ТРИЧИСЛА, КУБ НОРМЫ КОТОРЫХ ЕСТЬ НЕВЫРОЖДЕННАЯ ТРИФОРМА

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт,
gri9z@mail.ru

Произвольная триформа приводится к каноническому виду. Требование существования двухпараметрической абелевой группы Ли – группы симметрии триформы, позволило выделить те триформы, которые соответствуют тричислам, и найти все тричисла, куб нормы которых в специальной системе координат есть невырожденная триформа. Таких систем гиперкомплексных чисел всего (с точностью до изоморфизма) две: C_3, H_3. Их можно рассматривать, как обобщение комплексных и двойных (гиперболических) бичисел на тричисла.

1. Введение

Одним из исходных понятий как математики, так и физики, является действительное (вещественное) число. Ассоциативно-коммутативные n-мерные гиперкомплексные числа над полем действительных чисел, которые для краткости будем называть n-числами, являются обобщением этого понятия, причем комплексные числа, очень хорошо зарекомендовавшие себя при решении задач математической и теоретической физики, есть частный случай таких гиперкомплексных чисел, бичисел. К сожалению, n-числа при $n > 2$ недостаточно изучены. Есть надежда, что, обладая такими упрощающими работу свойствами как ассоциативность и коммутативность, но достаточно сложной в некоторых случаях геометрией, ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа найдут свое нетривиальное применение в математике и физике. Для $n > 2$ сама классификация и выбор n-чисел для математических исследований в расчете на дальнейшее применение в физике представляет не простую задачу. Один из способов ее решения – это формулировка дополнительных условий, которые бы из всего множества n-чисел выделяли более узкий, но заведомо значимый класс. Одним из таких условий может быть требование существования такого специального базиса, в котором бы координаты n-чисел были, в некотором смысле, равноправны, например, норма в этих координатах не зависела от перестановки координат или более сильное требование – n-ая степень нормы n-чисел в таких специальных координатах должна быть невырожденной n-формой этих координат. В данной работе для краткости под n-формой координат n-мерного линейного пространства будем понимать сверхсимметрическую полилинейную форму n-го порядка, все аргументы которой равны одному и тому же вектору. *Сверхсимметричность формы* подразумевает существование такого базиса, в котором симметрическая форма n-векторных аргументов не меняется при перестановке координат. *Невырожденность формы* будем понимать как требование невозможности представить ее как некоторую целую степень формы более низкого порядка. Ниже мы будем часто опускать слово "невырожденная", говоря просто о n-форме. Настоящая работа посвящена изучению тричисел, то есть ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел вида

$$X = x_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3, \tag{1}$$

где e_2, e_3 – символьные элементы, а x_1, x_2, x_3 – действительные числа, координаты в базисе $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$. Если число X допускает экспоненциальное представление

$$X = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3), \tag{2}$$

где $\rho > 0, \alpha, \beta$ – действительные числа, то величину ρ естественно назвать модулем тричисла X. Будем искать только те тричисла, для которых в некотором специальном базисе (это необязательно базис $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$) куб нормы $\rho(x_1, x_2, x_3)$ является невырожденной триформой координат, то есть

$$\rho^3 = \Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3), \tag{3}$$

где триформа общего вида

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 \Omega_1(x_1, x_2, x_3) + \omega_2 \Omega_2(x_1, x_2, x_3) + \omega_3 \Omega_3(x_1, x_2, x_3) \tag{4}$$

есть произвольная линейная комбинация с действительными коэффициентами ω_i $(i = 1, 2, 3)$ при базисных триформах:

$$\Omega_1(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \tag{5}$$

$$\Omega_2(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1^2 x_2 + x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 \tag{6}$$

$$\Omega_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_2 x_3. \tag{7}$$

Заметим, что симметрическая кубическая форма от трех векторных аргументов, линейная по каждому аргументу, в трехмерном пространстве содержит не три, а десять произвольных действительных параметров, то есть является более общим понятием, чем сверхсимметрическая триформа, и приводит к форме более общей, чем триформа (4). Требование невырожденности триформы означает

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \neq \Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \equiv \omega \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^3. \tag{8}$$

В дальнейшем будем подразумевать под триформами невырожденные триформы или оговаривать обратное особо.

Умножение числа X на унимодулярное число X_1 дает число

$$Y = X_1 \cdot X, \tag{9}$$

(9) модуль которого равен модулю числа X, а значит для таких рассматриваемых тричисел

$$\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', \omega_2', \omega_3') = \Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3). \tag{10}$$

Таким образом, для того чтобы куб нормы тричисла являлся триформой, множество унимодулярных чисел этой гиперкомплексной системы должно образовывать двухпараметрическую непрерывную абелеву группу Ли (группу симметрии, сохраняющую вид триформы), состоящую из линейных преобразований (9) координатного пространства рассматриваемых тричисел.

Предположим, что для определенных значений параметров триформы (4) найдена группа симметрии, двухпараметрическая абелева группа непрерывных линейных преобразований с генераторами E_2, E_3 – действительными квадратными матрицами 3×3. Тогда, как известно, сами линейные преобразования определяются через генераторы матрицей $\hat{A}$ по формуле

$$\hat{A} = \exp(\alpha \cdot \hat{E}_2 + \beta \cdot \hat{E}_3), \tag{11}$$

где α, β – действительные параметры. Пусть при этом для генераторов выполняются правила умножения

$$\hat{E}_i \cdot \hat{E}_j = p_{ij}^k \cdot \hat{E}_k, \tag{12}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$; $\hat{E}_1$ – единичная матрица (генератор общего масштабного преобразования), p_{ij}^k – некоторые действительные числа, по дважды встречающемуся индексу происходит суммирование. Тогда $\hat{E}_1 \hat{E}_2, \hat{E}_3$ можно рассматривать как представление базисных элементов $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$ некоторой системы тричисел, а значит представление самой системы таких чисел в координатном линейном трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3 в виде действительных квадратных матриц 3×3. Очевидно, что закон умножения базисных элементов $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$ будет иметь тот же вид (12) с теми же характеристическими числами p_{ij}^k

$$e_i \cdot e_j = p_{ij}^k \cdot e_k. \tag{13}$$

Теперь мы можем записать числа, представимые в экспоненциальном виде (2). Координатное линейное пространство x_1, x_2, x_3 не обязательно должно вводится в том же самом базисе, то есть по формуле (1). Поэтому в общем случае возникает следующее соотношение для чисел представимых в экспоненциальном виде

$$x_1 \cdot e_1' + x_2 \cdot e_2' + x_3 \cdot e_3' = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3), \tag{14}$$

где e_1', e_2', e_3' – базис в общем случае отличный от $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$, причем e_1' может не быть действительной единицей. Используя три координатных соотношения (14) и исключая два действительных параметра α, β, получим выражение для куба нормы через координаты x_1, x_2, x_3

$$\rho^3 = f(x_1, x_2, x_3). \tag{15}$$

Если справа в этой формуле стоит исходная триформа, то найдены тричисла, ей соответствующие.

2. Приведение триформы к каноническому виду

Кроме общего масштабного преобразования, существуют лишь одно непрерывно связанное с тождественным линейное преобразование координат, с помощью которого произвольная триформа переходит опять в триформу. Запишем это преобразование в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3q} \begin{pmatrix} p+2 & p-1 & p-1 \\ p-1 & p+2 & p-1 \\ p-1 & p-1 & p+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где q – произвольное положительное действительное число, а

$$p \equiv q^3. \tag{17}$$

В новых переменных после преобразования (16) триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ будет иметь вид

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', \omega_2', \omega_3'), \tag{18}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &\equiv u\cdot(w_1p^3+3w_2p+2w_3),\\ \omega_2' &\equiv 3u(w_1p^3-w_3),\\ \omega_3' &\equiv 3u(2w_1p^3-3w_2p+4w_3), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$u\equiv\frac{1}{27p} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1 &\equiv 3\omega_1+6\omega_2+\omega_3,\\ w_2 &\equiv 6\omega_1-\omega_3,\\ w_3 &\equiv 3\omega_1-3\omega_2+\omega_3. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Конечно, классификацию триформ (приведение к каноническому виду) можно проводить по-разному. Будем исходить из того, что триформы, связанные линейным невырожденным преобразованием координат, не изменяющим значения самой триформы, эквивалентны – отличаются друг от друга лишь выбором базиса в трехмерном линейном пространстве x_1, x_2, x_3, то есть выбором базисных (символьных) элементов в пространстве тричисел. При приведении триформ к каноническому виду будем рассматривать не все линейные невырожденные преобразования, а лишь три возможные: во-первых, преобразование (16); во-вторых, дискретное преобразование – изменение знака у всех трех координат одновременно; в-третьих, общее масштабное преобразование – умножение одновременно всех трех координат на одно и тоже действительное положительное число – именно в этой последовательности. Базисные формы (5) – (7) в силу их выделенности сразу причислим к каноническим.

Итак, рассмотрим триформу общего вида (4) и перейдем с помощью линейного преобразования (16) к новым координатам. Так как связь между величинами w_i и параметрами триформы ω_i взаимнооднозначная, будем стараться уменьшить число параметров триформы в новых координатах, перебирая различные варианты, используя величины w_i и формулы (19).

1). Если

$$sign(w_1)=sign(w_2)\neq 0, \tag{22}$$

то с помощью линейного преобразования координат (16) со значением параметра

$$p=\sqrt[3]{\frac{w_3}{w_1}} \tag{23}$$

исходную триформу можно привести к виду $\Omega(y_1,y_2,y_3;\omega_1',0,\omega_3')$.

2). Если

$$sign(w_1)=-sign(w_3)\neq 0, \tag{24}$$

то всегда найдутся два преобразования (16), с помощью одного из которых можно обнулить ω_1', а с помощью второго можно обнулить ω_3', при этом в том и другом случае параметр ω_2' получается строго неравным нулю при любом значении w_2. Таким образом, в качестве результата приходится выбирать либо форму $\Omega(y_1,y_2,y_3;0,\omega_2',\omega_3')$, либо эквивалентную ей триформу $\Omega(y_1,y_2,y_3;\omega_1',\omega_2',0)$. Для того чтобы исключить неоднозначность, будем всегда выбирать первый вариант, то есть триформу $\Omega(y_1,y_2,y_3;0,\omega_2',\omega_3')$, при этом параметр p в преобразовании (16) есть действительный положительный корень кубического уравнения

$$w_1p^3+3w_2p+2w_3=0. \tag{25}$$

Остается рассмотреть случаи, когда величины обращаются в нуль по отдельности или обе одновременно.

3). Если

$$w_1 = 0, \quad sign(w_2) = -sign(w_3) \neq 0, \tag{26}$$

то триформа может быть приведена с помощью преобразования (16) к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega_2', \omega_3')$, причем $\omega_2' \neq 0$ и $\omega_3' \neq 0$, а

$$p = -\frac{2w_3}{3w_2}. \tag{27}$$

4). Если

$$w_1 = 0, \quad sign(w_2) = sign(w_3) \neq 0, \tag{28}$$

то триформа с помощью преобразования (16) может быть приведена к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', \omega_2', 0)$, причем ω_1' и $\omega_2' \neq 0$, а

$$p = \frac{4w_3}{3w_2}. \tag{29}$$

5). Если

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 \neq 0. \tag{30}$$

то

$$\omega_1' = 2uw_3, \quad \omega_2' = -3uw_3, \quad \omega_3' = 12uw_3. \tag{31}$$

В этом случае триформа имеет вид $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, -\frac{3}{2}\omega_1, 6\omega_1)$, преобразование координат (16) переводит ее в $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', -\frac{3}{2}\omega_1', 6\omega_1')$ с $\omega_1' \neq 0$, то есть преобразование (16) в данном случае сводится обшемасштабному преобразованию.

6). Если

$$sign(w_1) = -sign(w_2) \neq 0, \quad w_3 = 0, \tag{32}$$

то преобразование (16) с параметром

$$p = \sqrt{-\frac{3w_2}{w_1}} \tag{33}$$

переводит исходную триформу в триформу вида $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega_2', \omega_3')$, причем $\omega_2' \neq 0$, $\omega_3' \neq 0$.

7). Если

$$sign(w_1) = sign(w_2) \neq 0, \quad w_3 = 0, \tag{34}$$

то триформа приводится линейным преобразованием (16) с

$$p = \sqrt{\frac{3w_2}{2w_1}} \tag{35}$$

к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', \omega_2', 0)$, причем $\omega_1' \neq 0$, $\omega_2' \neq 0$.

8). Если

$$w_1 \neq 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \tag{36}$$

то

$$\omega_1' = uw_1p^3, \quad \omega_2' = 3uw_1p^3, \quad \omega_3' = 6uw_1p^3, \tag{37}$$

и значит в этом случае триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, 3\omega_1, 6\omega_1)$ преобразованием (16) переводится в триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', 3\omega_1', 6\omega_1')$, где $sign(\omega_1') = sign(\omega_1)$. Таким образом, преобразование (16) в данном случае сводится к умножению исходной триформы на действительное положительное число, то есть к общему масштабному преобразованию. Эту форму мы исключим при построении тричисел, так как она является вырожденной (8).

9). Осталось рассмотреть вариант

$$w_1 = 0, \quad w_2 \neq 0, \quad w_3 = 0, \tag{38}$$

тогда

$$\omega_1' = 3 \cdot u \cdot w_2 \cdot p = \frac{w_2}{9} = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_2 = 0, \quad \omega_3' = -9 \cdot u \cdot w_2 \cdot p = -\frac{w_2}{3} = -3\omega_1, \tag{39}$$

то есть триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, 0, -3\omega_1)$ переводится преобразованием (16) с произвольным p в триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', 0, -3\omega_1')$. Таким образом, в данном случае преобразование (16) не меняет параметры триформы, то есть это преобразование является преобразованием симметрии триформы $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, 0, -3\omega_1)$.

Дальнейшее упрощение триформы можно произвести, умножая ее на произвольное действительное число неравное нулю. Такая операция сводится к двум: изменению знака сразу у всех координат и общему масштабному преобразованию. В результате, один из коэффициентов $\omega_i' \neq 0$ триформы можно сделать равным единице, то есть произвести нормировку формы. Предложенная схема 1) – 9) вместе с нормировкой не противоречит выделению в качестве канонических трех базисных форм и введению понятия вырожденности, так как данный алгоритм переводит базисные формы (5) – (7) в те же самые базисные формы, а вырожденную триформу – в вырожденную.

Итак, в результате мы пришли к следующему утверждению. Изучение триформы общего вида $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ сводится к изучению 8-ми канонических триформ:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) \equiv \Omega_1(x_1, x_2, x_3); \tag{40}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) \equiv \Omega_2(x_1, x_2, x_3); \tag{41}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3); \tag{42}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6); \tag{43}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 3, 6) \equiv (x_1 + x_2 + x_3)^3, \qquad \text{(вырожденная)}; \tag{44}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, \omega, 0), \qquad \omega \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; 1;] \tag{45}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, \omega), \qquad \omega \neq 0; \tag{46}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, \omega), \qquad \omega \neq 0. \tag{47}$$

Условие на параметр ω (45) для 6-ой канонической триформы необходимо, чтобы исключить неопределенность, которая существует при рассмотрении варианта 2) значений параметров триформы общего вида. Условие $\omega \neq 0$ для 6-ой, 7-ой и 8-мой канонических триформ необходимо, чтобы исключить базисные триформы, которые уже причислены к каноническим.

3. Триформы, которые могут соответствовать тричислам

Вместо того, чтобы непосредственно искать линейные преобразования, оставляющие канонические триформы 1 (40) – 8 (47) неизменными, будем искать бесконечно близкие к тождественному линейные преобразования. Эта задача сводится к нахождению соответствующих генераторов.

1. Не существует непрерывной двухпараметрической абелевой группы Ли, которая бы оставляла вид 1-ой канонической триформы (40) неизменным.

2. Не существует непрерывной двухпараметрической абелевой группы Ли, которая бы оставляла вид 2-ой канонической триформы (41) неизменным.

3. Третья каноническая триформа (42) имеет двухпараметрическую абелеву группу симметрии (группу Ли) с генераторами

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

4. Четвертая каноническая триформа (43) имеет трехпараметрическую неабелеву группу Ли в качестве группы симметрии с генераторами

$$\hat{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

Необходимо проверить, имеется ли в этой группе двухпараметрическая абелева подгруппа.

5. Пятая каноническая триформа (44) является вырожденной, поэтому она исключается при поиске соответствующих ей тричисел.

6. Ни при каких разрешенных значениях параметра (45) 6-я каноническая триформа не имеет двухпараметрической группы Ли, но при $\omega = 1$ эта триформа имеет однопараметрическую группу симметрии. Таким образом, 6-я каноническая триформа не может соответствовать тричислам.

7. Только при значении параметра $\omega = -3$ 7-я каноническая триформа (46) имеет двухпараметрическую абелеву группу Ли в качестве группы симметрии с генераторами

$$\hat{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

причем преобразование (16) с генератором, равным сумме генераторов (50), входит в эту группу симметрии, поэтому триформу $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$ следует отнести к специальным случаям.

8. Восьмая каноническая триформа (47) при $\omega = 3$ имеет однопараметрическую группу симметрии, которая не может соответствовать тричислам, а при $\omega = 2$ – двухпараметрическую абелеву группу симметрии с генераторами

$$\hat{a}_8 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{51}$$

Итак, среди канонических триформ найдены такие четыре невырожденные, которые могут соответствовать тричислам. Сохранив нумерацию канонических триформ, выпишем эти четыре формы, указав генераторы группы симметрии им соответствующей:

$$1. \qquad ---------\quad ;$$

$$2. \qquad ---------\quad ;$$

$$3.\ \ \Omega(x_1,x_2,x_3;0,0,1)\equiv\Omega_3(x_1,x_2,x_3),\quad \{\hat a_1,\hat a_2\}; \tag{52}$$

$$4.\ \ \Omega(x_1,x_2,x_3;1,-\frac{3}{2},6)\quad \{\hat a_3,\hat a_4,\hat a_5\}; \tag{53}$$

$$5. \qquad ---------\quad ;$$

$$6. \qquad ---------\quad ;$$

$$7.\ \ \Omega(x_1,x_2,x_3;1,0,-3),\quad \{\hat a_{12},\hat a_{13}\}; \tag{54}$$

$$8.\ \ \Omega(x_1,x_2,x_3;0,1,2),\quad \{\hat a_{14},\hat a_{15}\}; \tag{55}$$

4. Триформы $\Omega_3(x_1,x_2,x_3),\Omega(x_1,x_2,x_3;0,1,2)$ и тричисла

Рассмотрим триформу $\Omega_3(x_1,x_2,x_3)$, которая, как мы выяснили, обладает двухпараметрической непрерывной группой Ли – группой симметрии с генераторами $\hat a_1,\hat a_2$ (48). Сопоставив единичной матрице и генераторам $\hat a_1,\hat a_2$ базисные элементы $e_1\equiv 1,e_2,e_3$ искомой системы тричисел, получим для них следующую таблицу умножения:

$\times$	1	e_2	e_3
1	1	e_2	e_3
e_2	e_2	$\frac{1}{3}(2-2e_2+e_3)$	$\frac{1}{3}(1-e_2-e_3)$
e_3	e_3	$\frac{1}{3}(1-e_2-e_3)$	$\frac{1}{3}(2+e_2-2e_3)$

Таб. 1.

Тричисла, которые могут соответствовать триформе $\Omega_3(x_1,x_2,x_3)$, найдены. Осталось проверить существуют ли такая система линейных координат, в которых куб нормы найденных тричисел есть эта триформа $\Omega_3(x_1,x_2,x_3)$.

Из вида генераторов (48), очевидно, что полученная система тричисел изоморфна алгебре диагональных матриц 3×3, поэтому такие числа обозначим H_3 , а линейные координаты x_1,x_2,x_3 удобно ввести в базисе

$$\psi_1=\frac{1}{3}(1-e_2-e_3),\quad \psi_2=\frac{1}{3}(1+2e_2-e_3),\quad \psi_3=\frac{1}{3}(1-e_2+2e_3) \tag{56}$$

с таблицей умножения

$\times$	ψ_1	ψ_2	ψ_3
ψ_1	ψ_1	0	0
ψ_2	0	ψ_2	0
ψ_3	0	0	ψ_3

Таб. 2.

Тогда

$$x_1\psi_1+x_2\psi_2+x_3\psi_3=\rho\cdot\exp(\alpha\cdot e_2+\beta\cdot e_3) \tag{57}$$

или

$$x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = \rho \cdot \exp[(-\alpha - \beta) \cdot \psi_1 + \exp(\alpha) \cdot \psi_2 + \exp(\beta) \cdot \psi_3] \tag{58}$$

Таким образом, экспоненциальное представление чисел H_3 возможно, если координаты $x_i > 0$. Если из координатных трех соотношений (58) исключить углы α, β, то получим выражение для куба нормы

$$\rho^3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \tag{59}$$

Это не единственная возможность симметричного введения линейных координат. Для чисел H_3 существует базис, содержащий две гиперболические единицы,

$$1 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad j = -\psi_1 - \psi_2 + \psi_3, \quad k = -\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 \tag{60}$$

$\times$	1	j	k
1	1	j	k
j	j	1	$-1+j+k$
k	k	$-1+j+k$	1

Таб. 3.

Если ввести линейные координаты в этом базисе, то куб нормы чисел H_3 в таких координатах

$$\rho^3 = \Omega(x, x, x; 1, -1, 2) \tag{61}$$

Справа в формуле (61) стоит неканоническая форма. Преобразованием (16) с $p = 4$, изменением знака одновременно у всех координат и общим масштабным преобразованием триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -1, 2)$ переводится в 8-ю каноническую триформу $\Omega(x, x, x; 0, 1, 2)$. Линейные координаты x_i для чисел H_3 можно ввести и так

$$(x_2 + x_3)\psi_1 + (x_1 + x_3)\psi_2 + (x_1 + x_2)\psi_3 = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3), \tag{62}$$

тогда

$$\rho^3 = \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2) \tag{63}$$

– это опять 8-я каноническая форма (55).

Таким образом, триформы $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -1, 2)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ соответствуют одним и тем же тричислам H_3, которые изоморфны алгебре квадратных диагональных матриц 3×3. Хотя триформы $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ нельзя получить одну из другой непрерывным линейным преобразованием (16) вместе с общемасштабным преобразованием и возможно изменением знака у всех трех координат, эти формы все же связаны дискретным линейным преобразованием координат

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

5. Триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{2}{3}, 6)$

Рассмотрим генераторы $\hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5$ линейных преобразований, которые оставляют триформу $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6)$ неизменной. Эти генераторы не коммутируют между собой. Для того чтобы выделить два коммутирующих генератора, образуем следующие линейные комбинации этих операторов:

$$\hat{E}_0 = \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5, \qquad \hat{E}_2 = -\hat{a}_3 + \hat{a}_4, \qquad \hat{E}_3 = -\hat{a}_3 + \hat{a}_5. \tag{65}$$

Для них справедлива таблица умножения

$\times$	$\hat{E}_0$	$\hat{E}_2$	$\hat{E}_3$
$\hat{E}_0$	$3\hat{E}_0$	$3\hat{E}_2$	$3\hat{E}_3$
$\hat{E}_2$	0	0	0
$\hat{E}_3$	0	0	0

Таб. 4.

Таким образом, в качестве пары коммутирующих генераторов можно взять $\hat{E}_2, \hat{E}_3$ или произвольные две линейно независимые их линейные комбинации. Используя Таб. 4, можно показать, что кроме $\hat{E}_2, \hat{E}_3$ и их линейных комбинаций, не существует линейных комбинаций трех операторов $\hat{E}_0, \hat{E}_2, \hat{E}_3$, то есть операторов $\hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5$, коммутирующих между собой. Сопоставим $\hat{E}_2, \hat{E}_3$ символьные элементы e_2, e_3 гиперкомплексного числа, тогда для базисных элементов $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$, получим таблицу Кэли

$\times$	1	e_2	e_3
1	1	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0
e_3	e_3	0	0

Таб. 6.

Тричисла с такой таблицей умножения символьных единиц естественно назвать дуальными и обозначить D_3. Для таких тричисел

$$\rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3) = \rho \cdot (1 + \alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3). \tag{66}$$

Единственная, если не считать порядок нумерации, возможность ввести симметричным образом линейные координаты x_i – это

$$X = x_1 + x_2 \cdot (1 + e_2) + x_3 \cdot (1 + e_3), \tag{67}$$

тогда

$$\rho^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 \equiv \Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 3, 6) \tag{68}$$

– вырожденная триформа.

Таким образом, с триформой $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6)$ нельзя связать тричисла, куб нормы которых был бы равен этой триформе.

6. Триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$

Генераторы $\hat{a}_6, \hat{a}_7$ группы симметрии, относительно которой остается неизменной форма $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$, обладают следующими правилами умножения:

$$\hat{a}_6 \cdot \hat{a}_6 = \hat{a}_7, \qquad \hat{a}_7 \cdot \hat{a}_7 = \hat{a}_6, \qquad \hat{a}_6 \cdot \hat{a}_7 = \hat{a}_7 \cdot \hat{a}_6 = 1. \tag{69}$$

Сопоставив им символьные элементы e_2, e_3 системы тричисел, получим для последних и единичного элемента таблицу Кэли

$\times$	1	e_2	e_3
1	1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	1
e_3	e_3	1	e_2

Таб. 7.

Гиперкомплексные ассоциативно-коммутативные трехмерные числа с законом умножения базисных элементов, приведенных в Таб. 7, будем обозначать C_3. Используя эту таблицу Кэли, получим формулу

$$\exp(\alpha\cdot e_2+\beta\cdot e_3)=\frac{1}{3}\,e^{\alpha+\beta}\{1+2e^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\cos[\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)]\}+$$
$$+\frac{1}{3}e^{\alpha+\beta}\{1-2e^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\cos[\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{3}]\}\cdot e_2+$$
$$\frac{1}{3}e^{\alpha+\beta}\{1-2e^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\cos[\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)-\frac{\pi}{3}]\}\cdot e_3. \quad (70)$$

Введем координатную систему x_1, x_2, x_3 в том же базисе следующим образом:

$$x_1+x_2\cdot e_2+x_3\cdot e_3=\exp(\alpha\cdot e_2+\beta\cdot e_3). \quad (71)$$

Используя формулу (70) и три координатных соотношения (71), получим два соотношения

$$x_1+x_2+x_3=\rho\cdot e^{(\alpha+\beta)},\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{3}\rho^2\cdot e^{2(\alpha+\beta)}\{1+2\cdot e^{-3(\alpha+\beta)}\}, \quad (72)$$

которые уже не содержат разности параметров $(\alpha-\beta)$. Исключая из соотношений (72) сумму параметров $(\alpha+\beta)$, имеем

$$\rho^3=\frac{3}{2}\cdot(x_1+x_2+x_3\}\cdot(x_1^2+x_2^2+x_3^2\}-\frac{1}{2}\cdot(x_1+x_2+x_3\}^3\equiv\Omega(x_1,x_2,x_3;1,0,-3\}. \quad (73)$$

Таким образом, для тричисел C_3 куб модуля есть триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$.

Хотя для чисел C_3 из символьных элементов и единицы можно составить линейную комбинацию

$$j=\frac{1}{3}[1-2(e_2+e_3)],\qquad j^2=1, \quad (74)$$

которая является гиперболической единицей ($j^2=1$), то есть числа C_3 – это обобщение гиперболических (двойных) чисел; и нельзя составить линейную комбинацию, которая бы являлась эллиптической единицей ($i^2=-1$); в каком-то смысле тричисла C_3 есть обобщение и комплексных чисел, для которых символьная единица – решение алгебраического уравнения $x^2=-1$. Для чисел C_3 базисные элементы $1, e_2, e_3$, являются корнями кубического уравнения $x^3=1$, или с измененным знаком $-1, -e_2, -e_3$ – корнями уравнения $x^3=-1$. Так как, с одной стороны, в комплексных числах уравнение $x^3=1$ имеет три корня

$$1,\quad -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (75)$$

из которых можно выделить мнимую единицу как линейную их комбинацию; а, с другой стороны, формулы (70) содержат тригонометрические функции, поэтому (и именно в этом смысле) числа C_3 можно считать обобщением на трехмерный случай не только двойных (гиперболических), но и комплексных чисел.

6. Заключение

Из всего множества систем ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел требование существования такого базиса, в котором куб нормы тричисла, если она (норма) существует, есть невырожденная триформа, выделяет с точностью до изоморфизма лишь две системы гиперкомплексных трехмерных чисел: C_3 и H_3. Числам C_3 соответствует каноническая триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$ (см. раздел 6 настоящей работы), а тричислам H_3 соответствуют канонические триформы $\Omega_3(x_1, x_2, x_3), \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ (см. раздел 4 настоящей работы).

Полученный результат позволяет надеяться, что и для n-чисел с $n > 3$, требование существования такого базиса, в котором n-я степень нормы (если норма существует) n-числа равнялась n-форме координат в этом базисе, выделит узкий класс гиперкомплексных чисел, которые будут являться обобщением комплексных и гиперболических чисел (бичисел). Есть основания полагать, что именно такие гиперкомплексные числа в первую очередь найдут применение в математике и физике, когда задачи в той или иной мере симметричны относительно перестановки координат или некоторого преобразования, "смешивающего" координаты, но оставляющего их, в каком-то смысле, равноправными.