ОБОБЩЕНИЕ АКСИОМ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
postmaster@hypercomplex.ru

При изучении многих свойств как евклидовых, так и псевдоевклидовых пространств, необходимо понятие скалярного произведения. В настоящей работе обобщение этого понятия проводится применительно к специальному подклассу финслеровых пространств, которые предложено называть полилинейными. Для этого аксиоматически вводятся понятия скалярного полипроизведения и связанной с ним фундаментальной метрической полиформы, отталкиваясь от которых определяются различные метрические параметры, такие как длины векторов и углы между ними, а также обобщается понятие ортогональности направлений. На примере конкретной полиформы рассмотрены некоторые особенности геометрии четырехмерного линейного финслерова пространства, связанного с алгеброй коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел и названного квадрачисловым.

1. Скалярное произведение евклидовых пространств

За две тысячи лет, прошедших с момента появления знаменитых "Начал", математики испробовали множество различных способов описания евклидовых пространств. Среди них наиболее известны системы аксиом Евклида и Гильберта. Однако, по современным представлениям самой удобной является система аксиом, использующая понятия действительного числа, линейного пространства и скалярного произведения над ними [1]. При этом немногие знают, что появление в геометрии последнего способа во многом обязано открытию в 1843 году Уильямом Гамильтоном некоммутативной алгебры четырехкомпонентных гиперкомплексных чисел, названной им алгеброй кватернионов [2]. Этому открытию предшествовало несколько лет упорных поисков трехкомпонентных чисел, триплетов, которым можно было бы сопоставлять вектора обычного пространства, наподобие того, как комплексным числам сопоставляются вектора евклидовой плоскости. Решение проблемы нашлось, когда Гамильтон отказался от коммутативности умножения, а вместо триплетов стал рассматривать объекты с четырьмя компонентами.

По определению, кватернион – это гиперкомплексное число, которое можно представить в виде линейной комбинации:

$$X = x_0 + i \cdot x_1 + j \cdot x_2 + k \cdot x_3,$$

где x_i – действительные числа, а i, j, k — неравные друг другу мнимые единицы, такие что $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ и $ij + ji = jk + kj = ki + ik = 0$. Эти правила, включая правила умножения на обычную действительную единицу, нередко сводят в так называемую таблицу умножения гиперкомплексных чисел, которая в случае кватернионов имеет вид:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

.

Гамильтон предложил различать в кватернионе скалярную часть x_0 и векторную часть $\mathbf{V}_x = \mathbf{i}\cdot x_1 + \mathbf{j}\cdot x_2 + \mathbf{k}\cdot x_3$. При этом, как нетрудно проверить, произведение двух векторных кватернионов является обычным кватернионом:

$$\mathbf{V}_x\mathbf{V}_y = (-x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + [\mathbf{i}(x_2y_3 - x_3y_2) + \mathbf{j}(x_3y_1 - x_1y_3) + \mathbf{k}(x_1y_2 - x_2y_1)],$$

скалярная часть которого представляет собой симметрическую билинейную форму, а векторная имеет вид обычного векторного умножения. Собственно сами термины скалярного и векторного произведений появились именно отсюда и впервые были введены непосредственно Гамильтоном.

Первые исследователи кватернионов видели в них, прежде всего, возможность оперировать с точками и векторами обычного пространства алгебраическими методами, хотя данным гиперкомплексным числам более естественно сопоставлять пространство четырех измерений. Сам Гамильтон знал о подобной возможности, полагая, что данное обстоятельство когда-нибудь удастся использовать для описания времени. В этом случае кватернионы стали бы естественным инструментом не только геометрии, но и физики.

К сожалению, сегодня кватернионы известны только узкому кругу специалистов. Связано это с тем, что возникшее из алгебры кватернионов понятие скалярного произведения оказалось весьма удобным и очень скоро выделилось в самостоятельную геометрическую категорию, почти полностью вытеснив из обихода науки породившие его гиперкомплексные числа. В свое время, среди физиков и математиков возникла серьезная дискуссия между приверженцами алгебры кватернионов и сторонниками нарождавшегося тогда векторного исчисления. Как известно, векторный подход одержал верх, чему в немалой степени способствовали объективные трудности распространения на алгебру кватернионов методов теории функций комплексного переменного, обусловленные особенностями некоммутативного умножения.

Связанное с кватернионами скалярное произведение применимо исключительно к трехмерным векторам. Однако, если скалярное произведение оторвать от конкретных чисел и обобщить на пространства произвольной размерности, сохраняются основные достоинства данного понятия – возможность математически строго определять длины векторов и углы между ними. Для этого над аффинным пространством размерности m постулируется некоторая симметрическая билинейная форма двух векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \alpha_{ij}a_ib_j$. Взаимно однозначно связанная с нею квадратичная форма $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ должна быть неотрицательной. Далее по определению принимается, что аффинное отображение, переводящее вектор $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}'$, является конгруэнтным, если оно оставляет инвариантной эту квадратичную форму:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = (\mathbf{A}', \mathbf{A}').$$

Две фигуры, которые могут быть переведены одна в другую конгруэнтным отображением, считаются конгруэнтными. Именно этим в аксиоматическом построении евклидовой геометрии определяется понятие конгруэнции. Для конгруэнтного отображения справедлива инвариантность не только квадратичной, но и билинейной формы:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}', \mathbf{B}').$$

Поскольку два вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = (\mathbf{A}', \mathbf{A}'),$$

то значение $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ можно ввести как числовую характеристику вектора $\mathbf{A}$. Однако, вместо этого принято использовать величину положительного квадратного корня из

$(\mathbf{A}, \mathbf{A})$, которую по определению называют длиной вектора $\mathbf{A}$ и обычно обозначают как

$$|\mathbf{A}| = (\mathbf{A}, \mathbf{A})^{1/2}.$$

Такое определение позволяет выполнить еще одно условие: длина суммы двух сонаправленных векторов равна сумме их длин.

Понятие длины вектора позволяет ввести определение единичного вектора (Здесь и далее единичные векторы будут обозначаться малыми полужирными буквами). Их связь с обычными векторами выражается соотношениями вида:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|.$$

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а также $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{b}'$ – две пары векторов единичной длины, то фигура, образованная двумя первыми векторами, тогда и только тогда конгруэнтна фигуре, составленной из двух последних, когда выполняется равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}').$$

Носителем данного качества конгруэнтности евклидовых пространств принято считать понятие угла. Однако числовую характеристику угла связывают не с самой билинейной формой от единичных векторов, а с трансцендентной функцией арккосинуса от нее

$$\phi = \arccos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Данное определение понятия угла эквивалентно утверждению, что углом в евклидовом пространстве называется длина дуги на единичной сфере между концами векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Такое усложнение для численной меры угла компенсируется приобретаемым свойством аддитивности. При сложении двух углов, лежащих в одной плоскости, их величины складываются.

Частным следствием понятия угла является свойство перпендикулярности направлений. Условие перпендикулярности двух векторов заключается в равенстве нулю значения их билинейной формы. Особый статус перпендикулярных направлений объясняется многими причинами, например, упрощением вида квадратичной метрической формы, представленной в базисе, все вектора которого взаимно перпендикулярны.

Среди пространств с квадратичной метрической формой выделяются двухмерные. Эту особенность отражает теорема Лиувилля, согласно которой для евклидовых и псевдоевклидовых пространств с размерностью три и выше конформные преобразования ограничены инверсиями, дилатациями, переносами и вращениями [3]. Другими словами, в двухмерном случае круг преобразований, относящихся к конформным, существенно шире. Математически данный факт находит свое отражение в существовании значительного разнообразия аналитических функций комплексного переменного, каждой из которых соответствует определенное конформное отображение евклидовой плоскости.

2. Скалярное произведение псевдоевклидовых пространств

Хорошо известно, что если постулированная над аффинным пространством симметрическая билинейная форма порождает знакопеременную квадратичную форму, то задаваемая ею геометрия оказывается уже не евклидовой, а псевдоевклидовой [4]. При этом системы аксиом обоих типов геометрий можно объединить, сняв требование положительности квадратичной формы. Такая объединенная система, в частности, может быть представлена следующим набором аксиом:

(а): каждым двум векторам **A** и **B** линейного пространства ставится в соответствие определенное действительное число, обозначаемое

$$k = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

и называемое, как и в евклидовом случае, скалярным произведением этих векторов;

(б): скалярное произведение коммутативно по отношению к перестановкам векторов

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{B}, \mathbf{A});$$

(в): скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) + (\mathbf{C}, \mathbf{B});$$

(г): действительный множитель можно вынести за знак скалярного произведения

$$(k\mathbf{A}, \mathbf{B}) = k(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Способы определения основных метрических характеристик псевдоевклидовых пространств, являющихся обобщениями соответствующих евклидовых параметров, концептуально не меняются, что позволяет сохранить за ними те же названия. Так, к конгруэнтным относятся преобразования, оставляющие инвариантными модули квадратичных форм всех векторов:

$$|(\mathbf{A}, \mathbf{A})| = |(\mathbf{A}', \mathbf{A})'|.$$

Длина вектора определяется как положительное значение квадратного корня из модуля квадратичной формы:

$$|\mathbf{A}| = |(\mathbf{A}, \mathbf{A})|^{1/2}.$$

Однако при этом появляются так называемые изотропные и мнимые вектора. У первых длина равна нулю при ненулевых компонентах, а у вторых величина квадратичной формы имеет отрицательные значения. Угол между двумя направлениями, как и в евклидовом случае, характеризует конгруэнтность фигуры из двух единичных векторов и по определению принимается равным специальной функции от их билинейной формы:

$$\phi = \operatorname{arcch}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

обеспечивающей аддитивность этого параметра при поворотах в плоскости. Таким образом, угол оказывается равным длине дуги между парой точек на единичной сфере. Однако теперь при вычислении угла необходимо учитывать, в каких областях по отношению к изотропному конусу располагаются задающие вектора, поскольку сфера (точнее, индикатриса) перестает быть односвязной поверхностью.

На псевдоевклидовы пространства обобщается и понятие перпендикулярности векторов. Для этого необходимо равенство нулю их скалярного произведения. Такие вектора принято называть ортогональными.

Псевдоевклидовы пространства допускают также обобщение понятия конформного отображения, определяемое как преобразование, сохраняющее подобие бесконечно малых фигур. В псевдоевклидовых пространствах, как и в евклидовых, выделяется двухмерный случай, для которого конформные преобразования разнообразней, чем при больших размерностях. Отметим и еще одно совпадение – псевдоевклидова плоскость, подобно евклидовой, имеет алгебраический аналог, носящий название *двойных чисел*, отличающихся от комплексных тем, что квадрат их мнимой единицы равен не минус, а плюс единице. Такие числа наравне с комплексными допускают понятие аналитических функций, каждой из которых можно поставить в соответствие некоторое конформное отображение псевдоевклидовой плоскости [5]. Эти особенности двухмерных пространств косвенно указывают на связь между выделенными геометриями и коммутативно-ассоциативными алгебрами, например, алгебрами комплексных и двойных чисел.

Помимо псевдоевклидовой аксиоматики, в геометрии известны и другие подходы к обобщению понятия скалярного произведения, следствиями которых являются системы аксиом для так называемых унитарных и симплектических пространств. Для первых квадратичная форма задается над полем не действительных, а комплексных чисел, а для вторых – вместо симметрической постулируется антисимметрическая билинейная форма [4, 6].

Анализируя рассмотренные выше примеры постулирования понятия скалярного произведения и его обобщений, можно заметить, что их все объединяет связь с той или иной билинейной формой. Однако такая форма – частный случай полилинейной. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли получить содержательную геометрию, если вместо билинейной постулировать трех-, четырех- и так далее, вплоть до полилинейной симметрическую форму?

3. Скалярное полипроизведение

Попробуем, сохранив в качестве основы все аксиомы действительного числа и m-мерного аффинного пространства, добавить к ним следующие:

(а): каждым n векторам $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}$ поставим в соответствие определенное действительное число, обозначаемое

$$k = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}),$$

которое будем называть их *скалярным полипроизведением*;

(б): потребуем, чтобы скалярное полипроизведение было коммутативно по отношению к перестановкам любых, входящих в него векторов:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}) = (\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}) = (\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{Z}) = \cdots = (\mathbf{Z}, \mathbf{C}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A});$$

(в): дистрибутивно относительно их сложения:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} + \mathbf{E}, \ldots, \mathbf{Z}) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}) + (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \ldots, \mathbf{Z});$$

(г): действительный множитель при любом из векторов можно было бы выносить за знак скалярного полипроизведения:

$$(k\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}) = k(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}).$$

Данные аксиомы лишь немного отличаются от соответствующих аксиом скалярного произведения. Кроме того, все они могут быть объединены в едином понятии симметрической полилинейной формы и потому пространства, наделенные одной из таких форм, будем называть *полилинейными*. Рассмотренные выше евклидовы и псевдоевклидовы пространства в соответствии со своими определениями являются частными случаями полилинейных, т. е. удовлетворяют приведенной выше системе аксиом при $n = 2$, что позволяет именовать их *билинейными.*

Скалярное полипроизведение от одного и того же вектора $(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A})$, по аналогии с квадратичной формой билинейных пространств, будем называть *фундаментальной метрической формой* полилинейного пространства, или просто *n-арной полиформой вектора* $\mathbf{A}$.

Аффинные отображения полилинейного пространства, переводящие вектора $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}'$, назовем *конгруэнтными*, если они оставляют инвариантными модули фундаментальных метрических форм:

$$|(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A})| = |(\mathbf{A}', \mathbf{A}', \mathbf{A}', \ldots, \mathbf{A}')|. \tag{1}$$

Именно этим в нашем аксиоматическом построении полилинейного пространства будет определяться понятие *конгруэнции*, а вслед за ним и другие метрические понятия.

Если имеется некоторое множество объектов, для которых выполняются аксиомы аффинного пространства, то мы можем выбрать в нем любую симметрическую полилинейную форму, а, следовательно, и однозначно с ней связанную n-арную полиформу, "назначить" последнюю фундаментальной метрической формой и на ее основе определить понятие конгруэнции так, как это было сделано выше. Тогда с помощью этой формы в аффинное пространство оказывается введенной некоторая метрика, и становится справедливой метрическая геометрия во всей своей полноте. Такое построение не связано ни с размерностью пространства, ни с конкретной размерностью фундаментальной формы, ни с видом последней.

Из свойств симметрии и линейности формы $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z})$ следует, что для конгруэнтного отображения полилинейного пространства справедливы более общие, чем (1), соотношения:

$$\begin{gathered}(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}', \mathbf{A}', \ldots, \mathbf{A}', \mathbf{B}'),\\ (\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{B}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}', \mathbf{A}', \ldots, \mathbf{B}', \mathbf{B}'),\\ \cdots\cdots\cdots\\ (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{C}, \mathbf{Z}) = (\mathbf{A}', \mathbf{B}', \ldots, \mathbf{C}', \mathbf{Z}').\end{gathered}$$

Иными словами, конгруэнтные отображения полилинейного пространства оставляют инвариантными полиформы, в которые вектора входят в любых комбинациях.

О двух векторах полилинейного пространства $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ будем говорить, что они конгруэнтны, если модули соответствующих им n-арных полиформ имеют равные, но отличные от нуля значения:

$$|(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}, \mathbf{A})| = |(\mathbf{A}', \mathbf{A}', \ldots, \mathbf{A}', \mathbf{A}')| \neq 0.$$

В соответствии с данным определением n-арную полиформу можно было бы рассматривать как численный параметр вектора $\mathbf{A}$. Однако вместо этого, как и в билинейных пространствах, стремясь к аддитивности и однозначности свойств, будем использовать не саму полиформу, а положительный корень n-й степени из её модуля, называя эту величину *длиной* вектора $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A}| = |(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}, \mathbf{A})|^{1/n}.$$

Тогда длина суммы двух сонаправленных векторов равна сумме их длин. Следует отметить, что это далеко не единственный способ введения понятия длины с аддитивными свойствами, однако именно при таком подходе длина определена для максимального количества направлений исходного аффинного пространства.

Теперь становится ясным, к какому типу пространств следует отнести те, что мы пытаемся строить при помощи перечисленных выше аксиом скалярного полипроизведения. Во-первых, эти пространства являются *финслеровыми* [7, 8], поскольку их метрические функции не ограничены квадратичными формами. Во-вторых, они принадлежат к классу, известному в финслеровой геометрии под именем *пространств Минковского* [9], к которым принято причислять многообразия, чьи метрические функции не зависят от точки. [Пространство специальной теории относительности – частный случай таких пространств.] Но рассматриваемый нами класс пространств еще уже, поскольку связан со строгим понятием полилинейной симметрической формы. Последнее обстоятельство имеет большое значение, так как именно в этих случаях оказывается возможным ввести характеристики, обобщающие такие фундаментальные категории геометрии, как длина, угол, ортогональность, конформное отображение и другие. До появления более точного названия, условимся подобные пространства именовать *полилинейными финслеровыми пространствами*.

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а также $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{b}'$ – две пары единичных векторов полилинейного пространства, то фигура, образованная двумя первыми векторами, будет тогда конгруэнтна фигуре, составленной из двух последних, когда найдется конгруэнтное преобразование, переводящее одну фигуру в другую. Из рассмотренных выше свойств полилинейных форм следует, что такое преобразование может найтись только в том случае, если:

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{a}', \ldots, \mathbf{b}'),\\
(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{a}', \ldots, \mathbf{b}', \mathbf{b}'),\\
\cdots\cdots\cdots\\
(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \ldots, \mathbf{b}'). \qquad (2)
\end{gathered}
$$

Отсюда, в частности, вытекает, что в билинейных пространствах конгруэнтность пары фигур из двух единичных векторов связана с равенством всего одной формы:

$$
(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}'), \qquad (3)
$$

которая и задает понятие угла, как параметра, характеризующего различие двух направлений. Равенство (3) совместно с определением единичного вектора эквивалентно аксиоме о конгруэнтности треугольников из гильбертовой системы аксиом евклидова пространства. Два треугольника в евклидовом пространстве конгруэнтны, если равны длины соответствующих сторон и углы между ними. Аналогичные аксиомы можно сформулировать и для псевдоевклидовых пространств. Но из определения (2) вытекает, что для полилинейного пространства с размерностью формы выше двух конгруэнтность фигур из двух единичных векторов определяется уже не одним, а большим количеством условий. Так, в пространствах с трилинейной формой $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ для конгруэнтности соответственных фигур должны быть равны две формы:

$$
(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{a}', \mathbf{b}'), \qquad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{b}').
$$

Этот кажущийся парадокс имеет простое объяснение. Действительно, говоря о пространственной фигуре, построенной на двух векторах, обычно ее представляют, как элемент плоскости, содержащейся между ребрами, которыми и являются задающие вектора. Однако это оправдано только в пространствах с билинейной формой. В пространствах с произвольной полилинейной формой с двумя векторами связаны уже не плоскости, а особого вида конусообразные поверхности, конфигурация которых зависит от метрических свойств окружающего пространства. Количество параметров, определяющих конгруэнтность таких веерообразных фигур, ограниченных по краям парами единичных векторов, может быть больше одного, что, в частности, и наблюдается в пространстве с трилинейной симметрической формой, где соответствующих величин две.

На основании проведенного выше краткого анализа становится ясно, что полилинейные пространства допускают возможность введения аналогов понятию угла билинейных пространств. Однако при этом, следует учитывать, что в билинейных пространствах угол, как параметр, объединял в себе сразу два свойства: с одной стороны, он служил характеристикой различия (разности) двух направлений, а с другой, являлся экстремальным параметром одного из двух типов конгруэнтных преобразований, называемого вращением. В общем случае полилинейного пространства каждое из этих свойств, по-видимому, следует характеризовать самостоятельной величиной. Так в основу получения численного параметра, характеризующего различие направлений единичных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеет смысл положить величину n-арной полиформы их разности, а именно:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b},\ldots,\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \\
&= (\mathbf{a},\mathbf{a},\ldots,\mathbf{a}) - C_n^1(\mathbf{a},\mathbf{a},\ldots,\mathbf{a},\mathbf{b}) \pm \ldots (-1)^{n-1}C_n^{n-1}(\mathbf{a},\mathbf{b},\ldots,\mathbf{b}) + (-1)^n(\mathbf{b},\mathbf{b},\ldots,\mathbf{b}),
\end{aligned}
$$

где C_i^j – биномиальные коэффициенты. В связи с этим, скалярная форма от двух единичных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$
S(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -C_n^1(\mathbf{a},\mathbf{a},\ldots,\mathbf{a},\mathbf{b}) \pm \ldots (-1)^{n-1}C_n^{n-1}(\mathbf{a},\mathbf{b},\ldots,\mathbf{b}) \tag{4}
$$

или некоторая функция от нее может выполнять роль численного параметра, определяющего искомую характеристику. Заметим, что если полилинейное пространство билинейно, выражение (4) с точностью до постоянного множителя совпадает с определением обычного скалярного произведения двух единичных векторов. Величину (4) можно называть *скалярным произведением двух векторов полилинейного пространства*. Впрочем, возможно будет более оправдано скалярную форму (4) разбивать на попарно симметризованные слагаемые:

$$
\begin{aligned}
&S(\mathbf{a},\mathbf{b}) = C_n^1(-(\mathbf{a},\mathbf{a},\ldots,\mathbf{a},\mathbf{b}) + (-1)^{n-1}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}\ldots,\mathbf{b}))+ \\
&+ C_n^2((\mathbf{a},\mathbf{a},\ldots,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}) + (-1)^{n-2}(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\ldots,\mathbf{b})) \pm \cdots = S_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) + S_2(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \ldots,
\end{aligned} \tag{5}
$$

где каждый член $S_i(\mathbf{a},\mathbf{b})$ получает самостоятельное значение.

В полилинейных пространствах существуют пары векторов с определенными особенностями взаимного расположения, подобные ортогональным векторам билинейных пространств. В теории финслеровых пространств соответствующее понятие именуют трансверсальностью. Условимся вектор $\mathbf{A}$ называть *трансверсальным первого порядка* вектору $\mathbf{B}$, если $(\mathbf{A},\mathbf{A},\ldots,\mathbf{A},\mathbf{B}) = 0$. Видно, что трансверсальность не коммутативна, т. е. из $(\mathbf{A},\mathbf{A},\ldots,\mathbf{A},\mathbf{B}) = 0$ не следует $(\mathbf{B},\mathbf{B},\ldots,\mathbf{B},\mathbf{A}) = 0$. Однако если воспользоваться симметризованными формами (5), то задаваемая ими трансверсальность уже будет обладать коммутативными свойствами. По определению, вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ будем считать *взаимно трансверсальными первого порядка*, когда $S_1(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{0}$; *второго порядка*, когда $S_2(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{0}$, и так далее до $n/2$ или $(n-1)/2$ порядка. Такая дифференциация трансверсальности говорит о том, что в линейных финслеровых пространствах вектора могут образовывать пары с множественностью характерных отношений направленности, обобщающей понятие ортогональности.

Помимо величин, задаваемых формами (4), в некоторых полилинейных пространствах, имеющих непрерывные конгруэнтные преобразования типа вращений, представляется уместным ввести еще одну "углоподобную" характеристику. Ее величину будем связывать с длиной дуги на единичной сфере, очерчиваемой лучом при непрерывном однопараметрическом вращении. Так обобщаемое понятие подобно обычному углу является аддитивной мерой, что следует из аддитивности длин.

Но в полиформах могут участвовать не только пары, но и тройки, четверки и т. д., вплоть до n различных векторов. Трудно сказать, к каким качественным следствиям в отношении элементарных фигур должно приводить данное обстоятельство. Ясно одно: это свойство полилинейных пространств существует объективно, а значит, его также необходимо учитывать.

Среди полилинейных пространств имеются такие, у которых в одном из базисов обнуляются все формы, кроме тех, что включают только различные вектора. Для таких пространств в этих особых базисах фундаментальные метрические формы принимают вид:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A},\mathbf{A},\ldots,\mathbf{A}) = {} & \pm a_1a_2\ldots a_m \pm a_1a_2\ldots a_{m-1}a_{m+1} \\ & \pm\cdots\pm a_2a_3\ldots a_ma_{m+1}\pm\cdots\pm a_{n-m}a_{n-m+1}\ldots a_n. \quad (6)\end{aligned}$$

Именно среди них оказываются псевдоевклидовы пространства сигнатуры $(1, m-1)$, играющие исключительную роль в современной теоретической физике. Хотя для этих пространств более привычным выглядит классическое квадратичное представление, оказывается, что квадраты их интервалов в некоторых изотропных базисах принимают вид:

$$|\mathbf{A}|^2 = (\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots + a_{m-1}a_m = \sum_{k\neq l} a_ka_l.$$

К примеру, квадрат интервала пространства Минковского $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ после подстановки, сходной с (16):

$$\begin{aligned} ct &= \sqrt{3/8}(u+v+w+z), \qquad & x &= \sqrt{1/8}(u-v+w-z),\\ y &= \sqrt{1/8}(u+v-w-z), \qquad & z &= \sqrt{1/8}(u-v-w+z),\end{aligned}$$

приобретает красивый симметричный вид:

$$s^2 = uv + uw + uz + vw + vz + wz.$$

Выражения типа (6) наиболее лаконично выглядят в случаях $n = m$, т. е. когда размерность фундаментальной метрической формы совпадает с размерностью пространства. В этих случаях n-я степень длины вектора в соответствующем базисе принимает вид:

$$|\mathbf{A}|^n = (\mathbf{A},\mathbf{A},\ldots,\mathbf{A}) = \pm a_1a_2\ldots a_n.$$

Именно этим обстоятельством обусловлена исключительная роль псевдоевклидовой плоскости, для которой выполняется такое соотношение. Очень вероятно, что только у пространств с $n = m$ существует связь с ассоциативно-коммутативными алгебрами, что влечет за собой существование в этих пространствах широкой группы конформных отображений. При этом разнообразие конформных отображений может наблюдаться и в ряде других случаев, что следует из работ [10, 11]. В них рассматривается восьмимерное пространство бикватернионов, которое в свете изложенной выше аксиоматики обладает метрической формой 4 порядка и, значит, также не подпадает под теорему Лиувилля. Остается надеяться, что свойство некоторых полилинейных пространств обладать богатой группой конформных отображений окажется перспективным для приложений, как в геометрии, так и в физике.

С другой стороны, даже поверхностное изучение свойств полилинейных пространств позволяет утверждать, что в некоторых из них присутствуют не только конформные, но и другие ярко выделенные нелинейные преобразования, аналогов которым не существует у обычных билинейных пространств. Существование таких преобразований следует уже из того, что рассматриваемые пространства требуют расширения понятия ортогональности до нескольких его типов. Как известно, нелинейные преобразования, сохраняющие обычную ортогональность, относятся к конформным. В связи с этим, естественно ожидать, что и преобразования, сохраняющие трансверсальность, окажутся столь же выделенными. Наличие таких преобразований делает соответствующие полилинейные пространства еще интереснее.

4. Примеры полилинейных пространств

Разнообразие полилинейных пространств велико. Определенные трудности представляет собой задача классификации таких пространств даже в случае трилинейных форм, не говоря уже о формах больших размерностей. Однако, если ограничиться только трёхмерным случаем, а среди всевозможных симметрических трилинейных пространств рассматривать только те, чьи метрические формы не зависят от перестановок компонент векторов (такие формы в работе [12], исследующей подобную классификацию, предложено называть *сверхсимметрическими*), то выявляются 8 самостоятельных классов, с каждым из которых можно связать свою каноническую фундаментальную полиформу. Среди всех этих форм особенно простым видом обладают следующие:

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = F_1;$$
$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^2a_2 + a_1^2a_3 + a_2^2a_1 + a_2^2a_3 + a_3^2a_1 + a_3^2a_2 = F_2;$$
$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1a_2a_3 = F_3.$$

В работе [12] они названы *базисными*. Любую из восьми неизоморфных сверхсимметрических трилинейных полиформ можно представить как линейную комбинацию этих базисных:

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = \omega_1F_1 + \omega_2F_2 + \omega_3F_3.$$

Однако, сколь ни велико разнообразие пространств с трилинейной симметрической формой, среди них максимальной лаконичностью своего выражения выделяется пространство с формой:

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1a_2a_3.$$

Вследствие симметрии, вытекающей из этой лаконичности, соответствующему пространству можно сопоставить алгебру коммутативно-ассоциативных чисел, являющихся прямой суммой трех действительных алгебр. Условимся такую гиперкомплексную систему именовать *тройными числами* и обозначать H_3. Математические, геометрические, а возможно и физические структуры, связанные с тройными числами далеко не тривиальны, в чем можно убедиться по исследованиям [13, 14], представленным в настоящем сборнике. Заметим, что подавляющему большинству трилинейных полиформ вообще не соответствуют никакие алгебры [12].

Для четырехмерных полилинейных пространств с $n = m$ базисные формы имеют вид:

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = {}& a_1^3(a_2+a_3+a_4) + a_2^3(a_1+a_3+a_4)\\ &+a_3^3(a_1+a_2+a_4) + a_4^3(a_1+a_2+a_3);\end{aligned} \tag{8}$$

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_1^2a_4^2 + a_2^2a_3^2 + a_2^2a_4^2 + a_3^2a_4^2; \tag{9}$$

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^2(a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4) + a_2^2(a_1a_3 + a_1a_4 + a_3a_4) + \\ a_3^2(a_1a_2 + a_1a_4 + a_2a_4) + a_4^2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3); \tag{10}$$

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1a_2a_3a_4, \tag{11}$$

и с каждой из них связана геометрия своего, не изоморфного остальным, полилинейного пространства.

Как и в трехмерном случае, данными примерами разнообразие четырехмерных полилинейных пространств не исчерпывается. Полная классификация соответствующих геометрий – весьма трудоемкая задача, решение которой может потребовать значительных усилий. Однако прежде, чем ею заниматься, имеет смысл изучить хотя бы один частный случай. Например, геометрию, связанную с самой лаконичной из базисных полиформ (7) – (11), а именно (11). Высокая симметрия этой формы снова приводит к возможности сопоставить задаваемому ею пространству алгебру коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, которые, для краткости, будем называть *квадрачислами* и обозначать H_4. Некоторые свойства пространства, связанного с квадрачислами, представлены в [15]. Алгебру квадрачисел можно получить, добавив к аксиомам действительных чисел аксиомы сложения и умножения объектов вида $A = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot I + a_3 \cdot J + a_4 \cdot K$ и $B = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot I + b_3 \cdot J + b_4 \cdot K$, где a_i и b_i – действительные числа, называемые компонентами, а $1, I, J, K$ – базисные единицы. Принимая по определению, что суммой чисел A и B называется число:

$$C = (a_1 + b_1) \cdot 1 + (a_2 + b_2) \cdot I + (a_3 + b_3) \cdot J + (a_4 + b_4) \cdot K,$$

а их произведением – другое число того же класса:

$$D = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) \cdot 1 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3) \cdot I + \\ + (a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2) \cdot J + (a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1) \cdot K,$$

получаем алгебру коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, в которой таблица умножения базисных единиц имеет вид:

	1	I	J	K
1	1	I	J	K
I	I	1	K	J
J	J	K	1	I
K	K	J	I	1

Из таблицы следует $I^2 = J^2 = K^2 = 1$, т. е. все ее мнимые единицы гиперболические. Ту же алгебру можно получить и другим путем, применяя дважды операцию удвоения к алгебре действительных чисел с использованием двух независимых гиперболически мнимых единиц I и J. Тогда, обозначая произведение I на J как самостоятельный объект K, произвольное число A из соответствующего множества можно представить в виде линейной комбинации:

$$A = (a_1 + a_2 \cdot I) + (a_3 + a_4 \cdot I) \cdot J = a_1 + a_2 \cdot I + a_3 \cdot J + a_4 \cdot K,$$

где символ действительной единицы 1, как это принято в комплексных числах и кватернионах, опущен.

Будем называть числа $\bar{A}, \hat{A}, \widetilde{A}$ *сопряженными* числу $A = a_1 + a_2 \cdot I + a_3 \cdot J + a_4 \cdot K$, если они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= a_1 - a_2 \cdot I + a_3 \cdot J - a_4 \cdot K,\\ \hat{A} &= a_1 + a_2 \cdot I - a_3 \cdot J - a_4 \cdot K,\\ \widetilde{A} &= a_1 - a_2 \cdot I - a_3 \cdot J + a_4 \cdot K.\end{aligned} \qquad (12)$$

Отметим, что

$$\widetilde{\hat{\bar{A}}} = A. \qquad (13)$$

Произведения таких четверок, как несложно проверить непосредственной подстановкой, – всегда действительные числа, причем

$$A\bar{A}\hat{A}\widetilde{A} = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 - 2a_1^2a_2^2 - 2a_1^2a_3^2 - 2a_1^2a_4^2 - 2a_2^2a_3^2 - 2a_2^2a_4^2 - 2a_3^2a_4^2 + 8a_1a_2a_3a_4. \quad (14)$$

По аналогии с алгеброй комплексных чисел будем связывать эту величину с четвертой степенью модуля соответствующего числа и обозначать, как $|A|^4$. Введенное понятие обладает обычными свойствами модуля:

$$|\lambda A| = |\lambda| \cdot |A|, \qquad |AB| = |A| \cdot |B|,$$

где λ – действительное, а A и B – гиперкомплексные числа. Свойство взаимно сопряженных в произведении давать действительное число позволяет ввести в рассматриваемой алгебре операцию деления, понимаемую как действие обратное умножению. Так, под числом A^{-1} , обратным к A, будем понимать число:

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}\hat{A}\widetilde{A}}{|A|^4}. \qquad (15)$$

Обратные существуют только у чисел, модуль которых отличен от нуля. Не равные нулю числа, модуль которых равен нулю, являются делителями нуля. Такие числа не имеют обратных.

Рассматриваемая алгебра ассоциирована с формой (11). В этом можно убедиться, рассмотрев переход от базиса $1, I, J, K$ к базису S_1, S_2, S_3, S_4, объекты которого связаны с исходными соотношениями:

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{4}(1 + I + J + K), \qquad & S_2 &= \frac{1}{4}(1 - I + J - K),\\ S_3 &= \frac{1}{4}(1 + I - J - K), \qquad & S_4 &= \frac{1}{4}(1 - I - J + K).\end{aligned} \qquad (16)$$

(Нумерация орт определяется следующей логикой: сопряжение по первым двум ортам $1, I$ считается младшим, по их удвоению – ортам J, K – старшим). Новые базисные числа являются делителями нуля и замечательны тем, что их таблица умножения выглядит наиболее просто:

	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	S_1	0	0	0
S_2	0	S_2	0	0
S_3	0	0	S_3	0
S_4	0	0	0	S_4

.

Делители нуля с подобными свойствами будем называть *главными*, а состоящие из них базисы – *абсолютными*. Обратная связь единиц $1, I, J, K$ с главными делителями нуля алгебры H_4 выражается соотношениями:

$$1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \qquad I = S_1 - S_2 + S_3 - S_4,$$

$$J = S_1 + S_2 - S_3 - S_4, \qquad K = S_1 - S_2 - S_3 + S_4.$$

Числа из H_4, записанные в абсолютном базисе, легко не только складывать, но и умножать, и делить. Так, произведение двух чисел A и B имеет вид:

$$(AB) = (a'_1 b'_1)S_1 + (a'_2 b'_2)S_2 + (a'_3 b'_3)S_3 + (a'_4 b'_4)S_4,$$

а их частное:

$$\frac{A}{B} = \frac{a'_1}{b'_1}S_1 + \frac{a'_2}{b'_2}S_2 + \frac{a'_3}{b'_3}S_3 + \frac{a'_4}{b'_4}S_4$$

(Здесь и далее компоненты со штрихами будут относиться к абсолютным базисам.) Абсолютный базис раскрывает устройство алгебры квадрагиперболических чисел, которая изоморфна алгебре действительных диагональных матриц. Ансамбль взаимно сопряженных при этом имеет вид:

$$\begin{aligned} A &= a'_1 S_1 + a'_2 S_2 + a'_3 S_3 + a'_4 S_4, \\ \bar{A} &= a'_2 S_1 + a'_1 S_2 + a'_4 S_3 + a'_3 S_4, \\ \hat{A} &= a'_3 S_1 + a'_4 S_2 + a'_1 S_3 + a'_2 S_4, \\ \widetilde{A} &= a'_4 S_1 + a'_3 S_2 + a'_2 S_3 + a'_1 S_4. \end{aligned} \tag{17}$$

Модуль числа A в таком специальном базисе, как несложно убедиться, принимает вид:

$$|A| = |a'_1 a'_2 a'_3 a'_4|^{1/4}, \tag{18}$$

что и подтверждает соответствие данной алгебры геометрии, задаваемой фундаментальной метрической формой (11). На множестве квадрачисел можно ввести понятие функции. Одной из наиболее интересных функций является экспоненциальная, под которой будем понимать ряд:

$$e^X = 1 + X + \frac{X}{2!} + \ldots,$$

где X – произвольное квадрачисло. С введением экспоненциальной функции можно наряду с алгебраической формой представления числа из H_4 рассматривать и его экспоненциальную форму. Так, числу $A = a'_1 S_1 + a'_2 S_2 + a'_3 S_3 + a'_4 S_4$, все компоненты a'_i которого в абсолютном базисе больше нуля, взаимно однозначно соответствует форма:

$$A = |A| e^{\alpha I + \beta J + \gamma K}, \tag{19}$$

где положительная величина $|A|$ – модуль квадрачисла. Действительные же числа α, β и γ, по аналогии с комплексными и двойными числами, будем называть *аргументами квадрачисла* A. Связь аргументов с компонентами a'_i в абсолютном базисе имеет вид:

$$\alpha = \frac{1}{4} \ln \frac{a'_1 a'_3}{a'_2 a'_4} = \frac{1}{4}(\ln a'_1 - \ln a'_2 + \ln a'_3 - \ln a'_4),$$

$$\beta = \frac{1}{4} \ln \frac{a'_1 a'_2}{a'_3 a'_4} = \frac{1}{4}(\ln a'_1 + \ln a'_2 - \ln a'_3 - \ln a'_4),$$

$$\gamma = \frac{1}{4}\ln\frac{a_1'a_4'}{a_2'a_3'} = \frac{1}{4}(\ln a_1' - \ln a_2' - \ln a_3' + \ln a_4'),$$

где $\ln x$ – логарифмическая функция действительного аргумента x. Поскольку для каждой мнимой единицы в отдельности выполняется гиперболический аналог формулы Эйлера:

$$e^{\alpha I} = \cosh\alpha + I\sinh\alpha,$$

то для экспоненты от произвольного квадрачисла $X = \delta + \alpha I + \beta J + \gamma K$ справедливо выражение вида:

$$e^X = (\cosh\delta + \sinh\delta)(\cosh\alpha + I\sinh\alpha)(\cosh\beta + J\sinh\beta)(\cosh\gamma + K\sinh\gamma), \qquad (20)$$

где $\cosh x$ и $\sinh x$ – гиперболические косинус и синус. Для квадрачислового переменного X аналогичные функции можно ввести как ряды:

$$\cosh X = 1 + \frac{X^2}{2!} + \ldots, \qquad \sinh X = X + \frac{X^3}{3!} + \ldots.$$

С функцией квадрачислового переменного можно связать понятия производной по направлению и аналитичности наподобие того, как соответствующие понятия вводятся в алгебру двойных чисел [2]. Аналитичность функции от H_4 означает независимость ее производной от направлений [5] $dF = F'\,da$ и выражается в одновременном выполнении 12 уравнений, являющихся аналогами условий Коши-Римана для комплексного и двойного переменного:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial a_1} = \frac{\partial V}{\partial a_2} = \frac{\partial W}{\partial a_3} = \frac{\partial Q}{\partial a_4}, \qquad \frac{\partial U}{\partial a_2} = \frac{\partial V}{\partial a_1} = \frac{\partial W}{\partial a_4} = \frac{\partial Q}{\partial a_3}, \\ &\frac{\partial U}{\partial a_3} = \frac{\partial V}{\partial a_4} = \frac{\partial W}{\partial a_1} = \frac{\partial Q}{\partial a_2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial a_4} = \frac{\partial V}{\partial a_3} = \frac{\partial W}{\partial a_2} = \frac{\partial Q}{\partial a_1}, \end{aligned} \qquad (21)$$

где

$$F(A) = U(a_1,a_2,a_3,a_4) + V(a_1,a_2,a_3,a_4)I + W(a_1,a_2,a_3,a_4)J + Q(a_1,a_2,a_3,a_4)K$$

– аналитическая функция от квадрачислового переменного, а U, V, W, Q – гиперкомплексно сопряженные функции четырех действительных аргументов.

В алгебре квадрачисел имеется шестнадцать характерных единичных объектов $e_1 - e_{16}$, имеющих в базисе, в котором записана форма (11), следующие компоненты:

$$\begin{aligned} e_1 &\leftrightarrow (1,1,1,1); & e_5 &\leftrightarrow (-1,-1,-1,-1); \\ e_2 &\leftrightarrow (1,-1,1,-1); & e_6 &\leftrightarrow (-1,1,-1,1); \\ e_3 &\leftrightarrow (1,1,-1,-1); & e_7 &\leftrightarrow (-1,-1,1,1); \\ e_4 &\leftrightarrow (1,-1,-1,1); & e_8 &\leftrightarrow (-1,1,1,-1); \\ e_9 &\leftrightarrow (1,-1,-1,-1); & e_{13} &\leftrightarrow (-1,1,1,1); \\ e_{10} &\leftrightarrow (1,1,-1,1); & e_{14} &\leftrightarrow (-1,-1,1,-1); \\ e_{11} &\leftrightarrow (1,-1,1,1); & e_{15} &\leftrightarrow (-1,1,-1,-1); \\ e_{12} &\leftrightarrow (1,1,1,-1); & e_{16} &\leftrightarrow (-1,-1,-1,1). \end{aligned}$$

Соответствующие этим числам вектора $\mathbf{e_i}$ можно использовать для иллюстрации наличия в квадрапространстве двух типов трансверсальности, обобщающих для данного финслерова пространства понятие ортогональности направлений. Действительно, в квадрапространстве симметризованных форм (5) две. Они имеют вид

$$S_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{b}) \qquad (22)$$

и

$$S_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}). \tag{23}$$

Равенство нулю любой из них означает трансверсальность соответствующих направлений. Непосредственными подстановками компонент векторов $\mathbf{e}_i$ в (22) и (23) можно убедиться в том, что каждый из векторов данного множества одному противоположен, с шестью образует взаимно трансверсальные пары первого порядка, а с восемью – второго. Из четверки векторов, трансверсальных друг другу по первому порядку, можно организовать базис, являющийся аналогом ортонормированного. Одним из частных случаев такого базиса, как раз, и является фигурировавшая выше четверка $1, I, J, K$. Из векторов, трансверсальных друг другу по второму порядку, базиса построить невозможно, так как для каждой такой пары третьего, а тем более четвертого, вектора с подобным отношением направлений не существует.

5. Заключение

Предлагаемый способ изучения выделенного класса линейных финслеровых пространств, названных полилинейными, представляется перспективным, поскольку основывается на тех же принципах, что и формализм скалярного произведения. Открывающиеся при этом возможности, по сути, позволяют перенести центр тяжести исследований достаточно абстрактных пространств с обычной наглядной основы на более твердую почву математических выкладок. Достоинства аналогичной замены демонстрируют псевдоевклидовы пространства, для которых также далеко не все геометрические эффекты очевидны и расширение на них понятия скалярного произведения в свое время сыграло положительную роль.

Литература

[1] И. М. Гельфанд: *Лекции по линейной алгебре*, Наука, М. 1966.

[2] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников: *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.

[3] Б. А. Розенфельд: *Многомерные пространства*, Наука, М. 1966.

[4] А. И. Мальцев: *Основы линейной алгебры*, ТТЛ, М. 1956.

[5] М. А. Лаврентьев и Б. О. Шабат: *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, М. 1977.

[6] Б. А. Розенфельд: *Неевклидовы пространства*, Наука, М. 1969.

[7] G. S. Asanov: *Finslerian Extension of General Relativity*, Reidel, Dordrecht 1984.

[8] П. К. Рашевский: *Геометрическая теория уравнений с частными производными*; Изд. 2-е, стереотипное, Едиториал УРСС, М. 2003.

[9] Х. Рунд: *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Наука, М. 1981.

[10] В. В. Кассандров, Вестник Российского Университета Дружбы Народов, Физика, 1, 1993.

[11] В. В. Кассандров: *Число, время, свет*, http:www.chronos.msu.ru.

[12] Г. И. Гаранько: *Тричисла, куб нормы которых есть невырожденная триформа,* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[13] С. В. Лебедев: *Свойства пространств, ассоциированных с коммутативно-ассоциативными алгебрами H_3 и H_4*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[14] Д. Г. Павлов: *Хронометрия трехмерного времени*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[15] Д. Г. Павлов: *Четырехмерное время*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.