1}{2}G\Phi(g; R)}, \quad (2.31)$$

$$\Phi(g; R) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{q}{hZ} + \frac{G}{2} \right), \quad \text{если } Z \geq 0, \quad (2.32)$$

$$\Phi(g; R) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{q}{hZ} + \frac{G}{2} \right), \quad \text{если } Z \leq 0, \quad (2.33)$$

или в других удобных видах,

$$\Phi(g; R) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{L(g; R)}{hZ} \right), \quad \text{если } Z \geq 0, \quad (2.34)$$

$$\Phi(g; R) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{L(g; R)}{hZ} \right), \quad \text{если } Z \leq 0, \quad (2.35)$$

где

$$L(g; R) = q + \frac{g}{2}Z, \quad (2.36)$$

и

$$\Phi(g; R) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{hq}{A(g; R)}, \quad \text{если } Z \geq 0, \quad (2.37)$$

$$\Phi(g; R) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{hq}{A(g; R)}, \quad \text{если } Z \leq 0, \quad (2.38)$$

где

$$A(g; R) = Z + \frac{1}{2}gq. \quad (2.39)$$

Эта ФМФ нормирована так, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.40)$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } q = 0 \text{ и } Z > 0; \quad \Phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если } q = 0 \text{ и } Z < 0. \quad (2.41)$$

Мы также имеем

$$\operatorname{ctg} \Phi = \frac{hq}{A}, \quad \Phi|_{z=0} = \operatorname{arctg} \frac{G}{2}. \quad (2.42)$$

Часто удобно использовать индикатор знака ϵ_Z для аргумента Z :

$$\epsilon_Z = 1, \quad \text{если } Z > 0; \quad \epsilon_Z = -1, \quad \text{если } Z < 0; \quad (2.43)$$

При этих условиях мы вводим \mathcal{E}_g^{PD} -пространство:

$$\mathcal{E}_g^{PD} = \{V_N = V_{N-1} \times e_N; R \in V_N; K(g; R); g\}. \quad (2.44)$$

Правая часть определения (2.30) может рассматриваться как функция \check{K} от аргументов $\{g; q, Z\}$, так что

$$\check{K}(g; q, Z) = K(g; R). \quad (2.45)$$

Мы видим, что

$$\check{K}(g; q, -Z) \neq \check{K}(g; q, Z), \quad (2.46)$$

если только значение параметра не равно тривиальному $g = 0$. Вместо этого, функция \check{K} показывает свойство gZ -четности

$$\check{K}(-g; q, -Z) = \check{K}(g; q, Z). \quad (2.47)$$

Справедлива инвариантность относительно отражения $(N - 1)$ -пространства

$$K(g; R) \stackrel{R^a \leftrightarrow -R^a}{\Leftrightarrow} K(g; R). \quad (2.48)$$

Часто бывает удобно переписать представление (2.30) в виде

$$K(g; R) = |Z|V(g; w) \quad (2.49)$$

(при $Z \neq 0$) с генерирующей метрической функцией

$$V(g; w) = \sqrt{Q(g; w)} j(g; w). \quad (2.50)$$

Мы имеем

$$j(g; w) = J(g; 1, w).$$

Используя (2.25) и (2.31) – (2.35), получим

$$V' = wV/Q, \quad V'' = V/Q^2, \quad (2.51)$$

$$(V^2/Q)' = -gV^2/Q^2, \quad (V^2/Q^2)' = -2(g+w)V^2/Q^3, \quad (2.52)$$

$$j' = -\frac{1}{2}gj/Q, \quad (2.53)$$

а также

$$\frac{1}{2}(V^2)' = wV^2/Q, \quad \frac{1}{2}(V^2)'' = (Q - gw)V^2/Q^2, \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{4}(V^2)''' = -gV^2/Q^3 \quad (2.55)$$

вместе с равенствами

$$\Phi' = -h/Q, \quad (2.56)$$

где штрих (') означает дифференцирование по w .

Укажем дополнительно два полезных тождества

$$(A(g; R))^2 + h^2q^2 = B(g; R) \quad (2.57a)$$

и

$$(L(g; R))^2 + h^2Z^2 = B(g; R). \quad (2.57b)$$

Простые результаты для производных сводят задачу вычисления компонент ассоциируемого ФМТ к легкому упражнению, действительно:

$$R_p := \frac{1}{2} \frac{\partial K^2(g; R)}{\partial R^p} : \quad (2.58)$$

$$R_a = r_{ab}R^b \frac{K^2}{B}, \quad R_N = (Z + gq) \frac{K^2}{B}; \quad (2.59)$$

$$g_{pq}(g; R) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^2(g; R)}{\partial R^p \partial R^q} = \frac{\partial R_p(g; R)}{\partial R^q} :$$

$$g_{NN}(g; R) = [(Z + gq)^2 + q^2] \frac{K^2}{B^2}, \quad g_{Na}(g; R) = gq r_{ab} R^b \frac{K^2}{B^2}, \quad (2.60)$$

$$g_{ab}(g; R) = \frac{K^2}{B} r_{ab} - g \frac{r_{ad} R^d r_{be} R^e Z K^2}{q B^2}. \quad (2.61)$$

Компоненты обратного тензора равны

$$g^{NN}(g; R) = (Z^2 + q^2) \frac{1}{K^2}, \quad g^{Na}(g; R) = -gq R^a \frac{1}{K^2}, \quad (2.62)$$

$$g^{ab}(g; R) = \frac{B}{K^2} r^{ab} + g(Z + gq) \frac{R^a R^b}{q} \frac{1}{K^2}. \quad (2.63)$$

Детерминант ФМТ, задаваемого формулами (2.59) – (2.60), легко находится в виде

$$\det(g_{pq}(g; R)) = [J(g; R)]^{2N} \det(r_{ab}), \quad (2.64)$$

что показывает, если учесть (2.31) – (2.33), что

$$\det(g_{pq}) > 0 \quad \text{на всей области определения.} \quad (2.65)$$

Ассоциируемый угловой метрический тензор

$$h_{pq} := g_{pq} - R_p R_q \frac{1}{K^2}$$

может быть задан компонентами

$$h_{NN}(g; R) = q^2 \frac{K^2}{B^2}, \quad h_{Na}(g; R) = -Z r_{ab} R^b \frac{K^2}{B^2},$$

$$h_{ab}(g; R) = \frac{K^2}{B} r_{ab} - (gZ + q) \frac{r_{ad} R^d r_{be} R^e}{q} \frac{K^2}{B^2},$$

откуда следует

$$\det(h_{ab}) = \det(g_{pq}) \frac{1}{V^2}.$$

Использование компонент картановского тензора (которые приведены в явном виде в конце настоящего раздела) ведет после довольно трудоемких вычислений к простому и замечательному результату:

Теорема 1. *Картановский тензор, ассоциируемый с ФМФ (2.30), имеет следующий специальный алгебраический вид*

$$C_{pqr} = \frac{1}{N} \left(h_{pq} C_r + h_{pr} C_q + h_{qr} C_p - \frac{1}{C_s C^s} C_p C_q C_r \right) \quad (2.66)$$

со сверткой

$$C_t C^t = \frac{N^2}{4K^2} g^2. \quad (2.67)$$

С помощью (2.65) выяснение структуры тензора кривизны

$$S_{pqrs} := (C_{tqr} C_p^t - C_{tqs} C_p^t) \quad (2.68)$$

приводит к простому представлению

$$S_{pqrs} = -\frac{C_t C^t}{N^2} (h_{pr} h_{qs} - h_{ps} h_{qr}). \quad (2.69)$$

Вставляя сюда (2.66), мы приходим к выводу, что справедлива

Теорема 2. *Тензор кривизны пространства \mathcal{E}_g^{PD} имеет специальный вид*

$$S_{pqrs} = S^* (h_{pr} h_{qs} - h_{ps} h_{qr}) / K^2 \quad (2.70)$$

со значением

$$S^* = -\frac{1}{4} g^2. \quad (2.71)$$

Определение. ФМФ (2.30) вводит $(N - 1)$ -мерную гиперповерхность индикатрисы согласно уравнению

$$K(g; R) = 1. \quad (2.72)$$

Мы назовем эту гиперповерхность *Финслероидом* $\{Finsleroid \text{ по-английски}\}$, используя для него обозначение \mathcal{F}_g^{PD} .

Вспоминая известную формулу $\mathcal{R} = 1 + S^*$ для кривизны индикатрисы (см. [4]), из (2.70) – (2.71) мы делаем вывод, что

$$\mathcal{R}_{Finsleroid} = h^2 = 1 - \frac{1}{4}g^2, \quad 0 < \mathcal{R}_{Finsleroid} \leq 1. \quad (2.73)$$

Геометрически тот факт, что величина (2.71) не зависит от векторов R означает, что кривизна индикатрисы является константой. Следовательно верна

Теорема 3. *Финслероид \mathcal{F}_g^{PD} является пространством постоянной кривизны с положительным значением (2.73) для кривизны.*

Кроме того, сравнивая результат (2.73) и формулы (2.22) – (2.23), мы можем утверждать, что справедлива

Теорема 4. *Кривизна финслероида соответствует дискриминанту исходной характеристической квадратичной формы (2.22) просто согласно равенству*

$$\mathcal{R}_{Finsleroid} = -\frac{1}{4}D_{\{B\}}. \quad (2.74)$$

Полезно заметить, что

$$\mathcal{R}_{Finsleroid} \xrightarrow{g \rightarrow 0} \mathcal{R}_{Euclidean \ Sphere} = 1,$$

где мы использовали (2.73) и (2.23).

В заключение раздела мы выпишем явно компоненты соответствующего картановского тензора

$$C_{pqr} := \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pq}}{\partial R^r} :$$

$$R^N C_{NNN} = gw^3 V^2 Q^{-3}, \quad R^N C_{aNN} = -gww_a V^2 Q^{-3},$$

$$R^N C_{abN} = \frac{1}{2}gwV^2 Q^{-2}r_{ab} + \frac{1}{2}g(1 - gw - w^2)w_a w_b w^{-1} V^2 Q^{-3},$$

$$R^N C_{abc} = -\frac{1}{2}gV^2 Q^{-2}w^{-1}(r_{ab}w_c + r_{ac}w_b + r_{bc}w_a) + gw_a w_b w_c w^{-3} \left(\frac{1}{2}Q + gw + w^2 \right) V^2 Q^{-3};$$

и

$$R^N C_N^N N = gw^3/Q^2, \quad R^N C_a^N N = -gww_a/Q^2,$$

$$R^N C_N^a N = -gw(1 + gw)w^a/Q^2,$$

$$R^N C_a^N b = \frac{1}{2}gwr_{ab}/Q + \frac{1}{2}g(1 - gw - w^2)w_a w_b/wQ^2,$$

$$R^N C_N^a b = \frac{1}{2}gw\delta_b^a/Q + \frac{1}{2}g(1 + gw - w^2)w^a w_b/wQ^2,$$

$$R^N C_a^b c = -\frac{1}{2}g(\delta_a^b w_c + \delta_c^b w_a + (1 + gw)r_{ac}w^b)/wQ + \frac{1}{2}g(gwQ + Q + 2w^2)w_a w^b w_c/w^3 Q^2.$$

Компоненты вычислялись с помощью формул (2.50) – (2.53).

Использование свертки

$$R^N C_a^b c^{ac} = -g \frac{w^b}{w} \frac{1 + gw}{Q} \left(\frac{N - 2}{2} + \frac{1}{Q} \right)$$

и

$$R^N C_a^b c^a w^c = -g \frac{w}{Q^2} (1 + gw) w^b$$

удобно во многих вычислениях. Справедливо также

$$\begin{aligned} R^N C_N &= \frac{N}{2} gw Q^{-1}, & R^N C_a &= -\frac{N}{2} g(w_a/w) Q^{-1}, \\ R^N C^N &= \frac{N}{2} gw/V^2, & R^N C^a &= -\frac{N}{2} gw^a(1 + gw)/wV^2, \\ C^N &= \frac{N}{2} gw R^N K^{-2}, & C^a &= -\frac{N}{2} gw^a(1 + gw)w^{-1} R^N K^{-2}, \\ C_p C^p &= \frac{N^2}{4K^2} g^2. \end{aligned}$$

3. Квазиевклидово отображение Финслероида

Теорема 8 может быть продолжена дальше путем указания диффеоморфизма

$$\mathcal{F}_g^{PD} \xrightarrow{i_g} \mathcal{S}^{PD} \tag{3.1}$$

Финслероида $\mathcal{F}_g^{PD} \subset V_N$ единичной сфере $\mathcal{S}^{PD} \subset V_N$:

$$\mathcal{S}^{PD} = \{R \in \mathcal{S}^{PD} : S(R) = 1\}, \tag{3.2}$$

где

$$S(R) = \sqrt{r_{pq} R^p R^q} \equiv \sqrt{(R^N)^2 + r_{ab} R^a R^b} \tag{3.3}$$

является начальной евклидовой метрической функцией (см. (2.11)).

Диффеоморфизм (3.1) всегда может быть расширен, чтобы получить диффеоморфное отображение

$$V_N \xrightarrow{\sigma_g} V_N \tag{3.4}$$

всего векторного пространства V_N с помощью однородности:

$$\sigma_g \cdot (bR) = b\sigma_g \cdot R, \quad b > 0. \tag{3.5}$$

С этой целью достаточно взять просто

$$\sigma_g \cdot R = \|R\|_{i_g} \cdot \left(\frac{R}{\|R\|} \right), \tag{3.6}$$

где

$$\|R\| = K(g; R). \tag{3.7}$$

Из (3.1) – (3.7) вытекает

$$K(g; R) = S(\sigma_g \cdot R). \tag{3.8}$$

Тождество (2.57) подсказывает взять отображение

$$\bar{R} = \sigma_g \cdot R \quad (3.9)$$

с помощью компонент

$$\bar{R}^p = \sigma^p(g; R) \quad (3.10)$$

с функциями

$$\sigma^a = R^a h J(g; R), \quad \sigma^N = A(g; R) J(g; R), \quad (3.11)$$

где $J(g; R)$ и $A(g; R)$ – функции (2.31) и (2.39). Действительно, вставляя (3.11) в (3.3) и принимая во внимание (2.30) и (2.57), мы получаем тождество

$$S(\bar{R}) = K(g; R), \quad (3.12)$$

которое эквивалентно предположенному соотношению (3.8).

Итак, мы приходим к выводу, что справедлива

Теорема 5. *Отображение, заданное явно формулами (3.9) – (3.11), устанавливает диффеоморфизм между Финслероидом и единичной сферой согласно формулам (3.1) – (3.8).*

Соответственно мы введем

Определение. При этих условиях отображение (3.1) называется *квазиевклидовым отображением Финслероида*.

Обращение

$$R = \mu_g \cdot \bar{R}, \quad \mu_g = (\sigma_g)^{-1}, \quad (3.13)$$

преобразования (3.9) – (3.11) может быть представлено компонентами

$$R^p = \mu^p(g; \bar{R}) \quad (3.14)$$

с функцией

$$\mu^a = \bar{R}^a / h k(g; \bar{R}), \quad \mu^N = I(g; \bar{R}) / k(g; \bar{R}), \quad (3.15)$$

где

$$k(g; \bar{R}) := J(g; \mu(g; \bar{R})) \quad (3.16)$$

и

$$I(g; \bar{R}) = \bar{R}^N - \frac{1}{2} G \sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}. \quad (3.17)$$

Тождество

$$\mu^p(g; \sigma(g; R)) \equiv R^p \quad (3.18)$$

легко проверяется. Заметим, что

$$\frac{\sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}}{\bar{R}^N} = \frac{h q}{A(g; R)}, \quad w^a = \frac{R^a}{R^N} = \frac{\bar{R}^a}{h I(g; \bar{R})}, \quad (3.19)$$

и

$$\sqrt{B}/Z = S/I, \quad \sqrt{Q} = S/I. \quad (3.20)$$

σ_g -образ

$$\phi(g; \bar{R}) := \Phi(g; R)|_{R=\mu(g; \bar{R})} \quad (3.21)$$

функции Φ , описываемой формулами (2.31) – (2.42), имеет ясный смысл угла:

$$\phi(g; \bar{R}) = \operatorname{arccctg} \frac{\bar{R}^N}{\sqrt{r_{ab}\bar{R}^a\bar{R}^b}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r_{ab}\bar{R}^a\bar{R}^b}}{\bar{R}^N}, & \text{если } \bar{R}^N \geq 0; \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r_{ab}\bar{R}^a\bar{R}^b}}{\bar{R}^N}, & \text{если } \bar{R}^N \leq 0; \end{cases} \quad (3.22)$$

он лежит в пределах

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.23)$$

Мы имеем

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \bar{R}^a = 0 \text{ и } \bar{R}^N > 0; \quad \phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \bar{R}^a = 0 \text{ и } \bar{R}^N < 0, \quad (3.24)$$

а также

$$\phi|_{\bar{R}^N=0} = 0. \quad (3.25)$$

Сравнение формул (3.16) и (2.31) показывает, что

$$k = e^{\frac{1}{2}G\phi}. \quad (3.26)$$

Правые части в (3.11) – однородные функции степени 1:

$$\sigma^p(g; bR) = b\sigma^p(g; R), \quad b > 0. \quad (3.27)$$

Следовательно тождество

$$\sigma_s^p(g; R)R^s = \bar{R}^p \quad (3.28)$$

должно быть верным для производных

$$\sigma_p^q(g; R) := \frac{\partial \sigma^q(g; R)}{\partial R^p}. \quad (3.29)$$

На таком пути получают простые представления

$$\sigma_N^N(g; R) = \left(B + \frac{1}{2}gqA \right) \frac{J}{B}, \quad (3.30)$$

$$\sigma_a^N(g; R) = -\frac{g(ZA - B)}{2q} \frac{Jr_{ab}R^b}{B}, \quad (3.31)$$

$$\sigma_N^a(g; R) = \frac{1}{2}gq \frac{JR^a h}{B}, \quad (3.32)$$

$$\sigma_b^a(g; R) = \left(B\delta_b^a - \frac{gr_{bc}R^c R^a Z}{2q} \right) \frac{Jh}{B}, \quad (3.33)$$

а также детерминант

$$\det(\sigma_p^q) = h^{N-1} J^N. \quad (3.34)$$

Соотношения

$$\sigma_b^a R^b = JhR^a(AZ + q^2)/B, \quad r^{cd}\sigma_c^a\sigma_d^b = J^2 h^2 \left[r^{ab} - g(R^a R^b Z/qB) + \frac{1}{4}g^2(R^a R^b Z^2/B^2) \right]$$

полезны во многих вычислениях, включающих коэффициенты $\{\sigma_p^q\}$.

В дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем использовать подстановку

$$t^p = \bar{R}^p. \quad (3.35)$$

Снова мы учитываем однородность

$$\mu^p(g; bt) = b\mu^p(g; t), \quad b > 0, \quad (3.36)$$

для функций (3.15), откуда вытекает тождество

$$\mu_s^p(g; t)t^s = R^p \quad (3.37)$$

для производных

$$\mu_q^p(g; t) := \frac{\partial \mu^p(g; t)}{\partial t^q}. \quad (3.38)$$

Мы находим

$$\mu_N^N = 1/k(g; t) - \frac{1}{2}g \frac{m(t)I(g; t)}{k(g; t)(S(t))^2}, \quad \mu_a^N = \frac{1}{2}g \frac{r_{ac}t^c I^*(g; t)}{k(g; t)(S(t))^2}, \quad (3.39)$$

$$\mu_N^a = -\frac{1}{2}g \frac{m(t)t^a}{hk(g; t)(S(t))^2}, \quad \mu_b^a = \frac{1}{hk(g; t)}\delta_b^a + \frac{1}{2}g \frac{t^N t^a r_{bc}t^c}{m(t)hk(g; t)(S(t))^2}, \quad (3.40)$$

где

$$m(t) = \sqrt{r_{ab}t^a t^b}, \quad (3.41)$$

$$I^*(g; t) = hm(t) - \frac{1}{2}gt^N \quad (3.42)$$

и

$$S(t) = \sqrt{r_{rs}t^r t^s} \equiv \sqrt{(t^N)^2 + r_{ab}t^a t^b}. \quad (3.43)$$

В частности, из вышеприведенных формул получаются соотношения

$$\frac{\partial(1/k(g; t))}{\partial t^N} = -\frac{1}{2}g \frac{m(t)}{hk(g; t)(S(t))^2}, \quad \frac{\partial(1/k(g; t))}{\partial t^a} = \frac{1}{2}g \frac{t^N r_{ab}t^b}{m(t)hk(g; t)(S(t))^2}$$

Следует отметить также, что

$$R_p \mu_q^p = t_q, \quad t_p \sigma_q^p = R_q. \quad (3.44)$$

Единичные векторы

$$L^p := \frac{t^p}{S(t)}, \quad L_p := r_{pq}L^q \quad (3.45)$$

удовлетворяют соотношениям

$$L^q = l^p \sigma_p^q, \quad l^p = \mu_q^p L^q, \quad l_p = \sigma_p^q L_q, \quad L_p = \mu_p^q l_q, \quad (3.46)$$

где $l^p = R^p/K(g; R)$ и $l_p = R_p/H(g; R)$ – начальные финслеровы единичные векторы.

Теперь мы используем явные формулы (2.61) – (2.62) и (3.29) – (3.32) для нахождения преобразования

$$n^{rs}(g; t) := \sigma_p^r \sigma_q^s g^{pq} \quad (3.47)$$

для ФМТ g_{pq} при \mathcal{F}_g^{PD} -индуцированном отображении (3.9) – (3.11), так что справедлива

Теорема 6. *Получается простое представление*

$$n^{rs} = h^2 r^{rs} + \frac{1}{4} g^2 L^r L^s. \quad (3.48)$$

Ковариантная версия имеет вид

$$n_{rs} = \frac{1}{h^2} r_{rs} - \frac{1}{4} G^2 L_r L_s. \quad (3.49)$$

Детерминант этого тензора является константой:

$$\det(n_{rs}) = h^{2(1-N)} \det(r_{ab}). \quad (3.50)$$

Заметим, что

$$L^p L_p = 1, \quad n_{pq} L^q = L_p, \quad n^{pq} L_q = L^p, \quad n_{pq} L^p L^q = 1, \quad n_{pq} t^p t^q = (S(t))^2.$$

Из (3.47) очевидно следует

$$g_{pq} = n_{rs}(g; t) \sigma_p^r \sigma_q^s. \quad (3.51)$$

4. Квазиевклидов метрический тензор

Введем

Определение. Метрический тензор, задаваемый компонентами (3.48) – (3.49), называется *квазиевклидовым*.

Определение. *Квазиевклидово пространство*

$$\mathcal{Q}_N = \{V_N; n_{pq}(g; t); g\} \quad (4.1)$$

является обобщением евклидова пространства $\{V_N; r_{pq}\}$ на случай $g \neq 0$.

Преобразование (3.47) может быть обращено, что дает представление

$$g_{pq} = \sigma_p^r \sigma_q^s n_{rs}. \quad (4.2)$$

Для углового метрического тензора (см. формулу, идущую ниже (2.65)), из (3.46) и (4.2) мы выводим

$$h_{pq} = \sigma_p^r \sigma_q^s H_{rs} \frac{1}{h^2}, \quad (4.3)$$

где

$$H_{rs} := r_{rs} - L_r L_s \quad (4.4)$$

– тензор, показывающий свойство ортогональности

$$L^r H_{rs} = 0. \quad (4.5)$$

Легко найти, что

$$H_{rs} = h^2 (n_{rs} - L_r L_s).$$

Теорема 7. Квазиевклидов метрический тензор (3.48) – (3.49) является *конформным* евклидову метрическому тензору.

Действительно, если мы рассмотрим отображение

$$\bar{R}^p \rightarrow \tilde{R} : \quad \tilde{R}^p = f(g; \bar{R})\bar{R}^p/h \quad (4.6)$$

с функцией

$$f(g; \bar{R}) = a \left(g; \frac{1}{2} S^2(\bar{R}) \right) \quad (4.7)$$

и используем коэффициенты

$$k_q^p := \frac{\partial \tilde{R}^p}{\partial \bar{R}^q} = (f\delta_q^p + a'\bar{R}^p\bar{R}_q)/h \quad (4.8)$$

для определения тензора

$$c^{pq}(g; \tilde{R}) := k_r^p k_s^q n^{rs}(g; \bar{R}), \quad (4.9)$$

то мы найдем, что

$$c^{pq} = f^2 r^{pq} \quad (4.10)$$

при

$$f = \left[\frac{1}{2} S^2(\bar{R}) \right]^{\gamma/2}, \quad (4.11)$$

где

$$\gamma = h - 1 \equiv \sqrt{1 - \frac{g^2}{4}} - 1 \quad (4.12)$$

– параметр. Доказательство Теоремы 7 завершено.

Используем теперь полученный квазиевклидов метрический тензор $n_{pq}(g; t)$ для построения ассоциируемых квазиевклидовых символов Кристоффеля $N_p^r{}_q(g; t)$. Мы последовательно находим:

$$n_{pq,r} := \frac{\partial n_{pq}}{\partial t^r} = -\frac{1}{4} G^2 (H_{pr} L_q + H_{qr} L_p) / S, \quad (4.13)$$

и

$$N_p^r{}_q = n^{rs} N_{psq}, \quad N_{prq} = \frac{1}{2} (n_{pr,q} + n_{qr,p} - n_{pq,r}), \quad (4.14)$$

вместе с

$$N_{prq}(g; t) = -\frac{1}{4} G^2 H_{pq} L_r / S, \quad (4.15)$$

что окончательно дает

$$N_p^r{}_q(g; t) = -\frac{1}{4} G^2 L^r H_{pq} / S. \quad (4.16)$$

Сравнение представления (4.16) с тождеством (4.5) показывает, что

$$t^p N_p^r{}_q = 0, \quad N_p^s{}_s = 0, \quad N_t^s{}_r N_p^t{}_q = 0. \quad (4.17)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial N_p^r{}_q}{\partial t^s} - \frac{\partial N_p^r{}_s}{\partial t^q} = -\frac{1}{4} G^2 (H_{pq} H_s^r - H_{ps} H_q^r) / S^2. \quad (4.18)$$

Используя тождества (4.17)-(4.18) в квазиевклидовом тензоре кривизны:

$$R_p^r{}_{qs}(g; t) := \frac{\partial N_p^r{}_q}{\partial t^s} - \frac{\partial N_p^r{}_s}{\partial t^q} + N_p^w{}_q N_w^r{}_s - N_p^w{}_s N_w^r{}_q, \quad (4.19)$$

мы приходим к простому результату:

$$R_{pqrs}(g; t) = -\frac{1}{4}G^2(H_{pq}H_{rs} - H_{ps}H_{qr})/S^2. \quad (4.20)$$

Отсюда вытекают тождества

$$L^p R_{pqrs} = L^q R_{pqrs} = L^r R_{pqrs} = L^s R_{pqrs} = 0. \quad (4.21)$$

Замечание. Вследствие законов преобразования (3.12) и (3.47) представление (4.20) равнозначно формулам (2.69) – (2.70). Следовательно мы получили другое строгое доказательство Теоремы 3, а также формулы (2.73), показывающей кривизну Финслероида.

Литература

- [1] E. Cartan: *Les espaces de Finsler*, Actualites 79, Hermann, Paris 1934.
- [2] Г. Буземан: *Геометрия Геодезических*, Физ.-Мат., М. 1962.
- [3] Х. Рунд: *Дифференциальная геометрия Финслеровых Пространств*, Наука, М. 1981.
- [4] G. S. Asanov: *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1985.
- [5] G. S. Asanov: *Aeq. Math.* **49** (1995), 234; *Rep. Math. Phys.* **45** (2000), 155; **47** (2001), 323; *Moscow University Physics Bulletin* **49**(1) (1994), 18; **51**(1) (1996), 15; **51**(2) (1996), 6; **51**(3) (1996), 1; **53**(1) (1998), 15.
- [6] G. S. Asanov: arXiv: hep-ph/0306023, 2003; arXiv: math-ph/0310019, 2003; arXiv: math.m.g./0402013, 2004.
- [7] К. Мёллер: *Теория Относительности*, Атомиздат, М. 1975.
- [8] Дж. Синг: *Общая Теория Относительности*, Ин.Лит., М. 1963.
- [9] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, gr-qc/0206004.
- [10] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Quadrahyperbolic Numbers and Associated Nonlinear Invariance*, gr-qc/021290.

Приложение

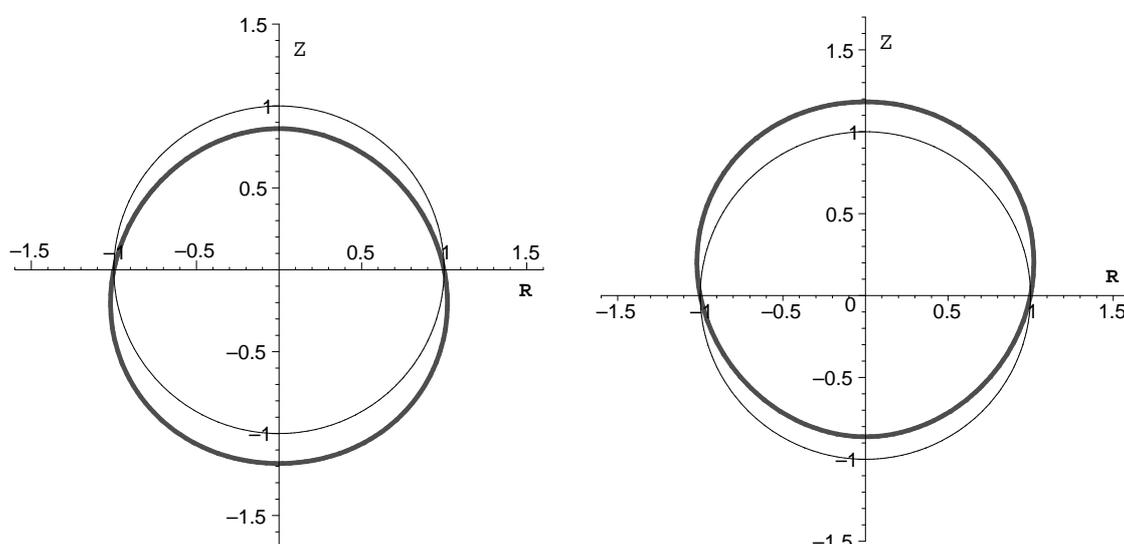


Рис. 3: $g = 0.2$ и $g = -0.2$

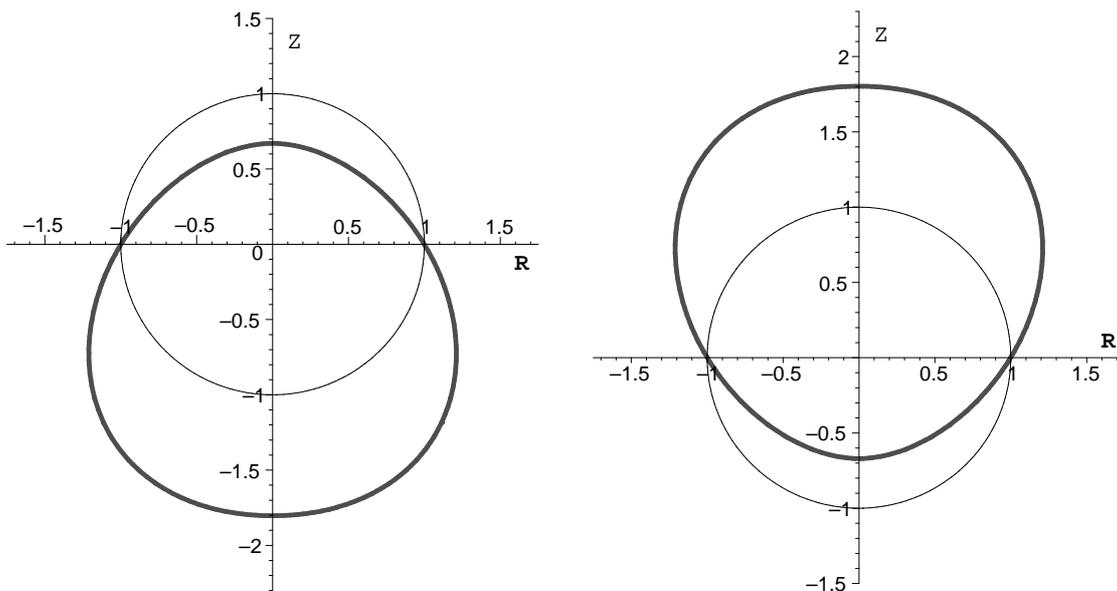


Рис. 4: $g = 0.6$ и $g = -0.6$

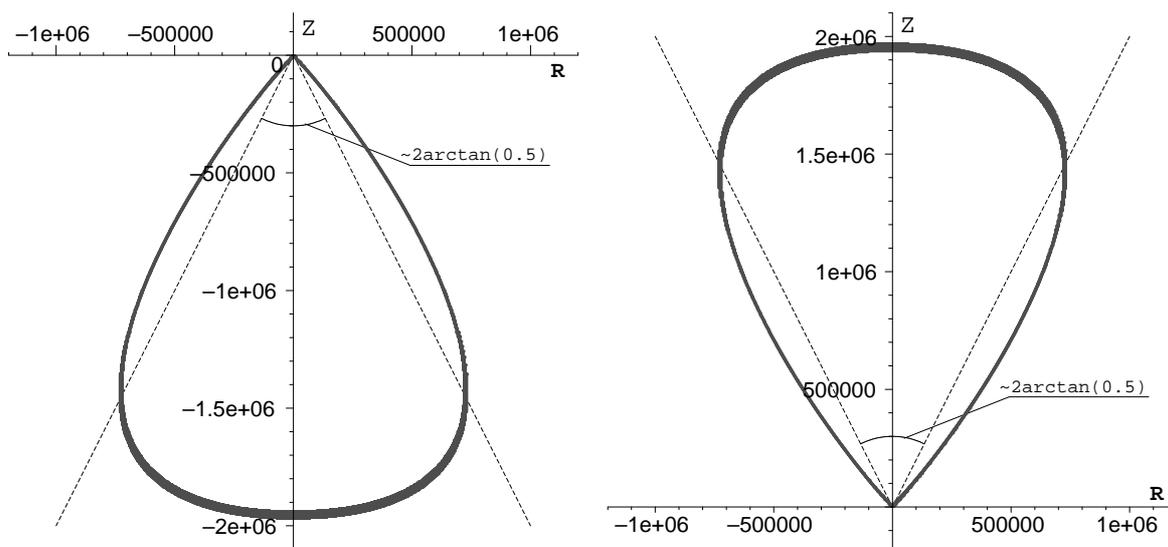


Рис. 5: $g = 1.96$ и $g = -1.96$

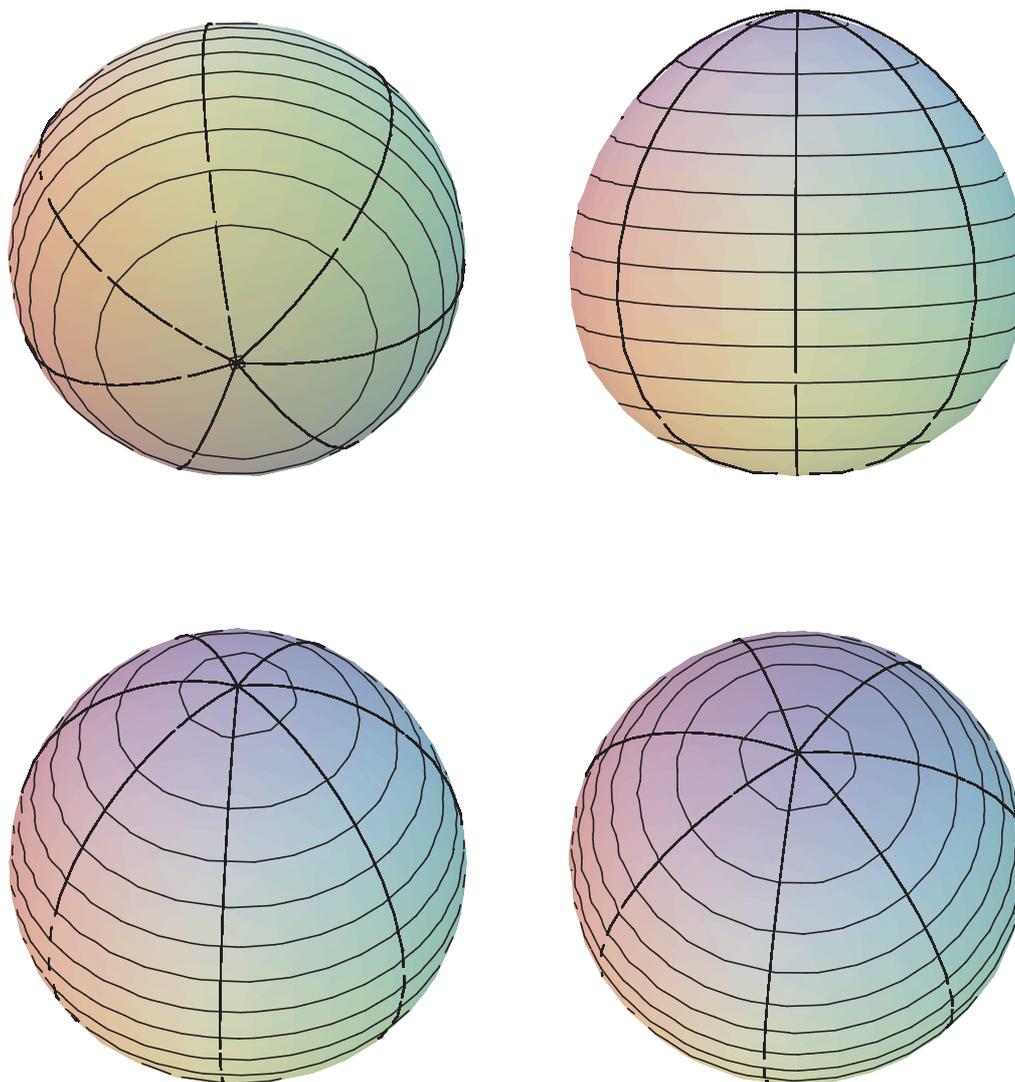


Рис. 6: 3D-образы Финслероида; $g = 0.6$