ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ВРЕМЯ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
postmaster@hypercomplex.ru

На основе финслеровой метрической функции Бервальда-Моора строится обобщенно-метрическое пространство, которое может быть названо плоским четырехмерным временем. Данное многообразие позволяет ввести физические понятия: события, мировой линии, системы отсчета, множества относительно одновременных событий, собственного времени, трехмерного расстояния, скорости и других. Показано, как в абсолютно симметричном четырехмерном времени, с точки зрения физического наблюдателя, ассоциируемого с некоторой мировой линией, происходит противопоставление координаты, задающей его собственное время, с координатами, появляющимися в результате измерений с использованием эталонных сигналов. Когда сигналам соответствуют линии, почти параллельные мировой линии наблюдателя, в представлениях последнего возникает трехмерное пространство, в пределе оказывающееся евклидовым.

1. Введение

За последние сто лет в физике укоренилось представление, что в фундаменте геометрии реального пространства-времени лежит псевдоевклидова метрика со знакопеременной квадратичной зависимостью длины вектора от величины его компонент. Однако, многочисленные и разнообразные попытки связать с этой метрикой все известные силы природы и воплотить идею о полной геометризации физики до сих пор заканчивались неудачами. Это невольно подталкивает к мысли, что проблема заключается не в недостатке изобретательности ученых, а в самой метрике, вернее, в ее классической квадратичной форме, вместо которой, возможно, более перспективно использовать другие зависимости. К сожалению, и этот путь, на возможность которого обратил внимание еще Риман [1], впервые целенаправленно стал изучать Финслер [2], а к сегодняшнему дню испробовали сотни исследователей [3], также пока не принес существенных результатов. Хотя настоящая работа и продолжает поиски в том же направлении, она существенным образом отличается от многих из них, поскольку опирается на новое для финслеровой геометрии понятие скалярного полипроизведения и метрическую форму, непосредственно связанную с одним из наиболее фундаментальных понятий математики – действительным числом.

2. Многомерные времена

Среди всевозможных линейных финслеровых пространств уникально выделяются пространства, обладающие взаимнооднозначным соответствием с алгебрами, являющимися прямыми суммами нескольких алгебр действительных чисел. Метрические функции таких пространств не зависят от точки и в одном из базисов принимают вид:

$$F(x') = \left|\prod_{i=1}^{n} x'_i\right|^{1/n}, \tag{1}$$

где x_i' – компоненты вектора, а n – число измерений. В теории финслеровых пространств такие метрические функции хорошо известны и получили название функций Бервальда-Моора [3].

Геометрии с такими метриками во многом однотипны, а имеющиеся различия обусловлены исключительно размерностью. Их главной особенностью является полное равноправие всех неизотропных направлений, а поскольку любое из таких направлений может быть связано с собственным временем инерциальной системы отсчета, подобные пространства вполне уместно именовать *многомерными временами.*

Замечание. По-видимому, абстрактная возможность связывать с произвольной прямой собственное время некой инерциальной системы отсчета имеется в любом линейном пространстве, где определен элемент длины в каждой точке. Однако, во многих пространствах некоторые системы отсчета не допускают изотропных связей со всеми остальными прямыми, проходящими параллельно заданной. Для связанных с такими системами отсчета наблюдателей понятие физического расстояния, а следовательно и физического пространства, оказываются прямыми следствиями наличия изотропных векторов, с которыми обычно принято ассоциировать световые сигналы.

Определяемые так вещественные пространства далеко не всегда имеют тот же вид, к которому мы привыкли (по повседневной практике и благодаря усилиям Евклида и Минковского). При этом, в понятие физического пространства приходится вкладывать более общий смысл, чем обычно. С другой стороны, ничто не мешает считать, что в тех секторах или измерениях, где в принципе не устанавливаются изотропные связи, или же они носят какой-то экзотический характер, физические направления можно считать просто не обнаружимыми, хотя геометрически и присутствующими. Таким образом, логически вполне допустимо существование пространств, часть направлений и даже измерений которых физически внешне не проявляются. С такой точки зрения было бы очень интересно проанализировать произвольные линейные пространства, в частности, связанные с квадратичными формами и метриками Бервальда-Моора, взятыми над полем комплексных чисел.

Выделенным геометрическим элементом каждого n-мерного времени является его изотропное подпространство, представляющее собой фигуру из n гиперплоскостей, делящих все многообразие на 2^n равноправных односвязных камер. Любая из таких камер является смежной со всеми остальными, кроме противоположной, с которой граничит только в точке. Классифицировать смежные камеры по отношению к выделенной можно по размерности их общих пограничных подпространств: от 1 до $(n-1)$. Все односвязные камеры одинаковы и имеют форму правильных пирамид, n гиперплоскостей которых, начинаясь из общей вершины, уходят в бесконечность. Такие пирамиды, по аналогии с изотропными конусами пространства Минковского, будем именовать световыми. Каждая *световая пирамида* имеет ровно n одномерных ребер, которые весьма удобно связывать со специальным базисом. В этом базисе геометрические соотношения многомерного времени выглядят наиболее простыми и, поскольку с точностью до перестановок такой базис является единственным, ему вполне логично присвоить имя *абсолютного.*

Любой единичный вектор, принадлежащий внутренней области некоторой световой пирамиды, может быть непрерывным образом переведен в любой другой единичный вектор, принадлежащий той же пирамиде. Соответствующие преобразования образуют абелеву $(n-1)$-параметрическую подгруппу движений, оставляющих инвариантной исходную метрическую функцию (1). Матрицы подобных преобразований в абсолютном базисе приводятся к диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} a'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a'_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\prod_{i=1}^{n} a'_i = 1$. Поскольку такие преобразования оставляют на месте точку схождения вершин всех пирамид, а изотропные грани последних при этом переходят сами в себя, соответствующие отображения можно классифицировать как гиперболические повороты, которые в определенном смысле аналогичны бустам псевдоевклидовых пространств. Помимо гиперболических вращений, среди непрерывных движений многомерного времени присутствует n-параметрическая подгруппа параллельных переносов. Других непрерывных конгруэнтных преобразований рассматриваемые многообразия не содержат и поэтому имеют меньше степеней свободы, чем пространства с квадратичными типами метрик. Именно это обстоятельство побудило Г. Гельмгольца, С. Ли и Г. Вейля доказать ряд теорем, утверждающих исключительность квадратичных метрик [4 – 6]. Главный акцент в их теоремах сделан на максимальной подвижности квадратичных пространств, выражающейся в наиболее богатой по числу свободных параметров группе движений в сравнении с пространствами с иными метрическими функциями. Это, по мнению авторов, дает все основания отказаться от рассмотрения других метрических форм в качестве геометрического фундамента реального пространства-времени. Не отрицая строгости этих теорем, отметим, что их доказательства базируются на рассмотрении только линейных преобразований, а значит оставляют возможность для других геометрий, в которых аналогичную роль могли бы играть некоторые нелинейные симметрии.

В противоположность непрерывным конгруэнтным преобразованиям, дискретные группы симметрий многомерного времени превосходят аналогичные группы евклидовых и псевдоевклидовых пространств, однако этого еще не достаточно для конкуренции с последними.

Что действительно делает многомерное время интересным, так это наличие в нем выделенных групп нелинейных преобразований, являющихся почти столь же фундаментальными, как и группы движений. Такие преобразования сохраняют инвариантными не интервалы, а специфические скалярные формы от нескольких векторов, не имеющие прямых аналогов в квадратичных пространствах, а потому до сих пор остающиеся мало изученными.

Подойти к пониманию важности таких полиформ лучше всего через обобщение понятия скалярного произведения. Оказывается, что для целого ряда линейных финслеровых пространств роль скалярного произведения может играть полилинейная симметрическая форма от n векторов [7], частным случаем которой как раз и является классическая билинейная форма. Условимся такую полилинейную форму именовать *скалярным полипроизведением*. Отталкиваясь от подобного обобщения, можно простым и естественным образом расширить на некоторые финслеровы пространства такие фундаментальные понятия геометрии, как длина, угол, ортогональность и другие, введение которых иными способами сопряжено со значительными трудностями [8].

Для многомерного времени скалярное полипроизведение в абсолютном базисе имеет вид:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Z}) = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a'_{i_1} b'_{i_2} \dots z'_{i_n}, \quad \text{при} \quad i_j \neq i_k, \ \text{ если } j \neq k. \tag{3}$$

Несложно проверить, что при $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \cdots = \mathbf{Z}$ форма (3) переходит в метрическую функцию (1). Используя полилинейную симметрическую форму вида (3), можно построить геометрию линейного времени произвольной натуральной размерности, однако, опираясь на обычные представления о числе физических измерений и явную топологическую выделенность четырехмерного пространства [9], ограничимся пока именно этим случаем.

3. Четырехмерное время

В соответствии с (3), скалярное полипроизведение, определяющее геометрию четырехмерного времени, в абсолютном базисе принимает вид:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \frac{1}{4!} \sum_{(i_1, i_2, i_3, i_4)} a'_{i_1} b'_{i_2} c'_{i_3} d'_{i_4}, \quad \text{при} \quad i_j \neq i_k, \ \text{ если } j \neq k, \tag{4}$$

отсюда следует, что четвертая степень длины (интервала) вектора такого линейного пространства определяется выражением:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) = |\mathbf{X}|^4 = x'_1 x'_2 x'_3 x'_4. \tag{5}$$

При переходе в базис, аналогичный ортонормированному [7] (он несколько нагляднее, чем абсолютный), данное выражение преобразуется к более сложной (но по-прежнему симметричной) форме:

$$|\mathbf{X}|^4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2) + 8 x_1 x_2 x_3 x_4. \tag{6}$$

В ряде случаев данную форму удобнее использовать в виде, выделяющем одну из координат, в частности, x_1:

$$|\mathbf{X}|^4 = x_1^4 - 2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) x_1^2 + 8(x_2 x_3 x_4) x_1 + (x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_2^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_4^2 - 2x_3^2 x_4^2). \tag{7}$$

Основным аргументом в пользу возможности сопоставить с четырехмерным временем реальный физический мир является наличие в его геометрии нелинейной группы непрерывных симметрий [10], которую можно рассматривать как альтернативу линейной группе пространственных поворотов пространства Минковского. Инвариантом данных преобразований оказывается не скалярное полипроизведение четырехмерного времени (4), а специфическая форма, в образовании которой участвуют только два вектора:

$$S(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{B})}{(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A})^{1/2}} + \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})}{(\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})^{1/2}}. \tag{8}$$

Хотя форма $S(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и не является аддитивной величиной, для векторов, принадлежащих внутренней области одной световой пирамиды, она удовлетворяет другим важным свойствам обычного скалярного произведения, а именно: симметрии, правилу умножения на скаляр, знаковой определенности и правилу треугольника [10]. В связи с этим, в четырехмерном времени существует принципиальная возможность ввести понятие трехмерного расстояния, которое соответствует большинству привычных представлений о данной физической величине, кроме аддитивности. С философской точки зрения отсутствие последнего свойства весьма естественно. Действительно, почему закон сложения трехмерных скоростей должен концептуально отличаться от закона сложения трехмерных расстояний, ведь относительны обе эти величины? Проявляется такая нелинейность только на больших расстояниях, подобно тому, как нелинейность закона сложения скоростей существенна только в релятивистской области. При этом роль скорости света для трехмерных расстояний берет на себя дополнительная фундаментальная постоянная – максимально возможный размер физической системы, или иными словами, радиус Вселенной. Для обычных в повседневной практике расстояний мы по-прежнему можем пользоваться линейным приближением, однако в космологических масштабах, в случае справедливости концепции многомерного времени, потребуется внести соответствующие коррективы.

4. Множество относительно одновременных событий

Чтобы естественным образом подойти к определению в четырехмерном времени понятий трехмерных скоростей и расстояний, определимся сначала с множествами *относительно одновременных событий*. Под таковыми условимся понимать совокупности точек, равноудаленных (естественно в смысле принятой финслеровой метрики (5)) от некоторых пар фиксированных событий. В отличие от пространства Минковского, где аналогичным образом определенные множества представляют собой гиперплоскости, в четырехмерном времени соответствующие поверхности нелинейны [11]. Их форма зависит не только от направления мировой линии, соединяющей фиксированные точки, но и от величины интервала, их разделяющего. Это наиболее фундаментальное отличие от пространства специальной теории относительности, поскольку понятие одновременности теперь определяется не только скоростью системы отсчета, но и интервалом времени, разделяющим мгновенное положение наблюдателя и изучаемый им пространственный слой событий. Таким образом, релятивизм в четырехмерном времени затрагивает не только гиперболические повороты, с помощью которых осуществляется переход от одних систем отсчета к другим, но и трансляции, позволяющие менять уже точки отсчета.

Философски такое обобщение принципа относительности вполне последовательно, поскольку, по сути, констатирует своеобразное родство между двумя подгруппами полной группы конгруэнтных симметрий. Косвенным подтверждением данного вывода может служить и факт, что трансляциям в алгебре, сопоставляемой четырехмерному времени, соответствует операция сложения, а гиперболическим поворотам – умножения, в родственной же связи этих двух фундаментальных операций математики сомневаться не приходится.

Естественным способом введения в четырехмерном времени понятия *физического расстояния* является прием, концептуально вполне аналогичный способу определения данного понятия в пространстве Минковского. По определению, под расстояниями можно понимать величины, равные (или пропорциональные) интервалам времени, проходящим на мировой линии наблюдателя, между посылкой им некоторых равномерно движущихся эталонных сигналов к мировым линиям изучаемых объектов и последующим приемом отраженных сигналов обратно. Такое правило приводит к тому, что в четырехмерном времени понятие расстояния бессмысленно применять к отдельным парам событий, оно продуктивно лишь в отношении их цепочек, представленных определенными линиями. В пространстве Минковского на данное обстоятельство можно было не обращать внимания, так как множества относительно одновременных событий там представляли собой гиперплоскости, в результате чего расстояния, определяемые, в общем-то, для произвольных пар параллельных прямых, оставались содержательными и для пар точек.

Чтобы не загромождать короткую статью излишней общностью, но при этом все же быть достаточно конкретными, ниже приведем результат, к которому приводит описанный выше алгоритм лишь в одном частном случае. Предполагается, что мировая линия наблюдателя совпадает с действительной осью, сам он находится в точке $(T, 0, 0, 0)$, а интересующий его слой относительно одновременных событий проходит через точку $(0, 0, 0, 0)$, Рис. 1. [Здесь и далее фигурирующие координаты относятся к обобщенно-ортогональному базису [7], существенно отличающемуся от абсолютного].

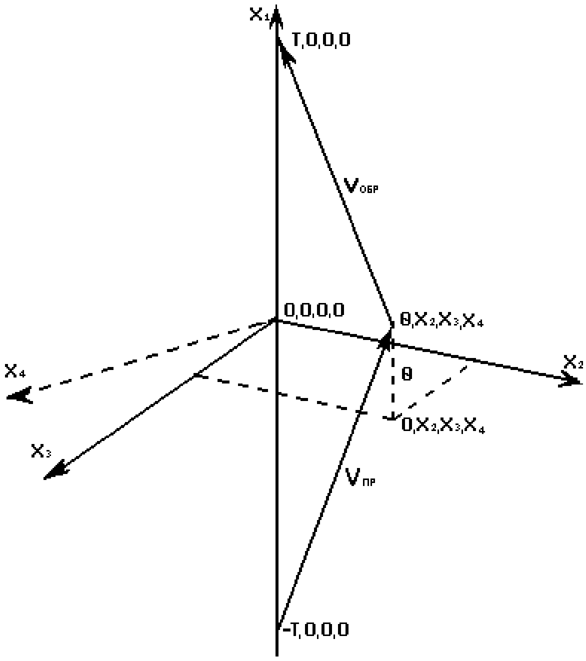

Рис. 1: Мировые линии прямого и обратного сигналов с равным модулем скорости

В рассматриваемом примере уравнение, связывающее действительную координату θ некоторой точки поверхности одновременности с тремя другими ее координатами x_2, x_3 и x_4, получается из условия равенства длин векторов, обладающих компонентами $(T+\theta, x_2, x_3, x_4)$ и $(T-\theta, -x_2, -x_3, -x_4)$. (Величина θ здесь имеет смысл отклонения конкретного события от гиперплоскости $x_1 = 0$.) Используя выражение для величины интервала (7), и одновременно учитывая, что для четных степеней $(-x)^n = x^n$, имеем:

$$(T+\theta)^4-2(x_2^2-x_3^2+x_4^2)(T+\theta)^2+8(x_2x_3x_4)(T+\theta)+(x_2^4+x_3^4+x_4^4-2x_2^2x_3^2-2x_2^2x_4^2-2x_3^2x_4^2) =$$
$$(T-\theta)^4-2(x_2^2+x_3^2+x_4^2)(T-\theta)^2+8(x_2x_3x_4)(T-\theta)+(x_2^4+x_3^4+x_4^4-2x_2^2x_3^2-2x_2^2x_4^2-2x_3^2x_4^2)$$

Раскрытие скобок и приведение подобных приводит к уравнению

$$T\theta^3 + (T^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)T\theta + 2x_2x_3x_4T = 0. \tag{9}$$

Вводя безразмерные величины $\eta = \theta/T, \chi_2 = x_2/T, \chi_3 = x_3/T, \chi_4 = x_4/T$ и учитывая, что $T \neq 0$, получаем кубическое уравнение относительно η:

$$\eta^3 + (1 - \chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_4^2)\eta + 2\chi_2\chi_3\chi_4 = 0. \tag{10}$$

Его действительный корень характеризует относительную величину отклонения абсциссы поверхности одновременности от проходящей через ее центр касательной гиперплоскости $x_1 = 0$. Условимся такой параметр именовать *коэффициентом неплоскостности.* Когда $\chi_2 \approx \chi_3 \approx \chi_4 \to 0$, η также стремится к нулю, т. е. в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$ поверхность одновременности переходит в гиперплоскость $x_1 = 0$.

Физический смысл поверхность одновременности имеет только внутри световой пирамиды, которой принадлежит мировая линия наблюдателя, в противном случае пришлось бы допустить и физический смысл сверхсветовых скоростей. Следуя методике специальной теории относительности, с каждым вектором, имеющим начало в точке $(-T, 0, 0, 0)$, а конец на поверхности одновременности, т. е. в точке $(\eta T, x_2, x_3, x_4)$, вполне естественно связывать мировую линию сигнала, обладающего определенной равномерной скоростью. Всем таким векторам, если они имеют одинаковые величины интервалов, поставим в соответствие сигналы с одним и тем же значением модуля скорости $|\mathbf{v}_{\text{пр}}|$. В соответствии с этой логикой сигнал, сопоставляемый вектору, соединяющему точку $(\eta T, x_2, x_3, x_4)$ с точкой $(T, 0, 0, 0)$, обладает равной, но обратной по величине скоростью $|\mathbf{v}_{\text{обр}}|$. В отличие от пространства Минковского такие вектора имеют компоненты, разнящиеся не только по знаку, но и по величине (Рис. 1), а именно: $\mathbf{v}_{\text{пр}} \leftrightarrow (\eta T + T, x_2, x_3, x_4)$ и $\mathbf{v}_{\text{обр}} \leftrightarrow (T - \eta T, -x_2, -x_3, -x_4)$. В пространстве Минковского коэффициент неплоскостности η для каждой точки поверхности одновременности равен нулю, в результате чего компоненты векторов, соответствующие прямому и обратному сигналам, принимают обычный вид: $\mathbf{v}_{\text{пр}} \leftrightarrow (T, x_2, x_3, x_4)$ и $\mathbf{v}_{\text{обр}} \leftrightarrow (T, -x_2, -x_3, -x_4)$.

Для конкретного определения расстояния между действительной осью и произвольной параллельной ей линией, полностью характеризующейся тремя фиксированными координатами x_2, x_3, x_4, необходимо иметь эталонные сигналы, а вернее связанные с ними вектора, с помощью которых можно откладывать интервалы, соответствующие расстояниям в различных направлениях. В четырехмерном времени, как и в пространстве специальной теории относительности, такие эталонные сигналы наиболее удобно связывать с изотропными векторами, имеющими с одной стороны общее начало, а с другой – упирающиеся в поверхность одновременности. В геометрии Минковского множество концов таких векторов представляет собой пересечение двух световых конусов: будущего с вершиной в точке $(-T, 0, 0, 0)$ и прошлого, вершина которого смещена в точку $(T, 0, 0, 0)$. Как известно, результатом такого пересечения является обычная сфера, целиком лежащая в гиперплоскости $x_1 = 0$. Это характерно только для пространств с квадратичным типом метрики. Во всяком случае, в четырехмерном времени аналогичная фигура, получаемая как результат пересечения двух противолежащих световых пирамид, является существенно не плоской, хотя и состоит из линейных элементов.

Наглядно убедиться в этом лучше на примере не четырех-, а трехмерного времени [12], в частности, взглянув на Рис. 2, на котором в изометрии представлено пересечение двух световых пирамид. Для сравнения на том же рисунке изображено пересечение двух световых конусов трехмерного псевдоевклидова пространства. В трехмерном времени внутренняя область, принадлежащая обеим пирамидам, представляет собой обычный куб, одной из главных диагоналей которого является отрезок действительной оси $[-T, T]$. При этом пересечение двух световых пирамид оказывается фигурой, составленной из $(n-2)$-граней такого куба, не содержащих точки $-T$ и T. В данном случае, это шестиугольник $ABCDEF$ и он не принадлежит плоскости $x_1 = 0$, хотя и состоит из прямолинейных элементов.

Аналогично и в четырехмерном времени: область, принадлежащая одновременно двум противолежащим световым пирамидам, является четырехмерным кубом, а поверхность пересечения их изотропных граней оказывается образованной двенадцатью 2-гранями такого куба, не содержащими концы главной диагонали $[-T, T]$. Изобразить на плоском чертеже подобную фигуру трудно, поэтому мы ограничимся рассмотренным выше трехмерным прототипом. В работе [13] предпринята попытка рассмотреть соответствующий двенадцатигранник (правда, от ее автора, по-видимому,

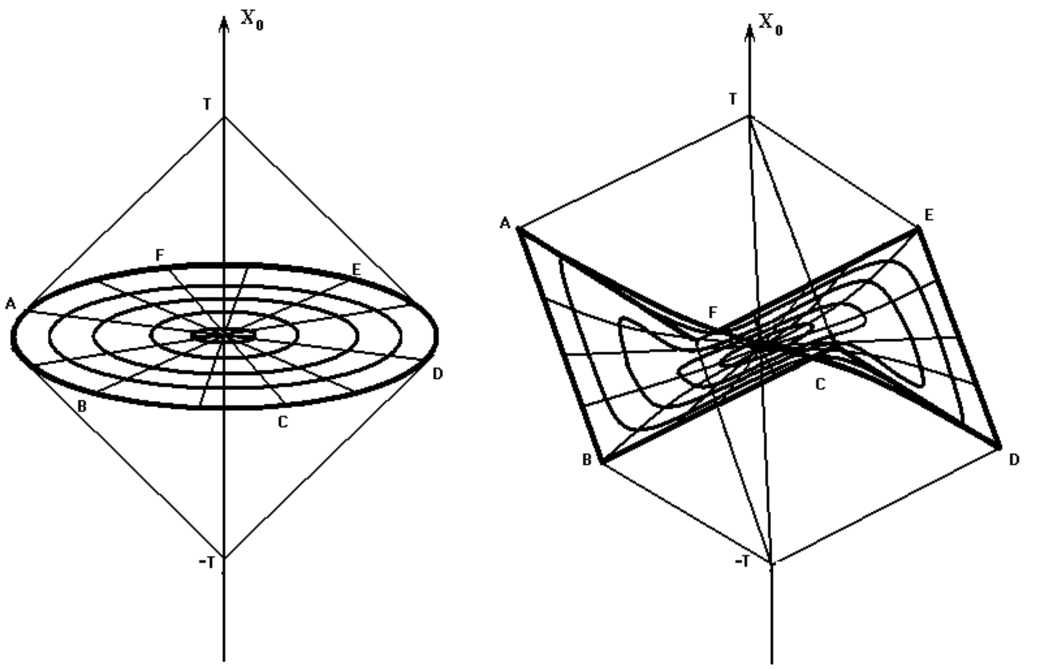

Рис. 2: Поверхность одновременности в трехмерном времени (справа) и трехмерном псевдоевклидовом пространстве (слева)

ускользнул принципиально четырехмерный характер исследуемой фигуры, и он изобразил ее как обычную трехмерную).

В пространстве Минковского мировые линии, параллельные мировой линии наблюдателя и касающиеся фигуры, являющейся пересечением двух световых конусов, принимаются за равноудаленные точки физического пространства наблюдателя, а в качестве расстояния берется величина, пропорциональная длине оси такого двойного конуса. В четырехмерном времени можно поступить аналогичным образом. В этом случае равноудаленными от действительной оси (ассоциируемой с мировой линией наблюдателя) оказываются параллельные ей линии, проходящие через точки пересечения граней двух противолежащих световых пирамид, а в качестве расстояния выступает величина, пропорциональная главной диагонали гиперкуба, получающегося в результате такого пересечения. Чтобы найти численное значение этой величины, необходимо из четырех действительных корней уравнения

$$x_1^4 - 2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)x_1^2 + 8(x_2x_3x_4)x_1 + (x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_2^2x_4^2 - 2x_3^2x_4^2) = 0, \quad (11)$$

представляющих собой ничто иное, как абсциссы точек пересечения прямой, связанной с координатами x_2, x_3, x_4, и четырех изотропных гиперплоскостей, выбрать два, имеющие физический смысл. Один из этих корней $x_{1,1}$ соответствует точке, принадлежащей пирамиде прошлого, другой $x_{1,2}$ – пирамиде будущего, тогда как два "лишних" корня $x_{1,3}$ и $x_{1,4}$ принадлежат граням боковых пирамид. Расстояние может быть принято как половина суммы первых двух корней: $R_c = 1/2(x_{1,1} + x_{1,2})$, при этом индекс "c" подчеркивает, что данная величина определяется с помощью световых сигналов.

Трехмерное пространство, возникающее в результате подобной процедуры, является финслеровым и полностью характеризуется своей индикатрисой, роль которой как раз и играет описанный в [13] двенадцатигранник. Это пространство по своим свойствам достаточно близко евклидову, в силу выпуклости и двухмерной замкнутости его индикатрисы, которая мало отличается от индикатрисы евклидова пространства, представляющей собой обычную сферу. Однако разница между евклидовой сферой и рассматриваемым двенадцатигранником все же достаточно принципиальна, чтобы спутать связанные с ними геометрии. Именно поэтому в работе [13] делается вывод о нелогичности предположения, что в основе геометрии реального мира лежит метрика четырехмерного времени. Однако, на наш взгляд, при формулировке данного вывода не учитывалось то важное обстоятельство, что при ориентации в физическом пространстве наблюдатель пользуется не столько световыми, сколько существенно более медленными сигналами. Свет же играет лишь вспомогательную роль, призванную идентифицировать объекты, тогда как сопоставление этим объектам расстояний осуществляется уже другими, более медленными способами. В специальной теории относительности данный факт не имеет никакого значения, так как индикатриса физического пространства совершенно не зависит от скорости сигналов. В многомерном времени это уже не так. Чем больше скорость зондирующих сигналов отличается от световой, тем меньше соответствующая им индикатриса "выпирает" из гиперплоскости, тем более округлыми становятся ее "углы", и тем ближе ее форма к трехмерной сфере. В пределе, когда относительная скорость сигналов, с помощью которых "ощупывается" физическое пространство, стремится к нулю, оно вообще перестает отличаться от евклидова. Таким образом, если в четырехмерном времени факт присутствия каких-то неподвижных объектов фиксировать с помощью света, но расстояния между ними определять при помощи других, более медленных сигналов, то обнаружить удастся только евклидову геометрию. Заметим, что именно такие условия выполняются в большинстве обычных для человека ситуаций.

С другой стороны, почти не вызывает сомнений принципиальная возможность поставить эксперимент, позволяющий прояснить, какая все-таки геометрия имеет лучшее соответствие с реальным физическим пространством: риманова или финслерова? Для этого необходимо, чтобы замеры расстояний между несколькими фиксированными друг относительно друга объектами, производились как с помощью световых, так и более медленных сигналов. Парадоксально, но в колоссальном экспериментальном материале, имеющемся в арсенале современной физики, подобные опыты, во всяком случае, не допускающие двоякой трактовки, по-видимому, отсутствуют. Кроме того, отличия, которые нужно при этом отследить, относительно невелики и поэтому, даже будучи обнаруженными, могут истолковываться по-разному.

Принятая выше концепция построения трехмерного физического пространства объясняет, почему в абсолютно равноправном по своим геометрическим координатам четырехмерном времени наблюдатель, ассоциированный с некоторой мировой линией, зарегистрирует принципиальное отличие координаты, связываемой с его собственным временем, от трех других. Ответ заключается в топологическом различии индикатрис геометрического и физического пространств. (Под геометрическим мы понимаем само финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора, а под физическим – трехмерное многообразие, возникающее в представлении наблюдателя, оперирующего некоторыми эталонными сигналами.) Так, если первая индикатриса имеет вид специфического шестнадцатиполостного гиперболоида, вторая – представляет собой замкнутое по двум измерениям кольцо, точная форма которого, хотя и зависит от используемых в измерениях сигналов, в топологическом плане неизменна.

5. Заключение

Преобразования, сохраняющие скалярную форму (8), не оставляют инвариантными интервалы и, строго говоря, не являются движениями четырехмерного времени. Однако, поскольку они переводят в себя гиперповерхности одновременности типа

(10) и не изменяют трехмерных расстояний R_c, то вполне могут исполнять роль обычных физических поворотов. Кстати, при такой интерпретации реальных пространственных вращений неожиданно может получить объяснение известный парадокс, связанный с наблюдаемыми отличиями между поступательными и вращательными движениями. К последним достаточно сложно применить принцип относительности, а наиболее известная попытка разобраться в данной проблеме принадлежит Маху, который предположил, что центробежные силы, возникающие при вращении, обязаны своим появлением действию огромной массы всех тел Вселенной. Согласно Маху, если закрутить всю Вселенную, на оставшееся неподвижным малое тело будут действовать центробежные силы, в точности равные силам, возникающим при вращении самого тела. Справедливость такого утверждения остается спорной, а сам вопрос так и не потерял своей актуальности. В случае, если реальному миру вместо галилеевой или псевдоевклидовой метрик сопоставлять геометрию четырехмерного времени, проблема не возникает, так как преобразования, отвечающие за поступательные и вращательные движения этого пространства, относятся к принципиально разным типам непрерывных симметрий.

Проведенный в данной работе анализ свойств многообразия, претендующего на роль альтернативы пространству Минковского, далек от завершенности. Однако факт, что для одной из самых простых финслеровых метрик четвертого порядка, ничего общего не имеющей с обычной квадратичной формой, можно указать условия, при которых она в состоянии породить не только классические, но и релятивистские представления о физическом пространстве, – заслуживает внимания.

Литература

[1] Б. Риман: *О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии*; – В кн.: Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.

[2] P. Finsler: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Göttingen, 1918 (Dissertation).

[3] G. S. Asanov: *Finslerian Extension of General Relativity*, Reidel, Dordrecht, 1984.

[4] Г. Гельмгольц: *О фактах, лежащих в основании геометрии.*– В кн.: Об основаниях геометрии, ТТЛ, М. 1956.

[5] С. Ли: *Замечания на работу Гельмгольца "О фактах, лежащих в основании геометрии".* – В кн.: Об основаниях геометрии, ТТЛ, М. 1956.

[6] Г. Вейль: *Пространство, время, материя*, Янус, М. 1996.

[7] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, aArXiv:gr-qc/0206004.

[8] Х. Рунд: *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Наука, М. 1981.

[9] Р. В. Михайлов: *О некоторых вопросах четырехмерной топологии: обзор современных исследований*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[10] D. G. Pavlov: *Nonlinear Relativistic Invariance For Quadrahyperbolic Numbers*, arXiv: gr-qc/0212090.

[11] Д. Г. Павлов: *Четырехмерное время как альтернатива пространству-времени Минковского*, Труды международной конференции "GEON-2003", Казань, 2003.

[12] Д. Г. Павлов: *Хронометрия трехмерного времени*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[13] Г. Ю. Богословский: *Статус и перспективы теории локально анизотропного пространства-времени*, Физика ядра и частиц. Издательство МГУ, М. 1997.