КВАТЕРНИОНЫ: АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

А. П. Ефремов

Российский университет дружбы народов
a.yefremov@rudn.ru

В статье дан обзор результатов изучения алгебраических, геометрических и дифференциальных свойств кватернионных (Q) чисел и их приложений. Кратко изложены традиционная и "тензорная" формы записи и представления Q-единиц. Установлена их структура, а также определены группы их преобразований, сохраняющие форм-инвариантность правила Q-умножения. Рассмотрен ряд математических и физических приложений: применение триад Q-единиц как подвижных реперов, построение различных семейств векторных Q-пространств, запись уравнений механики в произвольно вращающихся системах отсчета, а также реализация модели Q-теории относительности, содержащей все эффекты специальной теории относительности, но допускающей описание кинематики неинерциального движения. Приведен перечень "кватернионных совпадений" – физических соотношений и теорий, естественным образом связанных с математикой Q-чисел.

Введение

Открытие кватернионных (Q) чисел датируется 1843 годом и обычно связывается с именем В. Р. Гамильтона [1, 2], хотя еще в предшествующем веке в математику Q-типа объектов вклад внесли Эйлер и Гаусс; более того, Родригес записал правило умножения для элементов схожей алгебры [3-5]. Активное противостояние Гиббса и Хевисайда позициям учеников Гамильтона привело к возникновению современной векторной алгебры, позже – векторному анализу. После этого алгебра кватернионов практически перестала служить инструментом математической физики, несмотря на ее исключительный характер, установленный теоремой Фробениуса. В начале 20 века пал последний бастион любителей Q-чисел: распалось международное "Общество содействия изучению кватернионов". Единственной реминисценцией некогда знаменитых гиперкомплексных чисел явились матрицы Паули. В более позднее время кватернионы эпизодически использовались как математический аппарат для альтернативного описания уже известных физических моделей [6, 7] или, благодаря удивительным по содержанию и красоте свойствам, применялись в решении задач кинематики твердого тела [8]. Интерес к кватернионным числам существенно возрос в последние два десятка лет с приходом нового поколения теоретиков, почувствовавших в кватернионах высокий нераскрытый потенциал (e. g. [9-11]).

Данная работа представляет собой своего рода обзор направлений использования гиперкомплексных Q-чисел для описании различных физических систем, а также перспектив в этой области. Кроме того, здесь обсуждаются конкретные физические модели, иногда неожиданные, но, как представляется, заслуживающие внимания.

Обзор организован следующим образом. В разделе 1 кратко описаны общие соотношения алгебры кватернионов – как в традиционной Гамильтоновой формулировке, так и в "тензорном" формате. Раздел 2 посвящен описанию структуры трех "мнимых" кватернионных единиц. В разделе 3 приведены элементы дифференциальной Q-геометрии с примерами математических приложений. Раздел 4 посвящен изложению механики Ньютона во вращающихся системах отсчета, описываемых посредством кватернионных реперов. В разделе 5 представлена кватернионная теория относительности и описан ряд следующих из нее кинематических релятивистских эффектов. Раздел 6 содержит список "замечательных кватернионных совпадений", а также заключительное обсуждение проблемы.

1. Алгебра кватернионов

Традиционный подход

По Гамильтону, кватернион есть математический объект вида

$$Q \equiv a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

где a, b, c, d – действительные числа, a – множитель действительной единицы "1", а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – три разные мнимые кватернионные единицы. Правило умножения этих единиц, записанное еще Гамильтоном и часто повторяемое в литературе, имеет вид

$$1\mathbf{i} = \mathbf{i}1 \equiv \mathbf{i}, \qquad 1\mathbf{j} = \mathbf{j}1 \equiv \mathbf{j}, \qquad 1\mathbf{k} = \mathbf{k}1 \equiv \mathbf{k},$$
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,$$
$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

Эти громоздкие уравнения означают, что Q-умножение теряет коммутативность

$$Q_1 Q_2 \neq Q_2 Q_1,$$

так что появляется понятие правого и левого умножения, но остается ассоциативным

$$(Q_1 Q_2) Q_3 = Q_1 (Q_2 Q_3).$$

В кватернионе естественно выделяются две алгебраически весьма различные части, которые можно обозначить как скалярную:

$$scal\ Q = a,$$

и векторную

$$vect\ Q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Сложение (вычитание) кватернионов осуществляется покомпонентно: отдельно складываются (вычитаются) скалярные и векторные части. По сложению Q-алгебра коммутативна и ассоциативна.

Далее вводится операция кватернионного сопряжения, аналогичного сопряжению комплексных чисел

$$\bar{Q} \equiv scal\ Q - vect\ Q = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k},$$

и определяется модуль Q-числа

$$|Q| \equiv \sqrt{Q\bar{Q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Последние действия позволяют сформулировать правило деления кватернионов, которое, как и умножение, может быть "правым" и "левым"

$$Q_L = \frac{Q_1 \bar{Q}_2}{|Q_2|^2}, \qquad Q_R = \frac{\bar{Q}_2 Q_1}{|Q_2|^2}.$$

Из формулы модуля Q-числа сразу же следует знаменитое тождество четырех квадратов

$$|Q_1Q_2|^2 = |Q_1|^2 |Q_2|^2 .$$

В силу вышеперечисленных свойств Q-числа составляют алгебру, принадлежащую к элитной группе четырех так называемых исключительных – "очень хороших" – алгебр: действительных, комплексных, кватернионных чисел и октав (теоремы Фробениуса и Гурвица 1878-1898 г. г. [12]).

Особое внимание стоит уделить представлениям Q-единиц. В обозначениях Гамильтона действительная единица есть просто 1, тогда как три мнимые единицы по аналогии с алгеброй комплексных чисел обозначены как **i, j, k**. Позже было найдено простое представление этих единиц с помощью постоянных 2×2 матриц

$$\mathbf{i} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это представление, конечно, не единственное. Вот один простой пример. Если в последних выражениях мнимую единицу алгебры комплексных чисел i представить 2×2 матрицей с действительными компонентами

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то тогда три векторные Q-единицы оказываются представленными действительными 4×4 матрицами. Понятно, что процедуру удвоения ранга матриц представления можно продолжить до бесконечности.

"Тензорный" формат и представления

Если каждой Q-единице присвоить номер (подобно тому, как нумеруются компоненты тензора)

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \to (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \mathbf{q}, \qquad k, j, k, l, m, n, \ldots = 1, 2, 3,$$

то кватернионное правило умножения приобретает компактный вид

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \qquad \mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n,$$

где δ_{kn} и ε_{knj} – соответственно 3-мерные (3D) символы Кронекера и Леви-Чивиты. Далее, можно показать, что число представлений Q-единиц даже только 2×2 матрицами бесконечно. Действительно, из двух любых 2×2 матриц со свойствами

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}, \qquad TrA = TrB = 0,$$

можно следующим образом сконструировать две первые Q-единицы

$$\mathbf{q}_1 = \frac{A}{\sqrt{\det A}}, \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{B}{\sqrt{\det B}},$$

при этом третья единица есть

$$\mathbf{q}_3 \equiv \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \frac{AB}{\sqrt{\det A \det B}} \qquad \text{при условии} \;\; Tr(AB) = 0.$$

Скалярная единица всегда неизменна:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразования Q-единиц и инвариантность правила умножения

a. Преобразования спинорного типа

Если U – оператор, изменяющий сразу все единицы, и существует ему обратный $U^{-1}: \quad UU^{-1} = E$, то преобразования

$$\mathbf{q}_{k'} \equiv U\mathbf{q}_k U^{-1} \quad \text{и} \quad 1' \equiv U1U^{-1} = E1 = 1$$

оставляют правило умножения

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_j \mathbf{q}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n$$

форм-инвариантным

$$\mathbf{q}_{k'}\mathbf{q}_{n'} = U\mathbf{q}_k U^{-1} U\mathbf{q}_n U = U\delta_{kn}U^{-1} + \varepsilon_{knj}U\mathbf{q}_j U^{-1} = \delta_{kn} + \varepsilon_{knj}\mathbf{q}_{j'}.$$

Такой оператор может быть представлен, например, 2×2 матрицей

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det U = 1,$$

или унимодулярным кватернионом

$$U = \frac{a+d}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}\,\mathbf{q},$$

где

$$\mathbf{q} \equiv \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix}.$$

В общем случае это преобразование содержит 3 независимых комплексных параметра (или 6 действительных), тогда $U \in SL(2, C)$. В специальном случае есть только три действительных параметра, тогда $U \in SU(2)$.

b. Преобразования векторного типа

Векторные Q-единицы могут быть преобразованы с помощью 3×3 матрицы $O_{k'n}$

$$\mathbf{q}_{k'} = O_{k'n}\mathbf{q}_n.$$

Требование форм-инвариантности правила Q-умножения имеет следствием свойства ортогональности и унимодулярности матрицы преобразования

$$O_{k'n}O_{j'n} = \delta_{kn} \Rightarrow O^{-1}_{nk'} = O_{k'n}, \quad \det O = 1.$$

Понятно, что в общем случае и это преобразование имеет 6 независимых действительных параметров, тогда $O \in SO(3, C)$. В специальном случае параметров 3, тогда

$O \in SO(3,R)$. Ниже приведен вариант матрицы преобразования O, в которой x, y, z – произвольные действительные или комплексные функции

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2-z^2} & -\frac{x\sqrt{1-y^2-z^2}+yz\sqrt{1-x^2-z^2}}{1-z^2} & \frac{xy-z\sqrt{1-x^2-z^2}\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z^2} \\ x & \frac{\sqrt{1-x^2-z^2}\sqrt{1-y^2-z^2}-xyz}{1-z^2} & \frac{-y\sqrt{1-x^2-z^2}-xz\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z^2} \\ z & y & \sqrt{1-y^2-z^2} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица может быть представлена как произведение трех неприводимых сомножителей

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{1-z^2}} & -\frac{x}{\sqrt{1-z^2}} & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-z^2}} & \sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{1-z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & \sqrt{1-z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1-y^2-z^2}{1-z^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-z^2}} \\ 0 & \frac{y}{\sqrt{1-z^2}} & \sqrt{\frac{1-y^2-z^2}{1-z^2}} \end{pmatrix}.$$

и после подстановок $z \equiv \sin \mathrm{B}$, $x \equiv -\sin \mathrm{A} \cos \mathrm{B}$, $y \equiv -\sin \Gamma \cos \mathrm{B}$, где А, В, Г – комплексные "углы" приведена к виду

$$O = \begin{pmatrix} \cos \mathrm{A} & \sin \mathrm{A} & 0 \\ -\sin \mathrm{A} & \cos \mathrm{A} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mathrm{B} & 0 & -\sin \mathrm{B} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \mathrm{B} & 0 & \cos \mathrm{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Gamma & \sin \Gamma \\ 0 & -\sin \Gamma & \cos \Gamma \end{pmatrix} = O_3^{\mathrm{A}} O_2^{\mathrm{B}} O_1^{\Gamma}.$$

Если углы действительные: $\mathrm{A} = \alpha$, $\mathrm{B} = \beta$, $\Gamma = \gamma$, то данное преобразование есть обычное векторное вращение, составленное из трех простых поворотов вокруг ортогональных пронумерованных осей: $O \Rightarrow R, R = R_3^{\alpha} R_2^{\beta} R_1^{\gamma}$. Взаимосвязь между родственными "спинорными" и "векторными" преобразованиями легко определяется:

$$O_{k'n} = -\frac{1}{2} Tr(U \mathbf{q}_k U^{-1} \mathbf{q}_n), \qquad U = \frac{1 - O_{k'n} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_n}{2\sqrt{1 + O_{mm'}}}$$

.

Q-геометрия в трехмерном пространстве

Еще Гамильтон заметил, что триада Q-единиц ведет себя как три взаимосвязанных единичных вектора (длиной i), порождающих декартову систему координат, впрочем, несколько экзотическую в силу собственной "мнимости". В связи с этим, в 3D-пространстве триада $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ будет называться кватернионным базисом (Q-базисом). Преобразования Q-единиц имеют при этом очевидный геометрический смысл различных поворотов Q-базиса. Пример: простое вращение на действительный угол вокруг оси № 3

$$\mathbf{q}' = R_3^{\alpha} \mathbf{q}.$$

В любом Q-базисе можно определить трехмерный кватернионный вектор (Q-вектор)

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{q}_k,$$

все компоненты которого a_k здесь действительны. Важнейшее свойство Q-вектора – его инвариантность по отношению к векторным преобразованиям из группы SO(3,R)

$$\mathbf{a}' = a_{k'} \mathbf{q}_{k'} = a_{k'} R_{k'j} \mathbf{q}_j = a_j \mathbf{q}_j = \mathbf{a}.$$

Проекция Q-вектора на произвольную координатную ось (представленную любой другой Q-единицей) может быть найдена двумя различными способами. Первый: если известны, по крайней мере, один набор проекций Q-вектора и матрицы поворота

$R_{nk'}$, то проекции этого вектора на повернутые оси сразу определяются из соотношения инвариантности

$$a_{k'} = a_n R_{nk'}.$$

Второй способ связан с наличием внутренней структуры Q-единиц; краткий анализ ее дан в следующем разделе.

2. Структура кватернионных "мнимых" единиц

Собственные функции Q-единиц [13]

Любую векторную Q-единицу можно рассматривать как оператор и сформулировать для нее задачу на собственные функции (СФ) и значения:

$$\mathbf{q}\psi = \lambda\psi, \qquad \varphi\mathbf{q} = \mu\varphi.$$

Решением этой задачи являются собственные значения ("мнимая длина" Q-единицы с делением по четности)

$$\lambda = \mu = \pm i,$$

и два набора (один для каждой четности) СФ, представимых в виде столбцов $\psi^{\pm}$ и строк $\varphi^{\pm}$ и являющихся функциями компонент $\mathbf{q}$.

Вот пример явного вида СФ: для Q-единицы, представленной матрицей

$$\mathbf{q} = -\frac{i}{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

где $T \equiv a^2 + bc \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, ее СФ определяются как

$$\varphi^{\pm} = x\begin{pmatrix} 1 & \pm\frac{b}{T\pm a} \end{pmatrix}, \qquad \psi^{\pm} = y\begin{pmatrix} 1 \\ \mp\frac{c}{T\pm a} \end{pmatrix},$$

где x, y – произвольные комплексные множители.

Возникающая в процессе расчета свобода компонент редуцирована удобным условием нормировки

$$\varphi^{\pm}\psi^{\pm} = 1,$$

однако врожденным свойством СФ является их ортогональность по четности

$$\varphi^{\mp}\psi^{\pm} = 0.$$

Перемножая СФ тензорным образом, можно построить 2×2 матрицу

$$C^{\pm} \equiv \psi^{\pm}\varphi^{\pm},$$

обладающую свойствами, взаимными по отношению к свойствам вектора:

$$\det C = 0, \quad Tr\, C = 1,$$

тогда как

$$\det \mathbf{q} = 1, \quad Tr\, \mathbf{q} = 0.$$

Матрица С является идемпотентной

$$C^n = C,$$

и выражается через порождающий ее единичный Q-вектор

$$C^{\pm} = \frac{1 \pm i\mathbf{q}}{2}.$$

Обращение последнего выражения дает представление о внутренней структуре Q-единицы

$$\mathbf{q} = \pm i(2C^{\pm} - 1) = \pm i(2\psi^{\pm}\varphi^{\pm} - 1),$$

которая, как видно, состоит из комбинации ее СФ и скалярной единицы.

Понятно, что каждая Q-единица имеет свои СФ, следовательно, любая триада Q-единиц имеет присущий только ей набор СФ $\{\varphi^{\pm}_{(k)}, \psi^{\pm}_{(k)}\}$. Относительного такого набора имеется интересное алгебраическое наблюдение. Если Q-единицы связаны между собой нелинейной комбинацией – умножением, например:

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2,$$

то соответствующие СФ, как несложно показать, зависят друг от друга линейно:

$$\varphi^{\pm}_{(3)} = \sqrt{\mp i}\varphi^{\pm}_{(1)} \pm \sqrt{i}\varphi^{\pm}_{(2)}, \quad \psi^{\pm}_{(3)} = \sqrt{\pm i}\psi^{\pm}_{(1)} \pm \sqrt{-i}\psi^{\pm}_{(2)}.$$

С помощью кватернионных СФ можно представить спинорного типа преобразование Q-единиц, оставляющее инвариантным Q-умножение, в знакомом виде

$$\psi^{\pm}_{(k')} = U\psi^{\pm}_{(k)}, \quad \varphi^{\pm}_{(k')} = \varphi^{\pm}_{(k)}U^{-1},$$

так что СФ можно трактовать как набор специфических спинорных функций, допускающих в общем случае преобразования из группы $SL(2C)$. Также стоит отметить еще одно математическое наблюдение: из пар СФ, принадлежащих разным Q-единицам одной триады и имеющим различную четность, можно построить 24 скалярных инварианта группы $SL(2C)$; эти инварианты являются действительными или комплексными числами, например:

$$\sigma^{+}_{12} \equiv \varphi^{+}_{(1)}\psi^{+}_{(2)} = \sqrt{-\frac{i}{2}} = \frac{1-i}{2}.$$

Кватернионные собственные функции как проекторы

СФ действуют на свой собственный Q-базис следующим образом

$$\varphi^{\pm}_{(1)}\mathbf{q}_1\psi^{\pm}_{(1)} = \pm i, \quad \varphi^{\pm}_{(1)}\mathbf{q}_2\psi^{\pm}_{(1)} = 0, \quad \varphi^{\pm}_{(1)}\mathbf{q}_3\psi^{\pm}_{(1)} = 0,$$

или, в краткой записи

$$\varphi^{\pm}_{(k)}\mathbf{q}_n\psi^{\pm}_{(k)} = \pm i\delta_{kn} \qquad \text{(нет суммирования по k).}$$

Похоже на то, что СФ избирают проекцию порождающего их единичного Q-вектора. Эта идея подтверждается примером действия СФ одного Q-базиса на векторы повернутого Q-базиса

$$\varphi^{\pm}_{(k)}\mathbf{q}_{n'}\psi^{\pm}_{(k)} = \varphi^{\pm}_{(k)}R_{n'm}\mathbf{q}_m\psi^{\pm}_{(k)} = \pm iR_{n'k} = \pm i\cos\angle(\mathbf{q}_{n'}, \mathbf{q}_k) \quad \text{(нет суммирования по k),}$$

результат действия – с точностью до множителя проекция Q-базиса $\mathbf{q}'$ на $\mathbf{q}$. Проекцию в чистом виде удобно обозначить так

$$\langle\mathbf{q}_{\mathbf{n}'}\rangle_k \equiv \mp i\varphi^{\pm}_{(k)}\mathbf{q}_{n'}\psi^{\pm}_{(k)} = \cos\angle(\mathbf{q}_{n'}, \mathbf{q}_k) \qquad \text{(нет суммирования по k).}$$

Теперь несложно записать правило вычисления проекции любого Q-вектора $\mathbf{a}$ на произвольное направление, заданное вектором $\mathbf{q}_j$ (например, с помощью СФ положительной четности)

$$\langle \mathbf{a} \rangle_j^+ \equiv -ia_{k'}\varphi_{(j)}^+ \mathbf{q}_{k'}\psi_{(j)}^+ = a_{k'}R_{k'j} = a_j \qquad \text{(нет суммирования по j)}.$$

Таким образом, кватернионные СФ, будучи более фундаментальным, чем Q-единицы математическим объектом с интересными свойствами, к тому же являют собой полезный инструмент, который можно использовать в практических целях, в том числе, для вычисления проекций Q-векторов.

4. Дифференциальная Q-геометрия

Кватернионная связность

Если векторы Q-базиса являются достаточно гладкими функциями параметров $\mathbf{q}_k(\Phi_\xi)$ (индекс ξ перечисляет параметры), то

$$d\mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi\ kj}\mathbf{q}_j d\Phi_\xi,$$

где объект $\omega_{\xi\ kj}$ называется кватернионной связностью. Q-связность антисимметрична по векторным индексам

$$\omega_{\xi\ kj} + \omega_{\xi\ jk} = 0,$$

и имеет следующее число независимых компонент

$$N = Gp(p-1)/2,$$

где G – число параметров и p = 3 – число размерностей пространства. Если G = 6 [случай группы SO(3,C)], то N = 18; если G = 3 [случай группы SO(3,R)], то N = 9. Q-связность можно вычислить, по крайней мере, тремя способами:

$$\text{используя векторы Q-базиса} \qquad \omega_{\xi\ kn} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial \Phi_\xi} \right\rangle_n^+,$$

используя матрицы из группы SL(2C) (в общем случае) и специальное представление постоянных Q-единиц $\mathbf{q}_{\tilde{k}} = -i\sigma_k$, где σ_k – матрицы Паули

$$\omega_{\xi\ kn} = \left\langle U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \Phi_\xi}\mathbf{q}_{\tilde{k}} - \mathbf{q}_{\tilde{k}}U\frac{\partial U^{-1}}{\partial \Phi_\xi} \right\rangle_n^+,$$

и, наконец, используя матрицы O из $SO(3,C)$ (в общем случае)

$$\omega_{\xi\ kn} = \frac{\partial O_{k\tilde{j}}}{\partial \Phi_\xi}O_{n\tilde{j}}.$$

Все формулы, конечно, дают один и тот же результат.

С точки зрения векторных преобразований Q-связность не является тензором. Если $\mathbf{q}_k = O_{kp'}\mathbf{q}_{p'}$, то преобразованные компоненты связности выражаются через исходные с добавлением неоднородного слагаемого

$$\omega_{\xi\ kj} = O_{kp'}O_{jn'}\omega_{\xi\ p'n'} + O_{jp'}\frac{\partial O_{kp'}}{\partial \Phi_\xi}.$$

В трехмерном случае Q-связность имеет ясную геометрическую и физическую трактовку, поскольку переменный Q-базис ведет себя как картанов репер. Параметры его обычных поворотов могут зависеть от пространственных координат $\Phi_\xi = \Phi_\xi(x_k)$, тогда $\partial_n \mathbf{q}_k = \Omega_{nkj}\mathbf{q}_j$, и компоненты несколько модифицированной Q-связности

$$\Omega_{nkj} \equiv \omega_{\xi\ kj}\partial_n \Phi_\xi$$

имеют смысл коэффициентов вращения Риччи. Параметры могут также зависеть от длины линии движения Q-базиса или от времени наблюдателя. Тогда $\Phi_\xi = \Phi_\xi(t), \partial_t \mathbf{q}_k = \Omega_{kj}\mathbf{q}_j$, и компоненты Q-связности

$$\Omega_{kj} \equiv \omega_{\xi\ kj}\partial_t \Phi_\xi$$

представляют собой обобщенные угловые скорости вращений репера.

Вот характерные примеры использования понятий Q-репера и Q-связности:

а) Репер Френе. Для гладкой кривой $x_{\tilde{k}}(s)$, заданной в постоянном базисе, репер Френе представлен триадой $\mathbf{q}_k$, удовлетворяющей уравнениям

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_1 = R_I(s)\mathbf{q}_2,\ \frac{d}{ds}\mathbf{q}_2 = -R_I(s)\mathbf{q}_1 + R_{II}(s)\mathbf{q}_3,\ \frac{d}{ds}\mathbf{q}_3 = -R_{II}(s)\mathbf{q}_2,$$

в которых первая и вторая кривизны суть

$$R_I = \Omega_{12}, R_{II} = \Omega_{23}.$$

б) Закрученная прямая линия. Для заданной прямой $x_{\tilde{1}} = u,\ x_{\tilde{2}} = x_{\tilde{3}} = 0$, можно построить ассоциированный с ней Q-базис так, что один вектор является касательным линии. При этом Q-связность отлична от нуля и представлена единственной компонентой, описывающей закручивание прямой вдоль самой себя

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\gamma(u)} \\ ie^{i\gamma(u)} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Omega_{23} = \frac{d\gamma}{du},$$

здесь $\gamma(u)$ – угол, произвольно, но гладко, зависящий от длины прямой.

Кватернионные пространства

Касательное Q-пространство [15]. Известно, что над любым N-мерным дифференцируемым многообразием U_N с координатами $\{y^A\}$ можно построить касательное пространство T_N с координатами $\{X^{(A)}\}$ так, $dX^{(A)} = g_B^{(A)}dy^B$, где $g_B^{(A)}$ – коэффициенты Ламе. Отсюда дополнительным поворотом строится касательное Q-пространство $T(U, \mathbf{q})$, имеющее координаты $\{x_k\}$, k = 1,2,3, ассоциированные с векторами Q-репера

$$dx_k = h_{k(A)}dX^{(A)} = h_{k(A)}g_B^{(A)}dy^B,$$

где $h_{k(A)}$ – вообще говоря, неквадратные матрицы, нормируемые с помощью проекторов базового пространства на трехмерное.

Собственно кватернионное пространство $\mathbf{U}_3$ определяется как 3D-пространство, локально идентичное собственному касательному пространству $T(\mathbf{U}_3, \mathbf{q})$. Q-пространство имеет следующие основные характеристики. Его Q-метрика представлена векторной частью правила Q-умножения $\mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n$, она несимметрична, ее антисимметричная часть является Q-оператором (матрицей), так что каждая точка $\mathbf{U}_3$ имеет внутреннюю кватернионную структуру. Q-связность $\mathbf{U}_3$

может быть: (i) собственной (метрической) $\Omega_{nkj} \equiv \omega_{\xi kj}\partial_n\Phi_\xi$, для переменного Q-базиса она всегда отлична от нуля, и (ii) аффинной (неметрической), не зависящей от Q-базиса. Q-кручение в обоих случаях не исчезает, тогда как Q-кривизна $r_{knab} = \partial_a\Omega_{bkn} - \partial_b\Omega_{akn} + \Omega_{ajn}\Omega_{bjk} - \Omega_{bjk}\Omega_{ajn}$ для метрической Q-связности тождественно равна нулю, но может присутствовать в пространстве аффинной Q-связности.

С введением понятие Q-пространства возникает новая область исследований дифференцируемых многообразий и пространств. Так, в предварительной классификации Q-пространств по наличию и природе кривизны, кручения и неметричности различаются, по меньшей мере, 10 различных семейств [15]. Кроме того, Q-пространства могут быть нетривиальным фоном для построения теорий и решения задач классической и квантовой физики.

4. Механика Ньютона в Q-базисе

Уравнения динамики во вращающемся репере [16]

Наделенный часами Q-базис становится классической (нерелятивистской) системой отсчета. Для инерциального наблюдателя динамические уравнения классической механики могут быть записаны в постоянном Q-базисе

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_{\tilde{k}}\mathbf{q}_{\tilde{k}} = F_{\tilde{k}}\mathbf{q}_{\tilde{k}}.$$

$SO(3,R)$-инвариантность двух Q-векторов – радиус-вектора $\mathbf{r} \equiv x_k\mathbf{q}_k$ и силы $\mathbf{F} \equiv F_k\mathbf{q}_k$ позволяют представить эти уравнения в векторной кватернионной форме

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_k\mathbf{q}_k) = F_k\mathbf{q}_k, \qquad \text{или} \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

В явном виде эти уравнения имеют достаточно сложную структуру

$$m(\frac{d^2}{dt^2}x_n + 2\frac{d}{dt}x_k\Omega_{kn} + x_k\frac{d}{dt}\Omega_{kn} + x_k\Omega_{kj}\Omega_{jn}) = F_n$$

которая, тем не менее, поддается упрощению и физической интерпретации. Благодаря антисимметрии связности (обобщенной угловой скорости)

$$\Omega_j \equiv \Omega_{kn}\frac{1}{2}\varepsilon_{knj}, \qquad \Omega_{kn} = \Omega_j\varepsilon_{knj},$$

уравнения динамики можно переписать в векторных компонентах

$$m(a_n + 2v_k\Omega_j\varepsilon_{knj} + x_k\frac{d}{dt}\Omega_j\varepsilon_{knj} + x_k\Omega_j\Omega_m\varepsilon_{jkp}\varepsilon_{mpn}) = F_n$$

или с помощью привычной векторной символики

$$m(\vec{a} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v} + \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) = \vec{F}.$$

В слагаемых левой части, казалось бы, легко узнать четыре классических ускорения: линейное, кориолисово, угловое и центростремительное. Однако, такая традиционная интерпретация верна только для простого вращения; в случае комбинации многих вращений репера число компонент обобщенных ускорений подобного вида оказывается значительно больше, а сами уравнения существенно сложнее. Стоит заметить, что вывод уравнений для самых сложных вращений с использованием понятий Q-базиса и Q-связности чрезвычайно прост.

Примеры Q-формулировки задач классической механики

Следящий Q-базис – это репер, один из векторов которого, например $\mathbf{q}_1$ всегда направлен на наблюдаемую частицу. Динамические уравнения для этого случая в явном виде записываются следующим образом

$$\ddot{r} - r(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) = F_1/m,$$

$$2\dot{r}\Omega_3 + r\dot{\Omega}_3 + r\Omega_2\Omega_1 = F_2/m,$$
$$2\dot{r}\Omega_2 + r\dot{\Omega}_2 + r\Omega_1\Omega_3 = -F_3/m.$$

Компоненты Q-связности заданы как функции углов двух поворотов, первого (угол α) – вокруг вектора $\mathbf{q}_3$, второго (угол β) – вокруг $\mathbf{q}_2$

$$\Omega_1 = \dot{\alpha}\sin\beta, \qquad \Omega_2 = -\dot{\beta}, \qquad \Omega_3 = \dot{\alpha}\cos\beta.$$

Метод следящего Q-базиса удобен для решения ряда механических задач, связанных с вращением – иной раз весьма сложным – наблюдаемых объектов и систем отсчета. Вот иллюстрация.

Вращающийся осциллятор. Ищется закон движения $r(t)$ гармонического осциллятора (масса m, упругость пружины k) имеющего свободу движения вдоль твердого гладкого стержня, вращающегося в плоскости вокруг одного своего конца (точки крепления пружины) с угловой скоростью ω; точка равновесия находится на расстоянии l от центра вращения, сил тяжести нет. Радиальное и касательное динамические уравнения в следящем Q-базисе (F – неизвестная сила реакции стержня)

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -\frac{k}{m}(r-l), \qquad 2\dot{r}\omega = \frac{1}{m}F,$$

имеют следующее семейство решений:

$$\text{(i)} \qquad r(t) = r_0 + v_0 t + at^2$$

масса квадратично (или линейно) по времени движется в сторону от центра вращения,

$$\text{(ii)} \qquad r(t) = const + Ae^{iwt} + Be^{-iwt}, \qquad w \equiv \sqrt{k/m - \omega^2}$$

здесь три различные ситуации в зависимости от соотношения величин под радикалом:

– r = const,

– гармонические колебания,

– экспоненциальное по времени удаление от центра вращения.

Интересно, что варианты поведения вращающегося классического осциллятора при $l = 0$ в точности сходны с вариантами поведения четырех известных космологических моделей Эйнштейна-ДеСиттера-Фридмана, рассматриваемых в рамках общей теории относительности.

5. Построение кватернионной теории относительности

Гиперболические вращения и бикватернионы [17]

Выше было отмечено, что SO(3,C)-преобразования Q-единиц допускают наличие чисто мнимых параметров. При этом повороты становятся гиперболическими (H – от hyperbolic); например, простое H-вращение $\mathbf{q}' = H_3^{\psi}\mathbf{q}$ осуществляется матрицей вида

$$H_3^{\psi} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -i\sin\psi & 0 \\ i\sin\psi & \cosh\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а 2×2 -матрицы представления Q-единиц теряют свойство антиэрмитовости:

$$\mathbf{q}_{1'} = -i\begin{pmatrix} 0 & e^{\psi} \\ e^{-\psi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь уместно вспомнить о так называемых бикватернионных (BQ) векторах. BQ-вектор определяется как Q-вектор с комплексными компонентами $\mathbf{u} = (a_k + ib_k)\mathbf{q}_k$. Очевидно, что для векторов такого типа не всегда можно определить норму (или модуль). Но среди всех BQ-векторов есть подмножество "хороших" BQ-векторов с определяемой нормой $\mathbf{u}^2 = b^2 - a^2$. Эти векторы оказываются форм-инвариантными относительно преобразований подгруппы $SO(2,1) \subset SO(3,C)$, и в частности, относительно простых H-вращений $\mathbf{q}' = H\mathbf{q}\mathbf{u} = u_k\mathbf{q}_k = u_{k'}\mathbf{q}_{k'}$, но только при условии ортогональности друг другу взаимно-мнимых составляющих $a_k b_k = 0$.

Кватернионная теория относительности

Сделанные выше наблюдения позволяют предположить существование пространственно-временного BQ-векторного "интервала"

$$d\mathbf{z} = (dx_k + idt_k)\mathbf{q}_k,$$

имеющего специфические свойства:

(i) интервал времени задается мнимым вектором,

(ii) пространство-время модели оказывается шестимерным (6D),

(iii) вектор перемещения частицы и вектор соответствующего изменения времени должны быть всегда перпендикулярны друг другу $dx_k dt_k = 0$.

BQ-вектор-интервал при этом есть инвариант $SO(2,1) \subset SO(3,C)$, как, конечно, и его квадрат (отличающийся от квадрата нормы лишь знаком) $d\mathbf{z}^2 = dt^2 - dr^2$, последний в точности повторяет вид интервала пространства-времени специальной теории относительности Эйнштейна. Таким образом построенная 6D-модель изначально получила название кватернионной теории относительности. Временная и пространственная переменные симметричным образом входят в выражение BQ-вектора-интервала, а связанная с ними триада Q-единиц описывает релятивистскую систему отсчета $\Sigma \equiv (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$. Переход от одной системы отсчета к другой осуществляется с помощью уравнений поворота вида $\Sigma' = O\Sigma$, где матрица O принадлежит $SO(2,1)$ и представляет собой упорядоченное произведение матриц действительных и гиперболических поворотов; в связи с этим теорию можно было бы назвать (и может быть, более корректно) "вращательной" теорией относительности. Смысл простого H-вращения немедленно раскрывается при записи первой строки уравнения $\Sigma' = H_3^{\psi}\Sigma$ в явном виде

$$i\mathbf{q}_{1'} = i\cosh\psi(\mathbf{q}_1 + \tanh\psi\,\mathbf{q}_2).$$

Если, как в специальной теории относительности, $\cosh\psi = dt/dt'$, то

$$idt'\mathbf{q}_{1'} = idt(\mathbf{q}_1 + V\mathbf{q}_2),$$

что означает движение системы отсчета Σ' относительно Σ со скоростью V вдоль направления $\mathbf{q}_2$. Легко проверить, что из $SO(2,1)$ -поворотов Q-систем отсчета в точности следуют преобразования Лоренца для изменений координат, а следовательно, все кинематические эффекты специальной теории относительности.

Здесь стоит заметить, что параметры действительных и гиперболических поворотов могут быть переменными, например, зависеть от времени наблюдателей. Это позволяет предположить, что в рамках данной теории имеется возможность описания неинерциальных движений. Анализ уравнений поворота показывает, что это предположение полностью оправдывается. Так, движение постоянно ускоренной системы отсчета относительно инерциальной (гиперболическое движение), неоднократно рассмотренное в литературе с привлечением условий, дополнительных к специальной теории относительности, в кватернионной теории анализируется естественно и просто, причем с позиций любой из двух систем отсчета [18].

Задача кинематики другого неинерциального движения – релятивистского кругового движения – полностью и точно решается с помощью уравнения поворота $\Sigma' = H_2^{\psi(t)} R_1^{\alpha(t)}\Sigma$, где Σ' – система отсчета, вращающаяся по окружности вокруг неподвижной системы отсчета Σ. Эта задача может быть решена как с позиции инерциального наблюдателя, при этом результирующие соотношения имеют вид

$$t = \int dt' \cosh\psi(t'), \qquad \alpha(t) = \frac{1}{R}\int dt' \tanh\psi(t'),$$

$$a_{\tan}(t) = \frac{1}{\cosh^2\psi}\frac{d\psi}{dt}, \qquad a_{norm}(t) = R\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2,$$

так и с точки зрения наблюдателя в произвольно движущейся по круговой орбите системе отсчета.

Решение задачи о "классической" прецессии Томаса в рамках СТО, но также с введением дополнительных условий, в кватернионной теории записывается в одну строчку – первую строку матрицы уравнения поворота $\Sigma'' = R_1^{-\alpha(t)} H_2^{\psi} R_1^{\alpha(t)}\Sigma$, при этом, конечно, получается верное значение частоты прецессии

$$\omega_T = (1 - \cosh\psi) \approx -\frac{1}{2}\omega V^2.$$

Более того, в рамках кватернионной теории относительности оказывается возможным описать прецессию Томаса для векторов, движущихся по траекториям общего вида. Базой решения проблемы, как всегда, является уравнение поворота, в данном случае естественно обобщенное: $\Sigma'' = R^{-\theta(t)} H^{\psi(t)} R^{\theta(t)}\Sigma$, здесь $\theta(t)$ – угол мгновенного поворота. Существенным также оказывается требование перпендикулярности оси гиперболического поворота к плоскости, образованной радиус-вектором наблюдаемого репера и вектором его скорости. При этом формула переменной во времени частоты общей прецессии Томаса имеет вид

$$\Omega_T = \frac{d}{dt}(\theta - \theta').$$

Примером такой прецессии Томаса может служить кажущееся смещение перигелия Меркурия, расчет дает следующую величину $\Delta\varepsilon = 2,7''/100$ лет.

Универсальный характер движения тел (включая неинерциальные движения) в кватернионной теории относительности располагает к поиску новых кинематических эффектов релятивизма. Один из эффектов можно подметить в движении спутников планет Солнечной системы. Относительная скорость Земли и другой планеты со временем изменяется и иногда достигает значительной величины, до известной степени сопоставимой с величиной фундаментальной скорости. Это может привести к расхождениям между расчетными и наблюдаемыми с Земли кинематическими величинами, характеризующими циклические процессы на данной планете или вблизи нее. В частности, должно иметь место кажущееся отклонение положения спутника планеты от расчетной позиции. Такое угловое отклонение рассчитано; оно, как оказалось, линейно зависит от времени наблюдения, то есть эффект накапливается

$$\Delta\varphi \approx \frac{\omega V_E V_P}{c^2} t,$$

здесь ω – угловая скорость движения спутника вокруг планеты, V – линейные скорости Земли и планеты относительно Солнца. Величина эффекта такова. Для ближайшего к Юпитеру и самого "быстрого" его спутника $\Delta\varphi \cong 12'$ за 100 земных лет; для спутника Марса (Фобос) $\Delta\varphi \cong 20'$ за 100 земных лет [19]. Оба значения представляются достаточно большими, и не исключено, что эффект может быть обнаружен в результате длительного точного наблюдения.

Можно сказать, что пространственно-временная модель и кинематика кватернионной теории относительности на сегодняшний день достаточно детально разработаны и могут служить эффективным аппаратом для вычисления многих релятивистских эффектов. Но пока не сформулирована соответствующая релятивистская динамика, нет кватернионной теории поля; Q-гравитация, электромагнетизм, слабые и сильные взаимодействия остаются отдаленными проектами. Однако, есть надежда, что это только начало пути, и теория "повзрослеет". Эта надежда поддерживается наблюдением ряда примечательных "кватернионных совпадений", образующих пока не слишком связную мозаику физико-математических фактов. Весьма возможно, что со временем она превратится в логически стройную схему, расширяющую инструментарий и понимание законов физики.

6. Замечательные "кватернионные совпадения"

Есть, по крайней мере, пять таких совпадений (все они приведены ниже), замеченных разными авторами в разное время.

1. *Уравнения Максвелла как условия аналитичности функций кватернионного переменного.*

В 1937 году Фютер [20] заметил, что уравнения Коши-Римана $\partial f/\partial z^* = 0$, определяющие дифференцируемость функции комплексного переменного и физически моделирующие плоское движение жидкости без источников и вихрей, имеют следующий кватернионный аналог

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q}_{\tilde{k}}\frac{\partial}{\partial x_{\tilde{k}}}\right)\mathbf{H} = 0, \qquad \mathbf{H} = (B_{\tilde{n}} + iE_{\tilde{n}})\mathbf{q}_{\tilde{n}}.$$

Удивительный факт состоит в том, что соответствующей физической моделью оказываются уравнения классической электродинамики Максвелла в вакууме

$$div\vec{E} = 0, \quad div\vec{B} = 0, \quad rot\vec{E} - \frac{\partial\vec{B}}{dt} = 0, \quad rot\vec{B} + \frac{\partial\vec{E}}{dt} = 0.$$

2. *Классическая механика во вращающихся системах отсчета.*

Компактная форма уравнений Ньютона в кватернионном репере описана выше, в разделе 4. Остается подчеркнуть, что естественно возникающая и внешне примитивная запись уравнений динамики

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

скрывает любые по сложности комбинации вращений системы отсчета или наблюдаемого тела. Использование дифференциальных кватернионных объектов позволяет быстро получить явный вид этих уравнений, каждое слагаемое которых имеет очевидную физическую трактовку.

3. *Кватернионная теория относительности.*

1:1 изоморфизм группы Лоренца, ассоциируемой со специальной теорией относительности, и группы инвариантности кватернионного умножения $SO(3, C)$ имеет следствием появление нестандартной кватернионной теории относительности с симметричным 6-мерным пространством-временем. Эта теория происхождением, моделью, возможностями и математическим аппаратом сильно отличается от специальной теории относительности Эйнштейна, но предсказывает абсолютно одинаковые с ней кинематические эффекты. Инвариантность специфического бикватернионного векторного "интервала" $d\mathbf{z} = (dx_k n + i\,dt_k)\mathbf{q}_k$ относительно подгруппы $SO(2, 1)$ с, вообще говоря, переменными параметрами позволяет рассчитывать релятивистские эффекты неинерциального движения систем отсчета.

4. *Уравнения Паули* [21].

Если рассматривать квантовую частицу с электрическим зарядом e, массой m, и обобщенным импульсом

$$P_k \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{e}{c} A_k$$

в простейшем кватернионном пространстве (все параметры постоянны, связность, кручение и кривизна равны нулю), то гамильтониан такой частицы, вычисляемый с помощью Q-метрики

$$H \equiv -\frac{1}{2m} P_k P_m \mathbf{q}_k \mathbf{q}_m$$

оказывается точной копией функции Гамильтона уравнения Паули

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{\sigma},$$

при этом спиновое слагаемое сразу же имеет в качестве коэффициента магнетон Бора.

5. *Напряженность поля Янга-Миллса.*

Если в произвольном кватернионном пространстве из компонент связности Ω_{amn} (индексы a, b, c нумеруют координаты базового Q-пространства, индексы j, k, m, n нумеруют векторы касательных триад), построить некоторый "потенциальный" вектор

$$A_{ka} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{kmn}\Omega_{amn},$$

а из компонент кватернионной кривизны

$$r_{knab} = \partial_a \Omega_{bkn} - \partial_b \Omega_{akn} + \Omega_{ajn}\Omega_{bjk} - \Omega_{bjk}\Omega_{ajn}$$

аналогичным образом построить вектор "напряженности"

$$F_{kab} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{kmn} r_{mnab},$$

то эти два геометрических объекта оказываются связанными между собой точно так же, как напряженность и потенциал поля Янга-Миллса

$$F_{kab} \equiv \partial_b A_{ka} - \partial_a A_{kb} + \varepsilon_{kmn} A_{ma} A_{nb}.$$

Нужно отметить, что для Q-пространств с метрической (не аффинной) связностью кривизна, а с ней и "напряженность" тождественно равны нулю.

Обсуждение

Кватернионы, конечно, в первую очередь – математические объекты, и задача развития их алгебры, анализа и геометрии, в известном смысле, самодостаточна. Но новейшая история науки удостоверяет: как только речь заходит о геометрии, тем более, дифференциальной, присутствие физики становится неизбежным. Есть известное мнение, что пионером геометризации физики был Эйнштейн, предложивший свою общую теорию относительности. Но известно также, что Максвелл сформулировал свою электродинамику именно на языке кватернионов, удобном для описания "напряжений эфира", каковыми представлялись векторы напряженности электромагнитного поля. Этот более чем геометричный язык был потом заброшен на многие десятилетия.

Предложенные в данном обзоре аспекты кватернионной математики еще раз указывают на "родственные связи" физики и геометрии: от описания вращений систем отсчета в классической механике и теории относительности до проявлений структуры кватернионных пространств в уравнениях Паули и в теории Янга-Миллса.

Богатство предоставляемых Q-подходом возможностей и появляющиеся с его использованием нетрадиционные физические модели типа 6-мерного пространства-времени или упомянутые выше совпадения могут вызвать отношение к кватернионам как всего лишь математической игре, своего рода элементам "лего", из которых можно построить немало экзотических конструкций. Но на этот счет есть два следующих соображения.

1) Несмотря на свою модельную нестандартность Q-метод позволяет решать физические задачи, так что это – практически полезный инструмент. Характерный пример: "врожденный" экспоненциальный характер представления простых вращений здесь приводит к простому описанию сложения поворотов, включая, конечно, и "мнимые" повороты, описывающие релятивистские бусты. Стоит напомнить, что суммирование обычных поворотов в классической механике являет собой не слишком простую задачу.

2) Все физические кватернионные теории не мучительно придумываются, а возникают просто и естественно, как отражение законов природы в математике. Приверженец пифагорейской философии "мир есть число" увидел бы здесь дополнительный аргумент в свою пользу. И действительно, Q-алгебра, последняя ассоциативная алгебра, отлично подходит для описания физических величин, а они – пока что все до единой – ассоциативны по умножению, от наблюдаемых кинематических и динамических, до порожденных теориями тензорных и спинорных.

Все эти обстоятельства позволяют надеяться, что дальнейшие усилия в исследовании отношения "кватернионы – законы физики" когда-то перерастут в широкую научную программу. Еще один скромный, но настойчивый шаг в этом направлении сделан недавно, когда автору данного обзора в рамках кватернионной теории удалось найти точное решение задачи релятивистского осциллятора. Детали решения будут опубликованы в одной из последующих работ.

Литература:

1. Hamilton W. R. (1853) Lectures on Quaternions, Dublin, Hodges & Smith.

2. Hamilton W. R. (1969), Elements of Quaternions, Chelsey Publ. Co. N. Y.

3. Стройк Д. Я. (1969) Краткая история математики, М., Наука.

4. Бурбаки Н., (1963) Очерки по истории математики, М., Наука.

5. Боголюбов А. Н. (1983) Математики, Механики, Киев, Наука.

6. Klien F., (1924) Arithmetic, Algebra, Analyses, N. Y., Dover Publ. (Translation from 3-d German edition).

7. Rastall P. (1964) Quaternions in Relativity, Review of Modern Physics, July, 820-832.

8. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. (1973) Кватернионы в задачах ориентации твердого тела. М., Наука.

9. Horwitz L. P., Biedenharn L. C. (1984) Quaternionic Quantum Mechanics: Second Quantization and Gauge Fields, Ann. Phys., 157, 432-488.

10. Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. (1989) Кватернионы в релятивистской физике. Минск, Наука.

11. Bisht P. S, Negi O. P., Rajput B. S., (1991) Quaternionic Gauge Theory of Dyonic Fields, Progr. Theor. Phys., 85, № 1, 157-168.

12. И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.

13. Ефремов А. П. (1985) Q-поле, переменный кватернионный базис. Физика, Известия вузов, 12, 14-18.

14. Yefremov A. P. (2001) Tangent Quaternionic Space, Gravitation & Cosmology, 7, № 4 273-275.

15. Yefremov A. P. (2002) Structure Equations and Preliminary Classification of Quaternionic Spaces. Abstracts of 11 Int. GRG Conf, Tomsk, p.123.

16. Ефремов А. П. (1995) Механика Ньютона в кватернионном базисе. М., РУДН.

17. Yefremov A. P. (1996) Quaternionic Relativity. I. Inertial Motion, Gravitation & Cosmology, 2, № 1, 77-83.

18. Yefremov A. P. (1996) Quaternionic Relativity. II. Non-Inertial Motion, Gravitation & Cosmology, 2, № 4, 335-341.

19. Yefremov A. P. (2000) Rotational Relativity, Acta Phys. Hungarica, New Series - Heavy Ion Physics 11, № 1-2, 147-153.

20. Fueter R. (1934-1935) Comm. Math. Hel., B7S, 307-330.

21. Yefremov A. P. (1983) Quaternionic Multiplication Rule as a local Q-Metric, Lett. Nuovo Cim. 37, № 8, 315-316